

Une borne de Cramér-Rao bayésienne plus précise

Lucien BACHARACH¹, Carsten FRITSCHÉ², Umut ORGUNER³, Éric CHAUMETTE¹

¹ISAE-Supaéro/Département d'Électronique, Optronique et Systèmes

²Linköping University, Dept. of Electrical Engineering, Linköping, Sweden

³Middle East Technical University, Dept. of Electrical Engineering, Ankara, Turkey

lucien.bacharach@isae-superaero.fr,
carsten@isy.liu.se, umut@metu.edu.tr, eric.chaumette@isae-superaero.fr

Résumé – Dans le contexte de l'estimation bayésienne, des travaux récents ont montré que toute borne inférieure de l'erreur quadratique moyenne de la famille Weiss-Weinstein admet une forme alternative plus précise que la forme classique. On s'intéresse ici à la borne de Cramér-Rao bayésienne (BCRB), dont la forme plus précise suggère une nouvelle définition de l'efficacité dans le contexte bayésien. Sa pertinence est illustrée par un exemple. Cela pourrait conduire à revisiter des problèmes d'estimation bayésienne où la BCRB n'est pas atteinte, même asymptotiquement.

Abstract – In the context of Bayesian estimation, recent work has shown that any Bayesian lower bound in the so-called Weiss-Weinstein family implies a tighter form which upper bounds the “standard” form. In the present paper, we focus on the Bayesian Cramér-Rao bound (BCRB), whose tighter version suggests an update for the notion of efficiency in Bayesian estimation. The relevance of the proposed form is supported by a noteworthy example. This work could invite to revisit some Bayesian estimation problems where the BCRB is not tight.

1 Introduction

L'estimation de la valeur de paramètres, aléatoires ou non, à partir d'observations bruitées est un problème fondamental, rencontré dans des domaines aussi divers que le traitement du signal, la théorie du contrôle ou l'économie. De nombreuses procédures ont été proposées pour s'attaquer à ces différents problèmes, mais la qualité d'un estimateur est toujours limitée par les conditions dans lesquelles il opère. Il est donc crucial de déterminer les limites de performances d'estimation pour le problème étudié, en terme d'erreur quadratique moyenne (EQM) par exemple. Ces limites peuvent être obtenues en établissant des bornes inférieures de l'EQM, valables pour un ensemble d'estimateurs, qui renseignent donc sur les meilleures performances que ceux-ci peuvent éventuellement atteindre. Ces bornes constituent un outil incontournable pour l'analyse de systèmes, car elles dépendent bien souvent de grandeurs essentielles de ces systèmes. Ceux-ci peuvent donc être conçus en choisissant les grandeurs qui mènent à de meilleures performances, à l'aide des bornes calculées. En considérant les paramètres à estimer comme des variables aléatoires, on obtient des bornes de performance dites « globales » : celles-ci prennent en compte l'ensemble des valeurs potentiellement prises par les paramètres, ainsi que l'information *a priori* disponible les concernant. Ces bornes sont donc appelées « bornes bayésiennes ».

Nous nous intéressons dans ce papier à la borne de Cramér-Rao bayésienne (BCRB), la première à avoir été obtenue historiquement [3, 6, 8], et aujourd'hui encore la plus utilisée car simple à calculer. Elle apparaît néanmoins comme une borne

optimiste pour des problèmes d'estimation non linéaires, où un phénomène de décrochement (augmentation brusque de l'EQM, e.g., au-delà d'un certain niveau de bruit) peut être constaté, dont elle ne rend pas compte [5, 9]. Cela a conduit à l'élaboration de nouvelles bornes, avec deux familles principales en ce qui concerne les bornes bayésiennes : i) la famille Ziv-Zakai, provenant du bornage de la probabilité d'erreur dans un test d'hypothèse lié au problème d'estimation considéré [11], et ii) la famille Weiss-Weinstein (FWW), résultant de l'inégalité de covariance [2, 5, 7, 10].

Récemment, il a été démontré que chaque borne de la FWW admet une forme alternative plus précise que la forme « classique » [1]. Considérons le cas de l'estimation d'un paramètre scalaire $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ à partir d'un vecteur de N observations réelles, $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \in \mathbb{R}^N$. Soit $\phi(\mathbf{x}, \theta) \triangleq (\phi_1(\mathbf{x}, \theta), \dots, \phi_L(\mathbf{x}, \theta))^T$ une famille de L fonctions vérifiant $E_{\theta|\mathbf{x}}[\phi_\ell(\mathbf{x}, \theta)] = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ presque partout (p.p.), $\ell = 1, \dots, L$. Ces fonctions engendrent des bornes de la FWW [7, 10], et on a

$$E_{\mathbf{x}, \theta}[(\theta - E_{\theta|\mathbf{x}}[\theta])^2] \geq E_{\mathbf{x}} \left[\begin{array}{l} E_{\theta|\mathbf{x}}[\theta \phi^T(\mathbf{x}, \theta)] \\ \cdot E_{\theta|\mathbf{x}}^{-1}[\phi(\mathbf{x}, \theta) \phi^T(\mathbf{x}, \theta)] \cdot E_{\theta|\mathbf{x}}[\theta \phi(\mathbf{x}, \theta)] \end{array} \right] \geq E_{\mathbf{x}, \theta}[\theta \phi^T(\mathbf{x}, \theta)] \cdot E_{\mathbf{x}, \theta}^{-1}[\phi(\mathbf{x}, \theta) \phi^T(\mathbf{x}, \theta)] \cdot E_{\mathbf{x}, \theta}[\theta \phi(\mathbf{x}, \theta)],$$

où $E_{\theta|\mathbf{x}}[\theta]$ est la moyenne *a posteriori*, c'est-à-dire l'estimateur d'EQM minimale (dit « MMSE ») de θ ; le membre de droite est la forme « classique » d'une borne de la FWW, tandis que le membre du milieu en est la forme alternative plus précise. Une condition d'égalité des deux formes est fournie dans [1], qui n'est pas remplie dans la plupart des cas, ce qui expliquerait

que la forme classique ne soit pas toujours atteinte.

Après avoir exposé une méthode simplifiée pour obtenir la forme alternative plus précise de la BCRB, que nous noterons « BCRBa », nous donnons des conditions pour qu'elle soit atteinte et en déduisons une nouvelle définition de l'efficacité (Section 2). Nous illustrons la pertinence de cette forme alternative à travers l'estimation de la variance de données distribuées selon une loi normale (Section 3). Il s'agit d'un exemple typique où la BCRB classique (ou « standard »), notée « BCRBc », n'est pas atteinte asymptotiquement (à grand nombre d'observations) [9], et où l'estimateur du maximum *a posteriori* (MAP) ne semble pas efficace. Nous montrons pourtant qu'il converge vers la forme plus précise de la BCRB, de même que l'estimateur MMSE, justifiant ainsi la redéfinition de l'efficacité. Même s'il semble peu probable de pouvoir obtenir une forme analytique de ces bornes à cause de l'espérance mathématique à calculer, cela peut tout de même être possible pour la BCRB ; dans le cas contraire on pourra recourir à des méthodes de Monte-Carlo pour l'évaluer.

2 Bornes de Cramér-Rao bayésiennes et efficacité

Dans cette section, nous présentons les deux versions de la BCRB considérées ici — la version « classique » BCRBc et la version « alternative » BCRBa — suivant une approche différente de celle précédemment utilisée dans [1]. Elle permet de démontrer plus simplement la meilleure précision de la BCRBa par rapport à la BCRBc dans le cas particulier de l'estimation du paramètre θ où nous nous restreignons à une seule ($L = 1$) fonction $\phi(\mathbf{x}, \theta) \triangleq \partial \ln p(\theta | \mathbf{x}) / \partial \theta$.

2.1 Bornes de Cramér-Rao bayésiennes : versions « classique » et « alternative »

Soit $\phi(\mathbf{x}, \theta)$ une fonction telle que $E_{\theta|\mathbf{x}}[\phi^2(\mathbf{x}, \theta)] < \infty$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ p.p. Par définition de l'estimateur MMSE, et par l'inégalité de covariance [9], on a, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ p.p.,

$$E_{\theta|\mathbf{x}}[(\theta - \hat{\theta}(\mathbf{x}))^2] \geq E_{\theta|\mathbf{x}}[(\theta - E_{\theta|\mathbf{x}}[\theta])^2] \quad (1a)$$

$$\geq \frac{E_{\theta|\mathbf{x}}^2[(\theta - E_{\theta|\mathbf{x}}[\theta]) \phi(\mathbf{x}, \theta)]}{E_{\theta|\mathbf{x}}[\phi^2(\mathbf{x}, \theta)]}. \quad (1b)$$

Si de plus $\phi(\mathbf{x}, \theta)$ engendre une borne de la FWW, c'est-à-dire que $E_{\theta|\mathbf{x}}[\phi(\mathbf{x}, \theta)] = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ p.p., on a alors, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ p.p.,

$$E_{\theta|\mathbf{x}}[(\theta - \hat{\theta}(\mathbf{x}))^2] \geq \frac{E_{\theta|\mathbf{x}}^2[\theta \phi(\mathbf{x}, \theta)]}{E_{\theta|\mathbf{x}}[\phi^2(\mathbf{x}, \theta)]}, \quad (2)$$

ce qui implique

$$E_{\mathbf{x},\theta}[(\theta - \hat{\theta}(\mathbf{x}))^2] \geq E_{\mathbf{x}} \left[\frac{E_{\theta|\mathbf{x}}^2[\theta \phi(\mathbf{x}, \theta)]}{E_{\theta|\mathbf{x}}[\phi^2(\mathbf{x}, \theta)]} \right]. \quad (3)$$

Dans le cas particulier où $\phi(\mathbf{x}, \theta) \triangleq \partial \ln p(\theta | \mathbf{x}) / \partial \theta$, on a, sous de faibles conditions de régularité [2], que $E_{\theta|\mathbf{x}}[\theta \phi(\mathbf{x}, \theta)] =$

-1 , ce qui mène directement à la BCRBa, puis à la BCRBc par application de l'inégalité de Jensen :

$$E_{\mathbf{x},\theta}[(\theta - \hat{\theta}(\mathbf{x}))^2] \geq E_{\mathbf{x}} \left[E_{\theta|\mathbf{x}}^{-1} \left[\left(\frac{\partial \ln p(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right] \quad (4a)$$

$$\geq E_{\mathbf{x},\theta}^{-1} \left[\left(\frac{\partial \ln p(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad (4b)$$

où la BCRBa est le membre de droite de (4a), et la BCRBc celui de (4b).

2.2 Redéfinition de la notion d'efficacité

Le cas d'égalité dans l'inégalité (4a) est obtenu s'il existe une fonction $k(\mathbf{x})$ telle que

$$\frac{\partial \ln p(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta} = k(\mathbf{x}) \cdot (\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta), \quad (5)$$

dont on déduit, en prenant le carré de cette relation puis son espérance *a posteriori*, que $k(\mathbf{x}) = E_{\theta|\mathbf{x}} \left[\left(\frac{\partial \ln p(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta} \right)^2 \right] = 1/\sigma_{\theta|\mathbf{x}}^2$, où $\sigma_{\theta|\mathbf{x}}^2$ représente la variance *a posteriori* de θ . Ainsi, en intégrant (5), on obtient la forme de $p(\theta | \mathbf{x})$ suivante : $p(\theta | \mathbf{x}) = (2\pi\sigma_{\theta|\mathbf{x}}^2)^{-1/2} \exp(-(\theta - \hat{\theta}(\mathbf{x}))^2 / (2\sigma_{\theta|\mathbf{x}}^2))$, c'est-à-dire que la BCRBa (4a) est atteinte seulement si la densité de probabilité de θ *a posteriori* $p(\theta | \mathbf{x})$ est gaussienne pour tout \mathbf{x} . Il s'agit d'un complément au résultat initialement obtenu par Marcel-Paul Schützenberger [6] et Van Trees [8] fondé sur la version « standard » de la BCRB (4b), dont le cas d'égalité est obtenu si $\frac{\partial \ln p(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta} = k \cdot (\hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta)$, où $k = E_{\mathbf{x},\theta} \left[(\partial \ln p(\theta | \mathbf{x}) / \partial \theta)^2 \right]$ est une constante ne dépendant pas de \mathbf{x} . Dans ce cas, la variance de θ *a posteriori* $\sigma_{\theta|\mathbf{x}}^2 = 1/E_{\mathbf{x},\theta} \left[\left(\frac{\partial \ln p(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta} \right)^2 \right] = \sigma_{\theta}^2$ ne dépend pas non plus de \mathbf{x} .

En conséquence, une nouvelle définition de la notion d'*estimateur efficace* est proposée comme suit :

Définition 1. Un estimateur $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ d'un paramètre aléatoire θ est dit « efficace » si son EQM atteint la BCRBa, définie par le membre de droite de (4a).

3 Application à un exemple

Nous nous intéressons ici à l'estimation de la variance de données \mathbf{x} gaussiennes i.i.d. de taille N , de moyenne supposée connue (ou nulle, sans perte de généralité) : $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ [9]. Le paramètre d'intérêt que l'on souhaite estimer est donc $\theta \triangleq \sigma^2$. La vraisemblance est donnée par

$$p(\mathbf{x} | \theta) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \theta^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2\theta}}, \quad (6)$$

et on suppose que θ suit *a priori* une distribution bêta de la forme, pour $0 \leq \theta \leq 1$,

$$p(\theta) = \beta(a, a)^{-1} \theta^{a-1} (1 - \theta)^{a-1}, \quad (7)$$

où $\beta(a, a) \triangleq \int_0^1 \theta^a (1 - \theta)^{1-a} d\theta = \Gamma^2(a) / \Gamma(2a)$, et $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma : $\Gamma(a) \triangleq \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$. Cette loi a

priori est symétrique, de moyenne $\mu_\theta = 1/2$ et de variance $\sigma_\theta^2 = 1/4(2a + 1)$. Lorsque $a = 1$, la densité *a priori* est uniforme sur $[0, 1]$, et lorsque a augmente, elle devient de plus en plus informative jusqu'à s'approcher du cas où θ est connu lorsque $a \rightarrow +\infty$. En combinant (6) et (7), on obtient la loi jointe suivante, pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ et $0 \leq \theta \leq 1$:

$$p(\mathbf{x}, \theta) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \beta(a, a)^{-1} \theta^{a-\frac{N}{2}-1} (1-\theta)^{a-1} e^{-\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2\theta}}. \quad (8)$$

3.1 Résultats connus : BCRB classique et estimateur MAP

D'après (8), on a

$$-\frac{\partial^2 \ln p(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta^2} = -\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^2} = \left(a - 1 - \frac{N}{2} \right) \theta^{-2} + \theta^{-3} \mathbf{x}^\top \mathbf{x} + (a-1)(1-\theta)^{-2} \quad (9)$$

On peut donc obtenir la forme « standard » de la matrice d'information de Fisher bayésienne comme

$$F = E_{\mathbf{x}, \theta} \left[\frac{\partial \ln p(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta} \right]^2 = E_{\mathbf{x}, \theta} \left[-\frac{\partial^2 \ln p(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta^2} \right] = E_\theta \left[E_{\mathbf{x}|\theta} \left[\frac{a-1-\frac{N}{2}}{\theta^2} + \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{\theta^3} + \frac{a-1}{(1-\theta)^2} \right] \right] \quad (10)$$

où $E_{\mathbf{x}|\theta}[\mathbf{x}^\top \mathbf{x}] = \text{tr}(E_{\mathbf{x}|\theta}[\mathbf{x}\mathbf{x}^\top]) = N\theta$. Donc,

$$F = \left(a - 1 + \frac{N}{2} \right) E_\theta[\theta^{-2}] + (a-1) E_\theta[(1-\theta)^{-2}], \quad (11)$$

où $E_\theta[\theta^{-2}] = \frac{\beta(a-2, a)}{\beta(a, a)}$ et $E_\theta[(1-\theta)^{-2}] = \frac{\beta(a, a-2)}{\beta(a, a)}$ d'après [9, p. 10], d'où finalement

$$\text{BCRBc} = \frac{1}{F}, \quad F = (N+4(a-1)) \frac{\Gamma(a-2)\Gamma(2a)}{2\Gamma(2a-2)\Gamma(a)}. \quad (12a)$$

Si $a > 2$, alors (12a) se réduit à

$$\text{BCRBc} = \frac{1}{F}, \quad F = (N+4(a-1)) \frac{2a-1}{a-2}. \quad (12b)$$

L'estimateur MAP, défini par $\hat{\theta}_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = \arg \max_{0 \leq \theta \leq 1} p(\theta | \mathbf{x}) = \arg \max_{0 \leq \theta \leq 1} p(\mathbf{x}, \theta)$, est donné par [9, p. 9] :

$$\text{si } N \neq 4(a-1) : \hat{\theta}_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad (13a)$$

$$\text{si } N = 4(a-1) : \hat{\theta}_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = \frac{\gamma}{\frac{1}{2} + \gamma} \quad (13b)$$

où $\alpha = 1 - \frac{4(a-1)}{N}$, $\delta = -\left(1 - \frac{2(a-1)}{N} + \gamma\right)$, $\gamma = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{N}$.

3.2 Nouveaux résultats : distributions $p(\mathbf{x})$, *a posteriori*, estimateur MMSE

D'après [4, 3.471(2.)], $\forall \mu, \beta \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\mu) > 0$, $\text{Re}(\beta) > 0$,

$$\int_0^1 \theta^{\mu-1} (1-\theta)^{\mu-1} e^{-\frac{\beta}{\theta}} d\theta = \beta^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\frac{\beta}{2}} \Gamma(\mu) W_{\frac{1-2\mu-\nu}{2}, \frac{\nu}{2}}(\beta), \quad (14)$$

où $W_{\kappa, \lambda}(z)$ est une fonction de Whittaker [4, §9.22-9.23]. En posant $\xi = \frac{N-6a+2}{4}$, et en appliquant (14) à

$$p(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \beta(a, a)^{-1} \int_0^1 \theta^{a-\frac{N}{2}-1} (1-\theta)^{a-1} e^{-\frac{1}{\theta} \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}} d\theta,$$

on obtient les expressions analytiques suivantes :

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(a) \left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}\right)^{a-\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{4}} W_{\xi, \frac{2a-N}{4}}\left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}^N \beta(a, a)},$$

$$p(\theta | \mathbf{x}) = \frac{\theta^{a-\frac{N}{2}-1} (1-\theta)^{a-1} e^{-\frac{1}{\theta} \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}}}{\Gamma(a) \left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}\right)^{\frac{2a-N-2}{4}} e^{-\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{4}} W_{\xi, \frac{2a-N}{4}}\left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}\right)}.$$

De la même façon, l'estimateur MMSE peut être obtenu par

$$E_{\theta|\mathbf{x}}[\theta] = \frac{\int_0^1 \theta p(\mathbf{x}, \theta) d\theta}{p(\mathbf{x})} = \sqrt{\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}} \frac{W_{\xi-\frac{1}{2}, \frac{2a-N+2}{4}}\left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}\right)}{W_{\xi, \frac{2a-N}{4}}\left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}\right)} \quad (15)$$

et l'EQM minimale, notée « MMSE », peut être calculée via

$$\text{MMSE} = E_{\mathbf{x}, \theta} \left[(E_{\theta|\mathbf{x}}[\theta] - \theta)^2 \right] = E_{\mathbf{x}} \left[E_{\theta|\mathbf{x}}[\theta^2] - E_{\theta|\mathbf{x}}[\theta]^2 \right],$$

où, par le même type de calcul que celui conduisant à (15), on a

$$E_{\theta|\mathbf{x}}[\theta^2] = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2} \frac{W_{\xi-1, \frac{2a-N}{4}+1}\left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}\right)}{W_{\xi, \frac{2a-N}{4}}\left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}\right)}. \quad (16)$$

Ainsi, l'EQM minimale, MMSE, est donnée par

MMSE =

$$E_{\mathbf{x}} \left[\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2} \left(\frac{W_{\xi-1, \frac{2a-N}{4}+1}\left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}\right)}{W_{\xi, \frac{2a-N}{4}}\left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}\right)} - \frac{W_{\xi-\frac{1}{2}, \frac{2a-N+2}{4}}\left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}\right)}{W_{\xi, \frac{2a-N}{4}}\left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}\right)} \right)^2 \right].$$

Enfin, en opérant le changement de variable $t = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}$, on obtient

$$\text{MMSE} = \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \times \int_0^\infty \left(W_{\xi-1, \frac{2a-N}{4}+1}(t) - \frac{W_{\xi-\frac{1}{2}, \frac{2a-N+2}{4}}(t)}{W_{\xi, \frac{2a-N}{4}}(t)} \right) t^{\frac{2a+N-2}{4}} e^{-\frac{t}{2}} dt. \quad (17)$$

3.3 Nouveaux résultats (suite) : version plus précise de la BCRB

La BCRBa, définie comme le membre de droite de (4a), est aussi donnée par

$$\text{BCRBa} = E_{\mathbf{x}} \left[E_{\theta|\mathbf{x}}^{-1} \left[\left(\frac{\partial \ln p(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right] = -E_{\mathbf{x}} \left[E_{\theta|\mathbf{x}}^{-1} \left[\frac{\partial^2 \ln p(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta^2} \right] \right],$$

si la dérivée seconde existe. Considérons d'abord le calcul de l'information de Fisher *a posteriori* $F_{\mathbf{x}} \triangleq E_{\theta|\mathbf{x}} \left[-\frac{\partial^2 \ln p(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta^2} \right]$, qui, d'après (9), s'exprime comme

$$F_{\mathbf{x}} = \left(a - 1 - \frac{N}{2} \right) E_{\theta|\mathbf{x}}[\theta^{-2}] + \mathbf{x}^\top \mathbf{x} \cdot E_{\theta|\mathbf{x}}[\theta^{-3}] + (a-1) E_{\theta|\mathbf{x}}[(1-\theta)^{-2}], \quad (18)$$

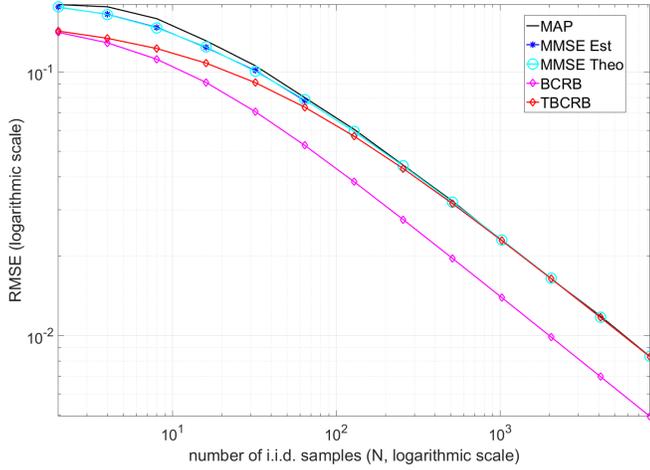


FIGURE 1 – REQM (« RMSE »), BCRBc (« BCRB ») et BCRBa (« TBCRB ») pour $\theta = \sigma^2$, en fonction de N (pour $a = 3$).

où, par des calculs similaires à ceux conduisant à (15) et (16), on obtient les expressions de $E_{\theta|x}[\theta^{-2}]$, $E_{\theta|x}[\theta^{-3}]$ et $E_{\theta|x}[\frac{1}{(1-\theta)^2}]$. Pour obtenir l'expression de la BCRBa = $E_x[\frac{1}{F_x}]$, on utilise de nouveau le changement de variable $t = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2}$, qui conduit à BCRBa =

$$\frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)\Gamma(\frac{N}{2})} \int_0^\infty \frac{W_{\xi, \frac{2a-N}{4}}^2(t) t^{\frac{2a+N-2}{4}} e^{-\frac{t}{2}}}{\left((a-1 - \frac{N}{2}) W_{\xi+1, \frac{2a-N}{4}-1}(t) + 2\sqrt{t} W_{\xi+\frac{3}{2}, \frac{2a-N}{4}-6}(t) + (a-1) \frac{\Gamma(a-2)}{\Gamma(a)} t W_{\xi+2, \frac{2a-N}{4}}(t) \right)} dt. \quad (19)$$

3.4 Résultats numériques

Nous illustrons les résultats précédents avec des résultats de simulations de Monte-Carlo pour des valeurs de $N = 2^i$, $i = 1, \dots, 11$, et $a = 3$. Sur la figure 1, nous montrons les résultats pour 20000 répétitions. Nous y représentons les racines carrées des EQM (REQM) empiriques des estimateurs MAP et MMSE, moyennées sur toutes les répétitions, ainsi que les racines carrées des bornes, à savoir la BCRBc (4b) et la BCRBa (4a), et enfin la racine carrée de l'EQM minimale (MMSE) théorique (17). La BCRBa (19) et la valeur théorique de la MMSE (17) ont été calculées avec Mathematica, tandis que les estimées du MAP (13a) et du MMSE (15) ont été simulées avec Matlab, qui ne peut calculer la fonction de Whittaker $W_{\kappa, \lambda}(z)$ pour $N \geq 110$. En conséquence, la comparaison entre les valeurs théorique et empirique de la MMSE sont disponibles seulement pour $N \leq 64$, où elles coïncident parfaitement, ce qui valide (17). On voit bien sur la figure 1 qu'à grand nombre d'observations, les estimateurs MAP et MMSE sont efficaces, dans le sens de la définition 1. De plus, comme attendu, lorsque N diminue et que l'information *a priori* prédomine, les estimées du MAP et du MMSE tendent vers la variance *a priori* ($\sigma_\theta = 0.5/\sqrt{7}$), et

la BCRBa et la BCRBc tendent vers une valeur commune.

4 Conclusion

Il a été montré dans [1] que les bornes « classiques » de la FWW admettent une forme alternative plus précise, mais le gain en précision potentiel n'avait pas encore pu être illustré. En s'intéressant à la BCRBa, nous avons pu revenir sur la notion d'efficacité pour des estimateurs bayésiens, et l'appliquer dans un cas concret, mettant ainsi en évidence son gain en précision et sa pertinence. La BCRBa pourrait donc avoir un intérêt dans tous les problèmes d'estimation bayésienne où la BCRBc n'est pas atteinte asymptotiquement.

Références

- [1] E. Chaumette and C. Fritsche. A general class of Bayesian lower bounds tighter than the Weiss-Weinstein family. In *Proc. of International Conference on Information Fusion (FUSION)*, pages 1–7, Cambridge, UK, July 2018.
- [2] E. Chaumette, A. Renaux, and M. N. El Korso. A class of Weiss-Weinstein bounds and its relationship with the Bobrovsky-Mayer-Wolf-Zakai bounds. *IEEE Transactions on Information Theory*, 63(4) :1538–1553, Apr. 2017.
- [3] J. J. Gart. An extension of the cramér-rao inequality. *Annals of Mathematical Statistics*, 30(2) :367–380, June 1959.
- [4] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, London, UK, 5 edition, Jan. 1994.
- [5] A. Renaux, P. Forster, P. Larzabal, C. D. Richmond, and A. Nehorai. A fresh look at the Bayesian bounds of the Weiss-Weinstein family. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(11) :5334–5352, Nov. 2008.
- [6] M. P. Schützenberger. À propos de l'inégalité de Fréchet-Cramér. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 7(3) :3–6, 1958.
- [7] K. Todros and J. Tabrikian. General classes of performance lower bounds for parameter estimation - part II : Bayesian bounds. *IEEE Transactions on Information Theory*, 56(10) :5064–5082, Oct. 2010.
- [8] H. L. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory*, volume 1. John Wiley & Sons, New-York, NY, USA, 1968.
- [9] H. L. Van Trees and K. L. Bell, editors. *Bayesian Bounds for Parameter Estimation and Nonlinear Filtering/Tracking*. Wiley/IEEE Press, New-York, NY, USA, Sept. 2007.
- [10] E. Weinstein and A. J. Weiss. A general class of lower bounds in parameter estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 34(2) :338–342, Mar. 1988.
- [11] J. Ziv and M. Zakai. Some lower bounds on signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 15(3) :386–391, May 1969.