

# Sur le corrélateur compressé: estimation de temps de retard et d'interspectre

A.G. ZEBADUA, E. MOISAN, P.O AMBLARD

GIPSA-lab, DIS(UMR CNRS 5216), ENSE3-BP 46 38402 Saint Martin d'Hères Cedex

{pierre-olivier.amblard,eric.moisan}@gipsa-lab.grenoble-inp.fr

**Résumé** – Dans le cadre de deux problèmes d'estimation (retard et interspectre), nous comparons les techniques usuelles, issues de l'estimation classique de la fonction de corrélation, aux estimations obtenues à partir de l'estimateur compressé de la fonction de corrélation (calcul avec des signaux compressés par projections aléatoires). À nombre donné de mesures, nous montrons que l'acquisition compressée permet de construire un estimateur d'interspectre qui est plus performant que le classique, dans le cas de signaux suffisamment corrélés. Par contre, l'estimation du retard s'avère moins performante. Nous établissons ces résultats et les illustrons dans le cas d'un processus à corrélation exponentielle.

**Abstract** – In this paper we compare the estimation of a time-delay and of the cross-spectrum using the classic correlation function estimator with the estimates obtained with a compressed estimator of the correlation function (using random projections). With a fixed number of measurements, theoretical results show that compressive acquisition produces a cross-spectrum estimator which has better performance, in the case of correlated signals, and worst performance for time-delay estimation. We establish these results and we illustrate them by studying a process with exponentially-decaying correlation

## 1 Motivations

Le contexte de cette étude est la surveillance passive d'un milieu à l'aide d'un réseau de capteurs, par exemple pour le suivi du vieillissement d'une structure (SHM, Structural Health Monitoring). Les propriétés physiques du milieu peuvent se déduire des signaux enregistrés par les différents capteurs. Nous nous intéressons en particulier à une architecture collaborative, qui permet de déployer le réseau dans une surface aussi grande que désirée. Dans cette architecture, les capteurs sont contraints à n'utiliser que très peu d'énergie. Pour ce faire, ils peuvent effectuer localement quelques calculs, mais ils doivent surtout communiquer le moins possible avec leurs voisins, car la transmission de données est la tâche qui consomme le plus d'énergie. Il est alors exclu qu'un capteur dialogue en permanence avec un voisin, pour lui transmettre toutes les données qu'il mesure. Notre objectif principal consiste donc à réduire les communications au sein du réseau, afin d'accroître sa durée de vie, en diminuant la consommation d'énergie de chaque capteur.

Dans cet article nous étudions l'estimation du temps de propagation entre deux capteurs, ou bien l'interspectre des signaux mesurés. Ces deux estimations reposent sur celle de la fonction d'intercorrélation, évaluée directement sur des versions compressées des signaux reçus [3]. Ces travaux rentrent dans le cadre du traitement des signaux dans le domaine compressé [2] (CSP, Compressive Signal Processing). Leur intérêt est d'éviter le passage par une coûteuse étape de reconstruction, classiquement étudiée dans la littérature sur l'acquisition compressée.

Les performances des deux estimateurs qui nous intéressent (temps de propagation et interspectre) découlent de la covariance entre les estimations de la fonction de corrélation pour deux retards distincts. Nous évaluons d'abord cette covariance, pour l'appliquer ensuite au cas particulier d'un processus gaussien autorégressif d'ordre 1, dont le coefficient permet d'ajuster la compressibilité du signal.

## 2 Estimateurs utilisés

Les signaux qui parviennent aux capteurs sont modélisés comme étant aléatoires, à valeurs réelles, de moyenne nulle, conjointement stationnaires et ergodiques. Pour effectuer l'estimation du retard ou de l'interspectre par une méthode du type Blackman-Tukey, il faut d'abord évaluer la fonction d'intercorrélation des signaux mesurés en chacun des capteurs.

### 2.1 Estimation de la corrélation

Considérons deux capteurs voisins, notés  $x$  et  $y$ . Soient  $x_t$  et  $y_t$  les signaux échantillonnés qu'ils mesurent respectivement. On note  $\Gamma_{xy}(k) = E[x_t y_{t-k}]$  leur fonction d'intercorrélation pour le retard  $k$ . En pratique, on regroupe les quantités manipulées dans des vecteurs de taille  $N$ , qui stockent les derniers échantillons du signal :  $\mathbf{x}_{0,N} = (x_t, \dots, x_{t-N+1})^\top$  et  $\mathbf{y}_{k,N} = (y_{t-k}, \dots, y_{t-k-N+1})^\top$ . Pour que le capteur  $y$  calcule l'intercorrélation, il faut que l'autre ( $x$ ) lui communique ses mesures. Nous comparons deux méthodes visant à limiter la transmission à  $M$  valeurs, où  $M < N$  :

1. Approche classique : ne fournir que les  $M$  derniers échantillons puis utiliser l'estimateur habituel

$$c_{M,xy}(k) = M^{-1} \mathbf{x}_{0,M}^\top \mathbf{y}_{k,M}$$

2. Approche compressée : envoyer  $M$  projections aléatoires calculées sur les  $N$  derniers échantillons, puis estimer la fonction d'intercorrélation dans le domaine compressé

$$C_{N,xy}(k) = (\Phi \mathbf{x}_{0,N})^\top (\Phi \mathbf{y}_{k,N})$$

où  $\Phi$  désigne la matrice  $M \times N$  de compression ( $M < N$ ). Cette matrice aléatoire est constituée de  $NM$  éléments  $\varphi_{ij}$ , indépendants, identiquement distribués, de moyenne nulle et

indépendants des signaux eux-mêmes. Nous nous limitons ici à des matrices parcimonieuses ternaires qui demandent très peu de calculs pour la compression ( $O(N)$  au lieu de  $O(MN)$ ).

## 2.2 Biases et covariance

Notre objectif est l'étude des estimateurs de retard et de la densité spectrale d'interaction entre les signaux  $x_t$  et  $y_t$ . Tous deux s'appuient sur les statistiques aux ordres 1 et 2 de l'estimation de la fonction d'intercorrélation.

Les propriétés de l'estimateur classique de corrélation sont bien connues [1]. Il est non biaisé :

$$E[c_M(k)] = \Gamma_{xy}(k) = E[x_t y_{t-k}]$$

et à l'ordre 2, pour deux retards quelconques  $k$  et  $\ell$  on a :

$$\text{Cov}[c_M(k), c_M(\ell)] = \frac{1}{M^2} \sum_{r=1-M}^{M-1} (M - |r|) f_{xy}(r, k, \ell) \quad (1)$$

où  $f$  dépend des cumulants d'ordre 4 des processus  $x$  et  $y$

$$\begin{aligned} f_{xy}(r, k, \ell) &= E[x_t y_{t-\ell} x_{t-r} y_{t-r-k}] - \Gamma_{xy}(\ell) \Gamma_{xy}(k) \\ &= \text{Cum}_{xyxy}(\ell, r, r+k) + \Gamma_{xx}(r) \Gamma_{yy}(r+k-\ell) \\ &\quad + \Gamma_{xy}(r+k) \Gamma_{xy}(\ell-r) \end{aligned}$$

Dans le domaine compressé, nous avons :

$$E[c_N(k)] = MN \text{Var}[\varphi_{ij}] \Gamma_{xy}(k)$$

de sorte qu'il suffit d'ajuster la variance des éléments de la matrice de compression à  $1/MN$  pour que l'estimateur soit non biaisé.

À l'ordre 2, pour deux retards  $k$  et  $\ell$ , on peut exploiter la formule de décomposition de la covariance

$$\begin{aligned} \text{Cov}[C_N(k), C_N(\ell)] &= E_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} [\text{Cov}_{\Phi} [C_N(k), C_N(\ell) | \mathbf{x}, \mathbf{y}]] \\ &\quad + \text{Cov}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} [E_{\Phi} [C_N(k) | \mathbf{x}, \mathbf{y}], E_{\Phi} [C_N(\ell) | \mathbf{x}, \mathbf{y}]] \end{aligned}$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} \text{Cov}[C_N(k), C_N(\ell)] &= \text{Cov}[c_N(k), c_N(\ell)] + \frac{\kappa}{MN} h_{xy}(k, \ell) \\ &\quad + \sum_{r=1-N}^{N-1} \frac{N - |r|}{MN^2} (f_{xy}(r, \ell, k) + \Gamma_{xy}(k) \Gamma_{xy}(\ell)) \\ &\quad + \sum_{r=1-N}^{N-1} \frac{N - |r|}{MN^2} h_{xy}(k+r, \ell+r) \quad (2) \end{aligned}$$

où  $\kappa$  désigne le Kurtosis normalisé des éléments  $\varphi_{ij}$  de la matrice de compression, tandis que la fonction  $h$  est définie par :

$$h_{xy}(p, q) = \text{Cum}_{xyxy}(p, 0, q) + 2\Gamma_{xy}(p) \Gamma_{xy}(q) + \Gamma_{xx}(0) \Gamma_{yy}(q-p)$$

Ces expressions générales dépendent naturellement de la nature des signaux considérés. En particulier, les cumulants d'ordre 4 des signaux gaussiens centrés sont nuls.

## 2.3 Cas d'un processus gaussien AR(1)

Pour comparer les estimateurs compressés aux classiques, considérons simplement deux signaux identiques, gaussiens, autorégressifs d'ordre 1

$$y_t = x_t = \alpha x_{t-1} + \sqrt{1 - \alpha^2} \epsilon_t$$

où  $\epsilon_t$  désigne une séquence de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), tandis que le réel  $\alpha \in ]-1, 1[$ . L'autocorrélation de ce processus vaut :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \Gamma_{xx}(k) = \alpha^{|k|}$$

Un tel signal permet d'examiner l'influence de la compression en fonction de la nature spectrale des signaux. Pour  $\alpha = 0$ , le signal est un bruit blanc, l'archétype du signal non compressible. Au fur et à mesure que  $|\alpha|$  s'éloigne de 0, le signal devient de plus en plus compressible, en vertu de la redondance apportée par la corrélation qui lie ses échantillons successifs. Ainsi, une étude récente montre que pour un coefficient de régression dont le module est suffisamment grand, l'estimateur compressé de l'autocorrélation est plus performant que le classique sur  $M$  points [3] :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \text{Var}[C_N(k)] \leq \text{Var}[c_N(k)]$$

L'équation (1) donne maintenant la covariance de l'estimateur classique de corrélation, exploitant  $M$  échantillons successifs des signaux. (Le détail de ces calculs, plus longs et fastidieux que difficiles, sera accessible d'ici quelques semaines, dans la thèse [4].)

Pour  $\ell > |k| \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[c_M(k), c_M(\ell)] &= \\ &\frac{\alpha^{k+\ell}}{M} \left[ (1+k+\ell) \left(1 - \frac{\ell+|k|}{2M}\right) + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \left(2 - \frac{1+\ell}{M} + \text{Min}(0, -\frac{k+1}{M})\right) \right] \\ &\quad + \frac{\alpha^{\ell-k}}{M} \left[ (1+\ell-k) \left(1 - \frac{\ell-k}{2M}\right) + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \left(2 - \frac{2+\ell-k}{M}\right) \right] \\ &\quad - \frac{\alpha^{2+\ell-k}}{M^2(1-\alpha^2)^2} \left( \alpha^{2\text{Max}(1+k,0)} + 2\alpha^2 + \alpha^{2+2k} \right) \\ &\quad + 2 \frac{\alpha^{2(M+1)}}{M^2(1-\alpha^2)^2} \left( \alpha^{k-\ell} + \alpha^{\ell-k} \right) \end{aligned}$$

tandis que pour  $-k < \ell < k$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[c_M(k), c_M(\ell)] &= \\ &\frac{\alpha^{-k-\ell}}{M} \left[ (1-k-\ell) \left(1 - \frac{|\ell-k|}{2M}\right) + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \left(2 - \frac{1-k}{M} + \text{Min}(0, \frac{\ell-1}{M})\right) \right] \\ &\quad + \frac{\alpha^{\ell-k}}{M} \left[ (1+\ell-k) \left(1 - \frac{\ell-k}{2M}\right) + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \left(2 - \frac{2+\ell-k}{M}\right) \right] \\ &\quad - \frac{\alpha^{2+\ell-k}}{M^2(1-\alpha^2)^2} \left( \alpha^{2\text{Max}(0,1-\ell)} + 2\alpha^2 + \alpha^{2-2\ell} \right) \\ &\quad + 2 \frac{\alpha^{2(M+1)}}{M^2(1-\alpha^2)^2} \left( \alpha^{k-\ell} + \alpha^{\ell-k} \right) \end{aligned}$$

Dans le cas de l'estimateur compressé de la corrélation, à partir de l'équation (2) on aboutit à :

Pour  $\ell \geq |k| \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \text{Cov}[C_N(k), C_N(\ell)] &= \frac{M+1}{M} (\text{Cov}[c_N(k), c_N(\ell)]) \\ &\quad + \frac{\alpha^{\ell+|k|} + \alpha^{\ell-k}}{M} + \frac{\kappa}{MN} \left( \alpha^{\ell-k} + 2\alpha^{\ell+|k|} \right) + O\left(\frac{1}{MN^2}\right) \end{aligned}$$

Et pour  $-k < \ell < k$  :

$$\begin{aligned} \text{Cov}[C_N(k), C_N(\ell)] &= \frac{M+1}{M} (\text{Cov}[c_N(k), c_N(\ell)]) \\ &\quad + \frac{\alpha^{|\ell-k|} + \alpha^{\ell-k}}{M} + \frac{\kappa}{MN} \left( \alpha^{\ell-k} + 2\alpha^{|\ell-k|} \right) + O\left(\frac{1}{MN^2}\right) \end{aligned}$$

Examinons maintenant l'impact de ces deux quantités sur les performances des estimateurs issus de la fonction de corrélation.

Qu'il s'agisse d'estimer un temps de retard ou un interspectre, notre objectif n'est pas de rechercher l'estimateur optimal mais, à défaut, établir l'influence de l'estimateur initial de la fonction de corrélation sur ces deux estimations.

### 2.3.1 Estimation du temps de retard

Le retard estimé correspond à l'argument pour lequel la fonction de corrélation présente son maximum. Dans le cas général, la loi de probabilité de cette variable est inaccessible. Mais à temps continu, l'abscisse recherchée correspond également au point où la dérivée de la fonction de corrélation s'annule, pour peu que la fonction en question soit dérivable. Ce n'est évidemment pas le cas de la fonction à temps discret ! Toutefois, il est courant d'approcher la dérivée d'une telle fonction par la moyenne des incréments à gauche et à droite

$$\widehat{\Gamma'(k)} \approx \frac{\widehat{\Gamma}(k+1) - \widehat{\Gamma}(k-1)}{2}$$

si bien que :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{\Gamma'(k)}) &= \frac{1}{4} \text{Var}(\widehat{\Gamma}(k+1)) + \frac{1}{4} \text{Var}(\widehat{\Gamma}(k-1)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Cov}(\widehat{\Gamma}(k-1), \widehat{\Gamma}(k+1)) \end{aligned}$$

Faute de mieux, nous admettons que cette quantité détermine la variance du retard estimé, même dans le cas particulier d'un processus AR(1), dont la fonction de corrélation n'est pourtant pas dérivable (si ce n'est au sens des distributions ...)

Appliqué à l'autocorrélation d'un processus AR(1), dont le maximum apparaît en  $k = 0$ , on obtient respectivement :

$$\begin{aligned} \text{Var}(c'_M(0)) &= \frac{1 + \alpha^2 - 2\alpha^{2M}}{2M^2} \\ \text{Var}(c'_N(0)) &\approx \frac{1 - \alpha^2}{2M} \left(1 + \frac{\text{Cum}_4[\varphi] + 2}{N}\right) + \frac{1 + \alpha^2 - 2\alpha^{2N}}{2N^2} \end{aligned}$$

La première décroît en  $O(1/M^2)$  contre  $O(1/M)$  pour la seconde. L'estimation du retard est donc plus performante dans le cas classique, puisque sa variance est toujours inférieure à celle établie à partir des signaux compressés. De simples simulations confirment cette conclusion. Elles ne sont pas présentées ici, faute de place.

### 2.3.2 Densité spectrale

Intéressons nous maintenant à l'étude des estimateurs de l'autospectre, construits à l'aide des estimateurs de corrélation classique ou compressé. Par définition, l'autospectre  $S(\nu)$  est la transformée de Fourier de l'autocorrélation. Dans sa version la plus simple, le corrélogramme se limite au calcul de la transformée de Fourier de l'autocorrélation pondérée par une fenêtre rectangulaire, de largeur  $2L + 1$ . Ce n'est sans doute pas le meilleur estimateur (par exemple, sa positivité n'est pas garantie) mais, encore une fois, notre propos vise uniquement à comprendre l'influence de la compression sur l'estimation.

$$\begin{aligned} S(\nu) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma(k) e^{-j2\pi\nu k} \quad (\text{où } j^2 = -1) \\ \hat{S}(\nu) &= \sum_{k=-L}^L \widehat{\Gamma}(k) e^{-j2\pi\nu k} = \widehat{\Gamma}^\top \mathbf{a}(\nu) \end{aligned}$$

en notant respectivement  $\widehat{\Gamma}$  et  $\mathbf{a}(\nu)$  les vecteurs  $[\widehat{\Gamma}(-L), \dots, \widehat{\Gamma}(0), \dots, \widehat{\Gamma}(L)]^\top$  et  $[e^{j2\pi\nu L}, \dots, 1, \dots, e^{-j2\pi\nu L}]^\top$ , dans lesquels  $L$  est généralement choisi de l'ordre de  $N/10$  [5].

Cet estimateur est biaisé :  $E[\hat{S}(\nu)] = S(\nu) * \frac{\text{sin}(2\pi\nu L)}{\pi\nu}$ . Et à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{S}(\nu)] &= \mathbf{a}^\top(\nu) \text{Cov}[\widehat{\Gamma}] \mathbf{a}^*(\nu) \\ &= \sum_{k,l=-L}^L \text{Cov}[\widehat{\Gamma}(k), \widehat{\Gamma}(l)] a_k a_l^* \end{aligned} \quad (3)$$

Les deux estimateurs envisagés (classique et compressé) s'écrivent respectivement :  $s_M(\nu) = \mathbf{c}_M^\top \mathbf{a}(\nu)$  et  $s_N(\nu) = \mathbf{C}_N^\top \mathbf{a}(\nu)$ . Leurs performances sont illustrées sur les figures 1 et 2, dans le cas particulier de divers processus AR(1), pour un taux de compression égal à  $N/M = 1000/100 = 10$ .

La figure 1 représente les variances des deux estimateurs (classique en bleu et compressé en noir) en fonction de la fréquence. Lorsque le paramètre  $\alpha$  est positif (courbes en trait continu) les signaux se concentrent dans les basses fréquences (BF), tandis que pour  $\alpha < 0$  (trait pointillé), ils possèdent majoritairement des hautes fréquences (HF). On observe l'influence de la densité spectrale du processus étudié : dans la région spectrale où la puissance du processus se concentre, la variance de l'estimateur compressé est plus petite que celle du classique. Par contre, la tendance s'inverse dans la zone du spectre où la puissance du processus est faible.

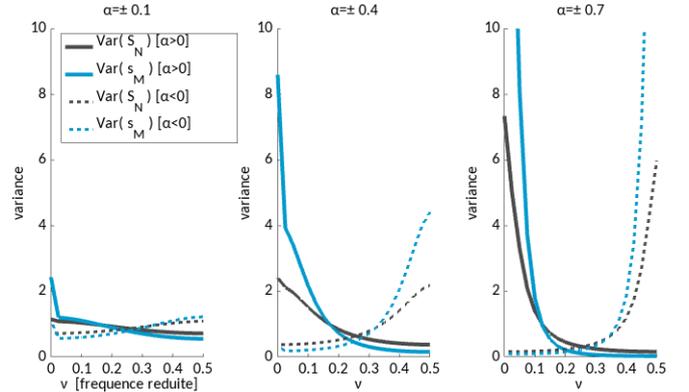


FIGURE 1 – Variance des estimateurs de densité spectrale d'un processus AR(1), pour différentes valeurs du coefficient de régression ( $\pm 0.1, \pm 0.4$  et  $\pm 0.7$  : positif en trait continu et négatif en pointillé) en fonction de la fréquence.

La figure 2 représente le rapport des variances, calculées selon l'équation (3), en fonction de la fréquence

$$\rho(\nu) = \frac{\text{Var}(s_N(\nu))}{\text{Var}(s_M(\nu))}$$

Le rapport lui-même (dessiné en trait continu) est superposé au spectre théorique du signal (en trait pointillé). À nouveau, deux types de processus sont étudiés : basses fréquences ( $\alpha > 0$ , en rose) et hautes fréquences ( $\alpha < 0$ , en gris). On retrouve que  $\rho$  peut devenir inférieur à 1, auquel cas l'estimateur compressé s'avère plus performant que le classique. Toutefois, cela n'est vrai que dans le domaine fréquentiel où le processus concentre sa puissance. Lorsque le contenu spectral est faible, l'estimateur classique reste plus performant ( $\rho > 1$ ).

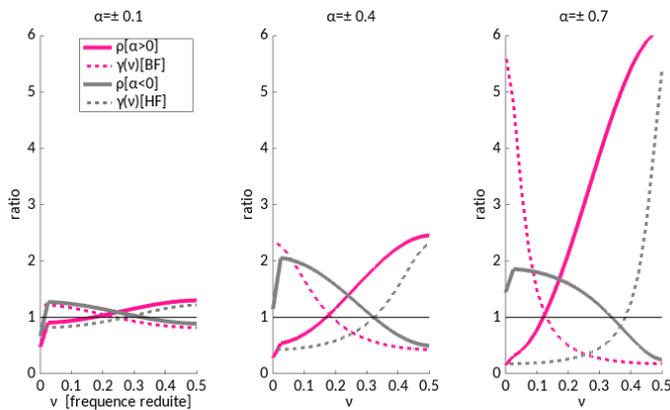


FIGURE 2 – Rapport  $\rho(\nu)$  des variances des estimateurs en fonction de la fréquence (trait continu), pour six valeurs différentes du coefficient de régression du processus ( $\alpha = \pm 0.1, \pm 0.4$  et  $\pm 0.7$ ). Les spectres théoriques correspondants sont représentés en trait pointillé. Les couleurs des courbes, rose et gris, correspondent respectivement à des processus de basses et hautes fréquences (BF et HF).

### 2.3.3 Estimation de fréquence

Une conséquence des observations précédentes est que l'estimateur spectral compressé peut s'avérer intéressant pour évaluer la fréquence centrale de processus à bande étroite. En effet, ce type de signal est a priori très compressible.

C'est ce que montre la figure 3, pour un processus AR(2) gaussien de puissance unitaire, dont les pôles conjugués valent :  $p_{1,2} = 0.96(\cos(\frac{4\pi}{9}) \pm j \sin(\frac{4\pi}{9}))$ . Pour  $N = 1000$  et  $N/M = 10$ , la figure du haut montre les spectres estimés sur 200 réalisations des processus pour trois estimateurs :  $s_N(\nu)$ ,  $S_N(\nu)$  et  $s_M(\nu)$ , ainsi que l'erreur quadratique relative d'estimation de la fréquence centrale en fonction du rapport signal sur bruit. Si on se contente d'évaluer la fréquence centrale en recherchant l'argument qui maximise le spectre estimé, on constate que les performances de l'estimateur compressé (noir) se situent clairement entre celles du classique, selon que ce dernier exploite  $N$  (rouge) ou  $M$  points (bleu).

La figure du bas représente l'erreur quadratique moyenne relative commise sur la fréquence centrale, pour les trois estimateurs, en fonction du rapport signal sur bruit (RSB). Ces courbes confirment l'observation précédente : à nombre constant  $M$  de points, l'estimateur issu des données compressées se comporte mieux que le classique.

## 3 Conclusion

Lorsque l'on manipule des signaux fortement compressibles, les bonnes propriétés de l'estimateur compressé de la corrélation produisent des comportements antagonistes selon l'exploitation que l'on en fait. Ceci provient du fait que la covariance entre les estimations effectuées pour différents retards est plus petite que celle produite par un estimateur classique. En particulier, quand on s'intéresse à l'estimation d'un temps de propagation entre deux capteurs, la compression dégrade les performances. À l'inverse, l'estimation du spectre d'interaction est plus performante pour le compressé que pour le classique, tout au moins autour des fréquences d'intérêt.

L'étude esquissée ici mérite d'être poursuivie dans deux directions : l'analyse asymptotique à taux de compression fixé et le couplage de la

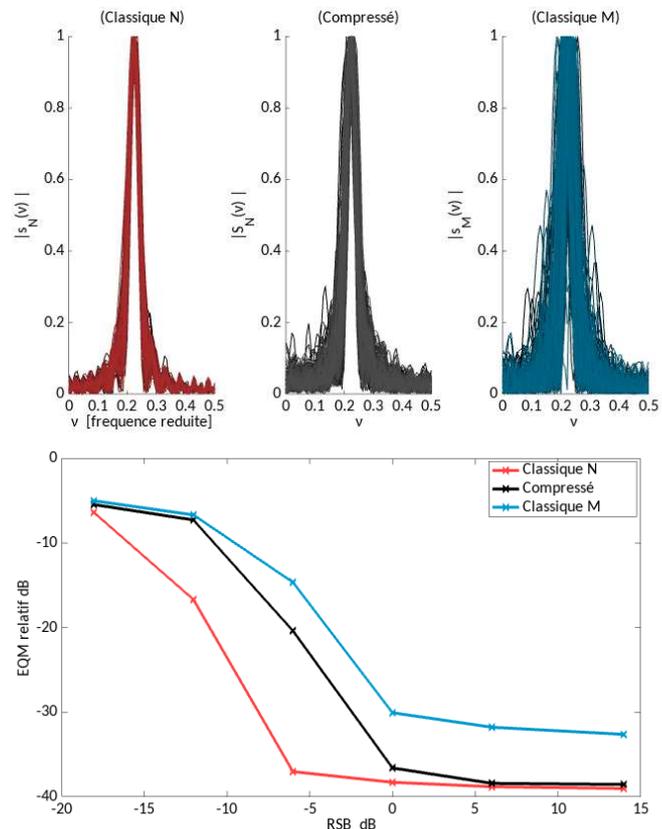


FIGURE 3 – (Haut) 200 Estimations du spectre d'un processus AR(2) pour trois estimateurs différents : classique  $N$  (gauche), compressé (centre) et classique  $M = N/10$  (droite). (Bas) l'erreur quadratique moyenne relative sur la fréquence centrale, en fonction du rapport signal sur bruit. L'estimateur compressé (noir) se comporte mieux que le classique sur  $M$  points (bleu) et presque aussi bien que le classique sur  $N$  points (rouge).

compression avec la quantification des signaux. En effet, nous avons déjà observé que les estimations présentées ici résistent particulièrement bien à de fortes quantifications des signaux compressés.

## Références

- [1] Jenkins, G. M. and Watts, D. G.. *Spectral analysis and its applications*. Holden-Day, 1968.
- [2] M.A. Davenport, P.T. Boufounos, M.B. Wakin, R.G. Baraniuk. *Signal processing with compressive measurements* IEEE Journal of selected topics in signal processing, vol. 4 n. 2, pp.445-460, 2010.
- [3] A. G. Zebadua, P.O. Amblard, E. Moisan, O.J.J. Michel Compressed and quantized correlation estimators. *IEEE Trans. Signal Processing*, Jan, 2017
- [4] A. G. Zebadua Traitement des signaux dans le domaine compressé et quantification sur un bit. Deux outils pour les contextes restreints. *Thèse à soutenir* Oct, 2017
- [5] S. L. Marple, *Digital spectral analysis*. Prentice-Hall, 1987.