

Approche de type message passing pour la localisation de source en milieu fluctuant

Guillaume BEAUMONT^{1*}, Ronan FABLET², Angélique DREMEAU¹

¹ENSTA Bretagne, Lab-STICC UMR 6285, CNRS, 2 Rue François Verny, 29200 BREST

²IMT Atlantique, Lab-STICC UMR 6285, CNRS, 655 Avenue du Technopôle, 29280 PLOUZANE

*guillaume.beaumont@ensta-bretagne.org

Résumé – En acoustique sous-marine, la propagation d’une onde peut être fortement perturbée par les fluctuations du milieu de propagation. En pratique, les mesures de phase d’un champ de pression sont hautement corrompues et de ce fait peuvent mettre en échec les algorithmes d’estimation de direction d’arrivée (DOA). Dans ces travaux, nous proposons de prendre en compte et d’exploiter la nature de ce bruit de phase dans un formalisme bayésien. Ceci, associé à un a priori parcimonieux sur le nombre de DOA à estimer, nous permet alors de concevoir un algorithme d’estimation basé sur un algorithme de type Message-Passing, baptisé “paSAMP” (pour Phase-aware Swept Approximate Message Passing). Les résultats sur données simulées montrent que paSAMP, à partir d’un unique échantillon, parvient à surpasser les approches conventionnelles d’estimation des DOA ainsi que d’autres approches bayésiennes au regard notamment de sa robustesse au bruit additif.

Abstract – In underwater acoustics, the propagation of a wave can be impacted by fluctuations of the propagation medium. In particular, phase measurement of the pressure field can be highly corrupted and this noise can defeat conventional direction-of-arrival (DOA) estimators. In this work, we propose a Bayesian approach to address this informative phase noise on the measurements. This consideration, combined with a sparse prior over the number of expected DOA are integrated into a message-passing algorithm referred to as “paSAMP” (for Phase aware Swept Approximate Message Passing). Results on experimental data demonstrate that paSAMP is better achieving DOA estimation than conventional DOA estimator and other bayesian approaches regarding robustness to additive noise.

1 Introduction

Commune à différentes applications (SONAR, RADAR, télécommunications...), l’estimation de directions d’arrivée (DOA) a pour objectif de localiser des sources émettant dans un milieu de propagation donné. Différentes méthodes ont été proposées pour répondre à cette problématique, elles se distinguent essentiellement par les a priori qu’elles posent sur la nature du milieu de propagation et/ou des signaux sources. Parmi ces dernières, la formation de voies [1] est sans doute la plus populaire. Reposant sur une hypothèse de gaussiannité du bruit additif polluant la mesure, l’approche propose une estimation par pseudo-inversion de la matrice de mesure. Simple, elle est cependant très sensible au dispositif de mesure et peut souffrir d’une très faible résolution d’estimation. Pour répondre à cette limitation, d’autres méthodes dites de “haute-résolution” font appel à des a priori supplémentaires. L’algorithme MUSIC [2] par exemple repose sur la connaissance du nombre de directions d’arrivée et sur une hypothèse de séparabilité des sous-espaces bruit et signal. Plus récemment, la méthode “compressive” beamforming proposée dans [3] tire parti d’un modèle parcimonieux explicitement posé sur les sources.

Les contributions mentionnées ci-dessus supposent que les mesures ne sont corrompues que par un bruit additif. Cependant, lorsque les ondes traversent des milieux très fluctuants,

comme dans le cas de la propagation acoustique aérienne [4] ou sous-marine [5, 6], ce modèle ne décrit plus avec précision la physique sous-jacente au processus de propagation. Dans de tels cas, un bruit de phase multiplicatif corrompt généralement le signal collecté, ce qui rend le problème d’estimation DOA assez difficile. Ce cas d’étude a donné lieu notamment au développement d’approches dites “incohérentes”. Ces approches considèrent la phase des mesures comme non-informatives et se rapportent, à cet égard, aux méthodes plus générales de reconstruction de phase (cf. [7, 8, 9]). En se montrant “aveugles” aux phases des signaux incidents, ces approches présentent une robustesse intéressante aux bruits de phase. En revanche, elles se privent d’une information qui - bien que bruitée - mérite d’être exploitée. Cette observation est à la base de l’algorithme variationnel bayésien “paVBEM” [10]. L’approche exploite une approximation de champ moyen pour estimer les DOA issues de mesures bruitées par un bruit de phase supposé markovien le long du dispositif de capteurs. Nos travaux ¹se placent dans la continuité de cette contribution. : nous proposons ici d’exploiter une autre approche variationnelle bayésienne, basée sur une approximation de Bethe et un algorithme par propagation de message, arguant que cette approximation permet une estimation plus fine et donc présente de meilleures performances que l’approximation de champ moyen.

1. Les auteurs remercient la DGA MRIS pour son soutien.

2 Modélisation du problème

Dans ce paragraphe, nous présentons une formalisation bayésienne du problème d'estimation de DOA permettant de prendre en compte des statistiques physiques de bruit de phase.

2.1 Modèle d'observation

Nous considérons une antenne linéaire composée de N capteurs régulièrement espacés et supposons que le signal reçu sur le n -ième capteur peut s'exprimer comme $y_n = e^{j\theta_n} \sum_{m=1}^M d_{nm}x_m + \omega_n$, où θ_n est un bruit de phase dû à la propagation dans le milieu fluctuant et ω_n un bruit additif plus classiquement considéré comme attaché au dispositif de mesure. Le scalaire d_{nm} est le n -ième élément du vecteur contenant les directions d'arrivée $\mathbf{d}_m = [e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \Delta \sin(\phi_m)} \dots e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \Delta N \sin(\phi_m)}]^T$ où ϕ_m sont les directions, Δ la distance inter-capteurs et λ la longueur d'onde du signal.

Ainsi, pour chaque capteur, le champ mesuré est une combinaison d'ondes arrivant selon différents ϕ_m . Le problème d'estimation DOA consiste alors à identifier les coefficients non nuls du vecteur $x \triangleq [x_1 \dots x_M]^T$. En acoustique sous-marine, le bruit de phase est adapté à la caractérisation de perturbations de phase de front d'onde dans un océan fluctuant, particulièrement dans le régime dit "partiellement saturé" [5, 6]. Ce régime décrit la propagation en champ lointain à haute fréquence sans trajets multiples. Notons qu'un régime de fluctuation similaire a également été identifié en acoustique aérienne [4].

2.2 Formulation bayésienne du problème

Pour résoudre le problème d'estimation de \mathbf{x} à partir des mesures \mathbf{y} en présence des bruits $\boldsymbol{\omega} \triangleq [\omega_1, \dots, \omega_N]^T$ et $\boldsymbol{\theta} \triangleq [\theta_1, \dots, \theta_N]^T$, nous considérons un cadre bayésien et posons des modèles a priori sur les variables d'intérêt du modèle.

Une première hypothèse est posée sur le nombre de DOA (*i.e.*, le nombre de coefficients non nuls dans \mathbf{x}) que l'on suppose faible au regard du nombre de capteurs. Pour modéliser cet a priori, nous adoptons une loi bernoulli-gaussienne : $\forall m \in \{1, \dots, M\}$

$$p(x_m) = \rho \mathcal{CN}(x_m; m_x, \sigma_x^2) + (1 - \rho) \delta_0(x_m), \quad (1)$$

où ρ est le paramètre de Bernoulli, $\mathcal{CN}(x_m; m_x, \sigma_x^2)$ représente une distribution gaussienne complexe de moyenne m_x et variance σ_x^2 , enfin $\delta_0(x_m)$ est la distribution de Dirac.

Un second a priori est posé sur le bruit de phase multiplicatif. En acoustique sous-marine, les travaux [5, 6] ont mis en évidence l'existence d'une corrélation spatiale du champ mesuré le long de l'antenne. Pour en tenir compte, nous faisons le choix d'un modèle de Markov, dans la lignée de la précédente contribution [10] : $\forall n \in \{2, \dots, N\}$

$$p(\theta_n | \theta_{n-1}) = \mathcal{N}(\theta_n; \theta_{n-1}, \sigma_\theta^2) \text{ et } p(\theta_1) = \mathcal{N}(\theta_1; 0, \sigma_1^2). \quad (2)$$

La variance σ_θ^2 est une grandeur relative à la "longueur de cohérence" du milieu de propagation, liée à la force des fluctuations.

Ainsi, un σ_θ^2 élevé signifiera d'importantes fluctuations du milieu de propagation. Le modèle (2) peut s'écrire sous la forme d'une distribution gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance notée Σ_θ dans la suite du papier.

Enfin, le bruit additif $\boldsymbol{\omega}$ est supposé blanc gaussien complexe de variance σ^2 .

Ces modèles a priori posés, nous formulons notre problème d'estimation du vecteur \mathbf{x} sous forme d'un problème de minimisation de l'erreur quadratique moyenne (MMSE) : $\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}$ où $p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \int_{\boldsymbol{\theta}} p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta}$.

Pour résoudre efficacement ce problème, nous proposons d'exploiter une stratégie d'inférence bayésienne variationnelle, cherchant à approcher la distribution jointe postérieure $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ par une distribution ayant une factorisation appropriée. Dans [10], une approximation de champ moyen $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = q(\boldsymbol{\theta}) \prod_{m=1}^M q(x_m)$ était exploitée. Ici nous nous penchons sur une autre factorisation, appelée approximation de Bethe, à l'origine des algorithmes de type "Approximate Message Passing" (AMP). Cette approximation atteint de meilleures performances d'estimation que les algorithmes basés champ moyen, notamment dans le cadre de l'acquisition compressée [11].

3 L'algorithme "paSAMP"

Dans cette section, nous justifions et présentons l'algorithme "paSAMP" que nous proposons pour résoudre le problème MMSE ci-dessus.

3.1 Motivations et principes

Les algorithmes AMP sont considérés depuis quelques années comme une solution sérieuse aux problèmes linéaires sous contrainte de parcimonie. D'abord envisagés dans le cas de matrices de mesures gaussiennes *i.i.d.*, ils ont été étendus récemment à des matrices aléatoires plus générales, par l'algorithme VAMP [12] et à des matrices hautement corrélées par la méthode SwAMP [13]. Les deux méthodes visent à atténuer les problèmes de convergence de AMP (notamment mis en évidence dans [14]).

AMP, VAMP et SwAMP ont été étendus à des modèles d'observation non-linéaires, mais conservant l'hypothèse d'indépendance des mesures. Ils ont ainsi été appliqués avec succès au problème de reconstruction de phase, donnant naissance aux algorithmes "prGAMP" [15], "prVAMP" [9] et "prSAMP" [8]. Ce dernier s'est en particulier révélé plus performant que les autres algorithmes de l'état de l'art, dont l'approximation de champ moyen [7]. prSAMP constitue ainsi une approche prometteuse pour notre problème d'estimation DOA². Il convient cependant d'adapter cette méthode à un bruit $\boldsymbol{\theta}$ informatif et corrélé comme (2) au sein d'un algorithme "informé" en phase.

2. Notons que la présence d'un dictionnaire d'ondes planes implique un dictionnaire fortement corrélé.

3.2 Extension de prSAMP

Les algorithmes AMP sont basés sur la propagation de deux types de messages : les messages “sortants” et les messages “entrants” depuis et vers les nœuds de variables $\{x_m\}_{m=\{1\dots M\}}$. Ces messages sont décrits ici pour les distributions a priori (1) et (2). Nous nous concentrons d’abord sur les messages “sortant”.

Posant $z_n \triangleq \sum_{m=1}^M d_{nm}x_m$, on admet que les z_n suivent des distributions gaussiennes de paramètres μ_{z_n} et Σ_{z_n} . Marginalisant sur θ_n et recourant à une identification avec une distribution de Von Mises³, on peut écrire les moments de la distribution a posteriori comme :

$$\begin{aligned} E_{z_n|Y} &= \frac{\Sigma_{z_n}}{\sigma^2 + \Sigma_{z_n}} \mathbf{R}_0 \left(\frac{1}{\Sigma_{z_n}^z} \right) y_n e^{-j\mu_{\theta_n}^z} + \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \Sigma_{z_n}} \mu_{z_n}, \\ \text{var}_{z_n|Y} &= \frac{|\Sigma_{z_n} y_n e^{-j\mu_{\theta_n}^z} + \mu_{z_n} \sigma^2|^2}{|\sigma^2 + \Sigma_{z_n}|^2} \mathbf{R}_0 \left(\frac{1}{\Sigma_{z_n}^z} \right) \\ &\quad + \frac{\Sigma_{z_n} \sigma^2}{\sigma^2 + \Sigma_{z_n}} - E_{z_n|Y}^2, \end{aligned} \quad (3)$$

où

$$\frac{1}{\Sigma_{z_n}^z} = \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\Sigma_{\theta_n}}, \quad \mu_{\theta_n}^z = -\Sigma_{\theta_n}^z \frac{\arg(y_n^* \mu_{z_n})}{\alpha_n}, \quad \alpha_n = \frac{\Sigma_{z_n} + \sigma^2}{|y_n| |\mu_{z_n}|},$$

Σ_{θ_n} est le n ième élément de la diagonale de Σ_{θ} et $\mathbf{R}_0(\cdot) = \frac{I_1(\cdot)}{I_0(\cdot)}$ avec $I_n(\cdot)$ fonction de Bessel de type 1 à l’ordre n . Nous renvoyons le lecteur à notre rapport technique [16] qui détaille les dérivations des calculs.

Les messages entrants portent l’information a posteriori sur les x_m . Le cas bernoulli-gaussien (1) est maintenant classique en AMP (cf. [17, 13]). Comme pour les messages sortants, les moments des messages entrants font appel à des paramètres intermédiaires μ_{x_m} et Σ_{x_m} relatives aux variables x_m :

$$E_{x_m|Y} = \frac{\rho \sqrt{2\pi\nu^2}}{Z_{nor}} e^{-\frac{|m_x - \mu_{x_m}|^2}{2(\sigma^2 + \Sigma_{x_m})}} \gamma, \quad (4)$$

$$\text{var}_{x_m|Y} = \frac{\rho \sqrt{2\pi\nu^2}}{Z_{nor}} e^{-\frac{|m_x - \mu_{x_m}|^2}{2(\sigma^2 + \Sigma_{x_m})}} |\gamma^2 + \nu^2| - E_{x_m|Y}^2 \quad (5)$$

où

$$Z_{nor} = \rho \sqrt{2\pi\nu^2} e^{-\frac{|m_x - \mu_{x_m}|^2}{2(\sigma^2 + \Sigma_{x_m})}} + (1 - \rho) e^{-\frac{|\mu_{x_m}|^2}{2\Sigma_{x_m}}}, \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{\sigma^2 \mu_{x_m} + \Sigma_{x_m} m_x}{\Sigma_{x_m} + \sigma^2}, \quad \nu^2 = \frac{\sigma^2 \Sigma_{x_m}}{\Sigma_{x_m} + \sigma^2}. \quad (7)$$

Extension directe de l’algorithme prSAMP, l’algorithme paSAMP conserve la structure décrite dans [8, 13]. Par souci de clarté, nous avons cependant fait le choix d’utiliser les notations introduites dans [15] à l’exception du scalaire d_{nm} . A cet égard, les dérivations mathématiques ci-dessus sont prises en compte comme nouvelles définitions des quantités $g_{out,n}$, $g'_{out,n}$, $g_{in,m}$ et $g'_{in,m}$ (cf. pseudo-code **Algorithm 1**).

Enfin, à l’instar de [10], nous insérons une estimation de la variance du bruit additif σ^2 selon une étape de maximisation d’un algorithme Expectation-Maximization (EM). En raison du manque d’espace, nous omettons ici la dérivation du calcul, mais renvoyons à nouveau le lecteur à notre rapport [16].

Algorithm 1 paSAMP Algorithm

Input : $\mathbf{y}, \mathbf{D}, \sigma^2, \rho, \sigma_x^2, \boldsymbol{\mu}_{\theta}, \Sigma_{\theta}, T_{max}$
Define :
 $g_{out,n} \triangleq \frac{1}{\Sigma_{z_n}} (E_{z_n|Y,P} \{z_n | y_n, \mu_{z_n}, \Sigma_{z_n}\} - \mu_{z_n})$
 $g'_{out,n} \triangleq \frac{1}{\Sigma_{z_n}} (\text{var}_{z_n|Y,P} \{z_n | y_n, \mu_{z_n}, \Sigma_{z_n}\} - 1)$
 $g_{in,m} \triangleq E_{x_m|Y} \{x_m | \mu_{x_m}, \Sigma_{x_m}\}$
 $g'_{in,m} \triangleq \text{var}_{x_m|Y} \{x_m | \mu_{x_m}, \Sigma_{x_m}\}$
1: **while** $t < T_{max}$ **do**
2: **for** $n = 1 \dots N$ **do**
3: $\hat{z}_n(t) = \sum_{m=1}^M d_{nm} a_m(t)$
4: $\Sigma_{z_n}^1(t+1) = \sum_{m=1}^M |d_{nm}|^2 v_m(t)$
5: $\mu_{z_n}^1(t+1) = \hat{z}_n(t) - \Sigma_{z_n}^1(t) g_{out,n}$
6: **end for**
7: **for** $m = \text{permute}[1 \dots M]$ **do**
8: $\Sigma_{x_m}(t+1) = (-\sum_{n=1}^N |d_{nm}|^2 g'_{out,n})^{-1}$
9: $\mu_{x_m}(t+1) = a_m(t) + \Sigma_{x_m}(t+1) \sum_{n=1}^N d_{nm} g_{out,n}$
10: $v_m(t+1) = \Sigma_{x_m}(t+1) g'_{in,m}$
11: $a_m(t+1) = g_{in,m}$
12: **for** $n = 1 \dots N$ **do**
13: $\Sigma_{z_n}^{m+1}(t+1) =$
 $\Sigma_{z_n}^m(t+1) + |d_{nm}|^2 (v_m(t+1) - v_m(t))$
14: $\mu_{z_n}^{m+1}(t+1) =$
 $\mu_{z_n}^m(t+1) + d_{nm} (a_m(t+1) - a_m(t))$
 $- g_{out,n}(t) (\Sigma_{z_n}^{m+1}(t+1) - \Sigma_{z_n}^m(t+1))$
15: **end for**
16: estimer σ^2 selon [10]
17: **end for**
18: **end while**
19: **Output :** $\{\hat{x}_m = a_m(T_{max})\}_m$

4 Expériences

Dans cette section, nous proposons une évaluation quantitative de l’approche proposée sur données simulées.

On considère le problème de l’identification des directions d’arrivée de $K = 2$ ondes planes à partir d’une antenne composée de $N = 256$ capteurs. On suppose que les angles des K ondes incidentes peuvent s’écrire $\phi_k = -\frac{\pi}{2} + i_k \frac{\pi}{50}$ avec $i_k \in [1, 50]$. Un dictionnaire discret de $M = 50$ ondes planes est défini à partir de l’ensemble d’angles $\{\phi_i = -\pi + i \frac{\pi}{50}\}_{i \in \{1, \dots, 50\}}$ et du choix du paramètre $\Delta/\lambda = 1/4$. Pour chacune des K ondes incidentes, le coefficient x_{i_k} est initialisé par $m_x = 0.5 + j0.5$, $\rho = K/M$ et $\sigma_x^2 = 0.1$.

Le critère d’évaluation considéré est la corrélation normalisée entre le vecteur vrai \mathbf{x} et son estimée $\hat{\mathbf{x}}$, $\frac{|\mathbf{x}^H \hat{\mathbf{x}}|}{\|\mathbf{x}\| \|\hat{\mathbf{x}}\|}$, au regard du bruit additif σ^2 . Cette quantité est moyennée sur 100 essais. Les figures 1(a), (b) et (c) présentent les performances des algorithmes pour trois configurations différentes de bruit de phase : $\sigma_{\theta}^2 = 0.03$, $\sigma_{\theta}^2 = 0.1$ et $\sigma^2 = 0.3$. Dans les trois cas, on pose $\sigma_0^2 = 10$. Cela correspond à des situations dans laquelle nous avons une forte incertitude sur la valeur initiale mais une corrélation spatiale existe, plus ou moins forte.

Dans les trois configurations considérés, paSAMP présente un comportement satisfaisant en surpassant les autres algorithmes. Sans surprise, la formation de voies classique atteint les plus mauvaises performances suivie par prSAMP, qui se prive de toute information sur la phase. On constate par ailleurs que l’écart entre paSAMP et paVBEM s’amenuise dès lors que

3. Nous justifions et développons ce point dans le rapport technique [16].

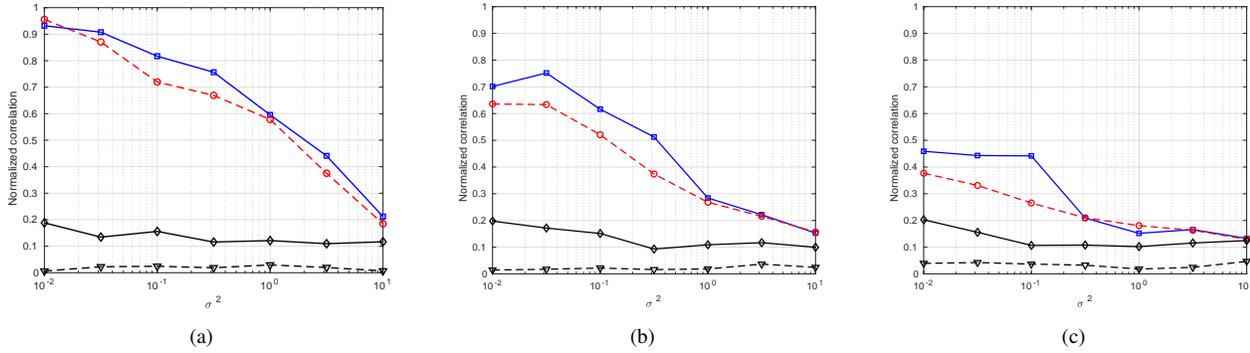


FIGURE 1 – Comparaison des performances de *i*) la formation de voies classique [1] (triangles noirs), *ii*) l’algorithme prSAMP [8] basé sur une procédure AMP mais exploitant un a priori uniforme sur le bruit de phase (diamants noirs), *iii*) l’algorithme paVBEM [10] qui exploite les mêmes a priori (1)-(2) mais selon une approximation de champ moyen (cercles rouges) et *iv*) l’algorithme paSAMP (carrés bleus). Corrélation normalisée en fonction de la variance du bruit additif σ^2 pour resp. $\sigma_\theta^2 = 0.03$, $\sigma_\theta^2 = 0.1$ et $\sigma_\theta^2 = 0.3$.

le bruit additif σ^2 augmente, en revanche paSAMP semble plus robuste au bruit de phase avec une diminution relativement moindre de ses performances lorsque σ_θ^2 augmente, jusqu’à se rapprocher significativement de celles de prSAMP⁴.

5 Conclusion

Nous avons présenté ici un nouvel algorithme basé sur une procédure AMP capable d’effectuer une estimation de DOA dans un environnement impliquant un bruit de phase structuré. Cette approche exploite à la fois un priori parcimonieux sur les sources et un priori markovien sur le bruit de phase. Comparée à des algorithmes de l’état de l’art, l’approche présente un bon comportement illustrant l’intégration réussie des différentes hypothèses. En particulier, il offre de meilleures performances qu’un algorithme récent traitant du même problème d’estimation de DOA dans des environnements fluctuants.

Références

- [1] D. H. Johnson and D. E. Dudgeon, *Array Signal Processing : Concepts and Techniques*, Prentice-Hall signal processing series. P T R Prentice Hall, 1993.
- [2] R. Schmidt, “Multiple emitter location and signal parameter estimation,” *IEEE Trans. on antennas and propagation*, vol. 34, no. 3, pp. 276–280, 1986.
- [3] A. Xenaki, P. Gerstoft, and K. Mosegaard, “Compressive beamforming,” *JASA*, vol. 136, no. 1, pp. 260–271, 2014.
- [4] L. Ehrhardt, S. Cheinet, D. Juvé, and P. Blanc-Benon, “Evaluating a linearized Euler equations model for strong turbulence effects on sound propagation,” *JASA*, vol. 133, no. 1961, pp. 1922–33, 2013.
- [5] R. Dashen, S. M. Flatté, W. H. Munk, K. M. Watson, and F. Zachariassen, *Sound transmission through a fluctuating ocean*, Cambridge University Press, 2010.
- [6] J. A. Colosi, *Sound Propagation through the Stochastic Ocean.*, Cambridge University Press, 2016.
- [7] A. Drémeau and F. Krzakala, “Phase recovery from a Bayesian point of view : The variational approach,” *Proc. of ICASSP*, vol. 2015-Augus, no. 4, pp. 3661–3665, 2015.
- [8] B. Rajaei, E. W. Tramel, S. Gigan, F. Krzakala, and L. Daudet, “Intensity-only optical compressive imaging using a multiply scattering material and a double phase retrieval approach,” *Proc. of ICASSP*, vol. 2016-May, pp. 4054–4058, 2016.
- [9] C. A. Metzler, R. G. Baraniuk, and O. Cossairt, “Coherent Inverse Scattering via Transmission Matrices : Efficient Phase Retrieval Algorithms and a Public Dataset,” in *IEEE Int’l Conf. on Computational Photography*, 2017.
- [10] A. Drémeau and C. Herzet, “DOA estimation in structured phase-noisy environments : technical report,” *arXiv :1609.03503*, 2016.
- [11] F. Krzakala, A. Manoel, E.W. Tramel, and L. Zdeborova, “Variational free energies for compressed sensing,” in *Proc. of ISIT*, June 2014, pp. 1499–1503.
- [12] P. Schniter, S. Rangan, and A. K. Fletcher, “Vector Approximate Message Passing for the Generalized Linear Model,” in *Proc. of Asilomar*, 2016, pp. 1525–1529.
- [13] A. Manoel, F. Krzakala, E. Tramel, and L. Zdeborová, “Swept approximate message passing for sparse estimation,” in *Proc. of ICML*, 2015, pp. 1123–1132.
- [14] F. Caltagirone, F. Krzakala, and L. Zdeborová, “On convergence of approximate message passing,” *Proc. of ISIT*, vol. 0, 2014.
- [15] P. Schniter and S. Rangan, “Compressive phase retrieval via generalized approximate message passing,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 63, no. 4, pp. 1043–1055, 2015.
- [16] G. Beaumont, R. Fablet, and A. Drémeau, “DOA estimation in fluctuating environments : an approximate message-passing approach,” Rapport technique, hal-01624855, 2019.
- [17] J. Vila and P. Schniter, “Expectation-maximization bernoulli-gaussian approximate message passing,” in *Proc. of ASILOMAR*, 2011, pp. 799–803.

4. Nous renvoyons le lecteur à notre rapport technique [16] pour d’autres configurations de simulations.