

# Sur l'utilisation de la relaxation semidéfinie en lien montant pour la formation de voies hybride avec bloqueurs

Mohammed Reda BEKKAR<sup>1,2</sup>, Laurent ROS<sup>2</sup>, Cyrille SICLET<sup>2</sup>, Benoit MISCOPEIN<sup>1</sup>, Serge BORIES<sup>1</sup>

<sup>1</sup>CEA-LETI, Minatec campus, Grenoble, France

<sup>2</sup>Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP\*, GIPSA-lab, 38000 Grenoble, France

\* Institute of Engineering Univ. Grenoble Alpes

mohammed-reda.bekkar@cea.fr

**Résumé** – L'un des principaux obstacles à l'existence d'un réseau dense de petites cellules (PC) est le faible rapport signal-sur-interférence-plus-bruit (RSIB). Notamment dans les systèmes utilisant un duplexage à division temporelle (DDT) non coordonnés dans les bandes sous-6GHz. Pour contourner ce problème, des systèmes de formation de voies (FV) sont nécessaires. Une FV entièrement numérique (EN) est sensible à la présence de forts brouilleurs (bloqueurs) à cause de la dynamique limitée des convertisseurs analogique-numérique (CANs). En revanche, une FV hybride (FVH) impliquant des étages analogiques et numériques permet la réjection des interférences par filtrage spatial avant quantification, et nécessite moins de chaînes radiofréquences (RF). Dans le cas d'un réglage uniquement des phases (poids à module constant) dans l'étage analogique le problème d'optimisation du RSIB devient non-convexe. Dans cet article on propose une approche de relaxation au problème de FVH en optimisant les phases uniquement, ceci permet un calcul abordable de la solution en utilisant un algorithme du point intérieur. On évalue les performances en termes de somme-capacité en incluant un modèle de bruit de quantification du CAN, ce qui démontre l'efficacité de l'approche, en comparaison à un algorithme de l'état de l'art.

**Abstract** – One of the main obstacles to the existence of a dense network of small cells is the low signal to interference plus noise ratio (SINR), especially in systems using uncoordinated time division duplexing in the sub-6GHz bands. To overcome this problem, beamforming (BF) systems are required. A full digital BF is sensitive in the presence of strong jammers (blockers) due to the limited dynamics of analog-to-digital converters (ADCs). In contrast, a hybrid BF (HBF) involving analog and digital stages allows interference rejection by spatial filtering before quantification, and requires fewer radio frequency (RF) channels. In the case of a phase-only tuning (constant modulus weights) on the analog stage, the problem of optimizing the SINR becomes non-convex. In this paper we propose a relaxation approach to the HBF problem by optimizing the phases only, this allows an affordable calculation of the solution using an interior point algorithm. The performance in terms of sum-capacity is assessed by including an ADC quantization noise model, showing the efficiency of the approach.

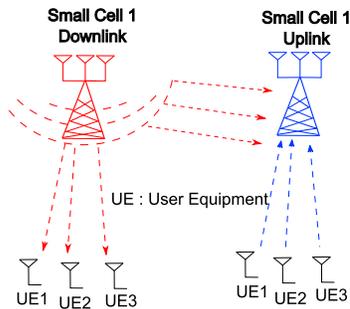


FIGURE 1 – Scénario d'interférence typique entre deux PCs.

## 1 Introduction

La demande en capacité dans les réseaux sans fil ne cesse d'augmenter depuis l'apparition des services de téléphonie sans fil. Pour la cinquième génération (5G) on prévoit la multiplication de celle-ci par un facteur 1000 en comparaison avec l'actuelle génération des réseaux cellulaires. Afin de faire face à cette demande, la densification des réseaux mobiles en utilisant des PC à faible couverture sont en cours de déploiement. Malheureusement, la coordination entre cellules et les stratégies

de réutilisation des fréquences deviennent énormément complexes avec la densification. Ainsi, afin d'assurer une qualité de service acceptable, des stratégies de gestion d'interférences sont nécessaires. Ceci peut être réalisé par l'utilisation de systèmes de traitement multi-antennes sur la couche physique. Ces systèmes, en plus d'une gestion de l'interférence, permettent l'utilisation des mêmes ressources temps-fréquence grâce au degré de liberté spatial additionnel. Un scénario typique d'interférence entre PC est représenté sur la fig. 1 où la cellule opérant en lien descendant interfère avec la cellule opérant en lien montant.

Le problème de FV pour les PC a été considéré dans la littérature avec différentes complexités de circuiterie RF [1]. Dans [2], Sohrabi et Yu traitent le problème de FV en émission et à la réception en maximisant la somme-capacité avec une contrainte d'utilisation de déphaseurs seuls (c.-à-d. sans amplificateurs ni atténuateurs) dans un scénario point-à-point. Ils indiquent que le problème se réduit à un problème de FV qui maximise la somme-capacité avec une contrainte de puissance par antenne tel que traité dans [3]. Wiesel et al. [4] traitent le problème de conception d'une FV à l'émission (précodage)

dans un scénario multi-utilisateurs en lien descendant avec un critère de zero-forcing et des contraintes de puissance par antenne. Dans cet article nous considérons une architecture à déphaseurs seuls de complexité complète [1], c.-à-d. chaque chaîne RF reçoit à son entrée une combinaison linéaire des signaux arrivant sur toutes les antennes. L'utilisation de déphaseurs seuls permet de réduire la complexité, le coût et la consommation de l'étage analogique. Notre contribution consiste à traiter le problème de FVH en maximisant le RSIB à la réception avec des contraintes de phases uniquement dans un scénario multi-utilisateurs en lien montant. Contrairement à [2, 3, 4], nous introduisons un modèle de CAN qui permet de faire ressortir l'attrait de la FVH en comparaison à la FV EN. Nous comparons notre solution avec une solution de l'état de l'art de Zhang et al à convergence locale [5]. Dans un travail précédent [6] nous avons analysé les pertes en RSIB en présence de bloqueurs pour des approches sous-optimales. Ce travail propose l'utilisation de la relaxation semidéfinie (RSD) afin de convertir un problème non-convexe en un problème de programmation semidéfinie (PSD), le rendant facilement résoluble par des outils d'optimisation classiques. Nous évaluons les performances des solutions en termes de borne inférieure sur la somme-capacité obtenue. Les résultats sont obtenus sous hypothèse d'une connaissance parfaite de l'état du canal à la réception.

Le modèle est présenté en section 2. Les simulations sont présentées dans la section 3 et la conclusion en section 4. Les caractères gras majuscules et gras minuscules désignent des matrices et des vecteurs colonnes respectivement. La  $i$ ème colonne d'une matrice  $\mathbf{M}$  est notée  $\mathbf{m}_i$ . La matrice identité de taille  $N \times N$  est notée  $\mathbf{I}_N$ .  $(\cdot)^H$ ,  $(\cdot)^{-1}$  désignent les opérateurs hermitiens et d'inversion de matrice.

## 2 Système et modèle

Considérons une PC avec  $n_r$  antennes recevant un signal  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n_r}$  composé de la superposition de  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n_u}$  le signal de  $n_u$  utilisateurs mono-antennes,  $\mathbf{x}_b \in \mathbb{C}^{n_b}$  le signal de  $n_b$  bloqueurs et  $\mathbf{n}$  le bruit thermique  $\mathcal{CN}(0, \sigma_n^2)$ . Le signal des utilisateurs et des bloqueurs subissent respectivement les canaux  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{n_r \times n_u}$  et  $\mathbf{H}_b \in \mathbb{C}^{n_r \times n_b}$ . Sans perte de généralité on suppose que les utilisateurs émettent une puissance unité, i.e.  $\mathbb{E}[|x_k|^2] = 1$ , et que pour les bloqueurs  $\mathbb{E}[|x_{bk}|^2] = P_{bk}$ . On définit les matrices de covariance des utilisateurs, des bloqueurs et du bruit thermique respectivement comme  $\mathbf{R} = \mathbf{H}\mathbf{H}^H$ ,  $\mathbf{R}_b = \mathbf{H}_b \text{diag}\{P_{b1} \dots P_{bn_b}\} \mathbf{H}_b^H$  et  $\mathbf{R}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ . Le traitement de l'étage analogique est représenté par la matrice  $\mathbf{A} \in \mathcal{CM}^{n_{RF}}$  où  $n_{RF}$  est le nombre de chaînes RF. Sa sortie  $\mathbf{y}_a = \mathbf{A}^H \mathbf{y}$  est numérisée par les CANs. Cette dernière opération peut être modélisée par une fonction  $\mathcal{Q}(\cdot)$  qui agit comme un quantificateur scalaire sur chaque élément de  $\mathbf{y}_a$  et sur chaque partie réelle et imaginaire indépendamment. Enfin, l'étape de traitement numérique est modélisée par une matrice

$\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n_{RF} \times n_u}$ . Ces étapes sont résumées comme suit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{H}_b\mathbf{x}_b + \mathbf{n} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{A}^H \mathbf{y} \quad (2)$$

$$\mathbf{y}_q = \mathcal{Q}(\mathbf{y}_a) \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{D}^H \mathbf{y}_q \quad (4)$$

### 2.1 Construction de la matrice de FV analogique

Dans cette section on cherche d'abord à construire la matrice  $\mathbf{A}$  colonne par colonne en allouant une chaîne RF par utilisateur de façon disjointe, i.e.  $n_u = n_{RF}$ . Pour chaque utilisateur on optimise le RSIB en considérant les signaux des autres utilisateurs comme de l'interférence.

#### 2.1.1 Formulation du problème d'optimisation

Pour l'utilisateur  $u$  on réécrit le modèle et le problème de maximisation du RSIB comme :

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}_u x_u + \sum_{k=1, k \neq u}^{n_u} \mathbf{h}_k x_k + \mathbf{H}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{n} \quad (5)$$

$$(P1) : \underset{\mathbf{a}_u}{\text{maximiser}} \quad \text{RSIB}_u = \frac{\mathbf{a}_u^H \mathbf{R}_u \mathbf{a}_u}{\mathbf{a}_u^H (\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_n) \mathbf{a}_u} \quad (6)$$

Avec  $\mathbf{R}_u$  et  $\mathbf{R}_i$  les matrices de covariance associées à l'utilisateur désiré  $u$  et aux interférents respectivement :

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{h}_u \mathbf{h}_u^H \quad (7)$$

$$\mathbf{R}_i = \sum_{k=1, k \neq u}^{n_u} \mathbf{h}_k \mathbf{h}_k^H + \mathbf{R}_b \quad (8)$$

Sans contrainte d'utilisation de phases uniquement, la solution de (6) est connue comme étant le filtre de Capon généralisé [7]. Le RSIB atteint est égal à la valeur propre maximale de  $(\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_n)^{-1} \mathbf{R}_u$  et la solution coïncide avec le vecteur propre associé. Toutefois si on souhaite trouver la même solution sous contrainte de déphaseurs seuls :

$$(P2) : \underset{\mathbf{a}_u}{\text{maximiser}} \quad \frac{\mathbf{a}_u^H \mathbf{R}_u \mathbf{a}_u}{\mathbf{a}_u^H (\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_n) \mathbf{a}_u} \quad (9)$$

$$\text{sous contrainte} \quad \mathbf{a}_u \in \mathcal{MC} \quad (10)$$

où  $\mathcal{MC} = \{\mathbf{a}_u \in \mathbb{C}^{n_r} \mid |a_k| = |a_1| \quad \forall k = 2 \dots n_r\}$ , l'ensemble des vecteurs à module constant, le problème devient non-convexe du fait de la non-convexité de l'ensemble  $\mathcal{MC}$  et que le calcul de la solution est NP-Difficile.

#### 2.1.2 Relaxation semidéfinie

Afin de résoudre le problème de maximisation du RSIB tout en gardant la contrainte de phases uniquement (10) on propose une approche de relaxation vers un problème de PSD. Pour cela on reformule le problème en un problème de minimisation de forme quadratique en posant  $\mathbf{R}_y = \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_i$  :

$$(P3) : \underset{\mathbf{a}_u}{\text{minimiser}} \quad \mathbf{a}_u^H \mathbf{R}_y \mathbf{a}_u \quad (11)$$

$$\text{sous contrainte} \quad \mathbf{a}_u^H \mathbf{h}_u = 1 \quad (12)$$

$$\mathbf{a}_u \in \mathcal{MC} \quad (13)$$

Nous utilisons ensuite les identités suivantes :

$$\mathbf{a}_u^H \mathbf{R}_y \mathbf{a}_u = \text{Tr}(\mathbf{a}_u^H \mathbf{R}_y \mathbf{a}_u) = \text{Tr}(\mathbf{R}_y \mathbf{a}_u \mathbf{a}_u^H) \quad (14)$$

$$\mathbf{a}_u^H \mathbf{R}_u \mathbf{a}_u = \text{Tr}(\mathbf{a}_u^H \mathbf{R}_u \mathbf{a}_u) = \text{Tr}(\mathbf{R}_u \mathbf{a}_u \mathbf{a}_u^H) \quad (15)$$

En posant  $\mathbf{W}_u = \mathbf{a}_u \mathbf{a}_u^H$ , une matrice hermitienne semidéfinie positive de rang 1, on reformule le problème en :

$$(P4) : \underset{\mathbf{W}_u}{\text{minimiser}} \quad \text{Tr}(\mathbf{R}_y \mathbf{W}_u) \quad (16)$$

$$\text{sous contrainte} \quad \text{Tr}(\mathbf{R}_u \mathbf{W}_u) = 1 \quad (17)$$

$$W_{kk} = W_{11} \quad \forall k = 2 \dots n_r \quad (18)$$

$$\mathbf{W}_u \succeq 0 \quad (19)$$

$$\text{rang}(\mathbf{W}_u) = 1 \quad (20)$$

On remarque qu'en comparant les problèmes (P3) et (P4) la contrainte (12) se transforme en (17) et la contrainte non-convexe (13) se transforme en trois contraintes (18,19,20). Dans ces dernières seulement (20) est non-convexe. On propose donc de relaxer (P4) de la contrainte (20) ce qui revient à :

$$(P5) : \underset{\mathbf{W}_u}{\text{minimiser}} \quad \text{Tr}(\mathbf{R}_y \mathbf{W}_u) \quad (21)$$

$$\text{sous contrainte} \quad \text{Tr}(\mathbf{R}_u \mathbf{W}_u) = 1 \quad (22)$$

$$W_{kk} = W_{11} \quad \forall k = 2 \dots n_r \quad (23)$$

$$\mathbf{W}_u \succeq 0 \quad (24)$$

Ce dernier est un problème de PSD résoluble par un algorithme de point intérieur avec la toolbox MATLAB CVX, par exemple. Une fois une solution  $\mathbf{W}_{opt}$  au problème (P5) trouvée, on doit la convertir en solution faisable pour le problème (P3) i.e. extraire un vecteur  $\mathbf{a}_u$  de la matrice  $\mathbf{W}_{opt}$ . Plusieurs méthodes existent pour extraire une solution faisable [8], cette étape est cruciale et est sujette à une perte d'optimalité si les solutions des deux problèmes ne sont pas identiques (autrement on aurait résolu un problème NP-Difficile en un temps polynomial). Néanmoins pour certain problèmes bien structurés, il n'y a pas de perte d'optimalité, notamment si  $\text{rang}(\mathbf{W}_{opt}) = 1$ . Ceci implique qu'il n'y ait qu'une seule dimension sur laquelle on peut extraire un vecteur  $\mathbf{a}_u$ . Dans notre cas on le prendra égal au vecteur propre associé à la valeur propre non-nulle de  $\mathbf{W}_{opt}$ . À noter que dans nos simulation, tout comme dans [9], on observe que le rang de  $\mathbf{W}_{opt}$  est toujours égal à un, sans disposer d'une preuve mathématique. Le RSIB atteint par cette heuristique n'est toutefois, pas nécessairement égal au RSIB atteint par le filtre de Capon généralisé, sans contraintes de déphaseurs seuls. Dans un cadre plus général où le rang ne serait pas égal à 1 plusieurs approches sont proposées dans [8].

## 2.2 Somme-capacité, modèle de CAN et construction de la matrice de FV numérique

L'étape de numérisation étant non-linéaire, on fait des hypothèses qui permettent d'obtenir une expression calculable de la somme-capacité. Les sorties des CANs peuvent être explicitées en utilisant un modèle de bruit de quantification additif (MBQA)[10] :

$$\mathbf{y}_q = (1 - \rho)\mathbf{y}_a + \mathbf{n}_q \quad (25)$$

où on introduit le facteur de distorsion  $\rho$  et le vecteur des bruits additifs de quantification  $\mathbf{n}_q$ . En supposant une distribution gaussienne pour tous les signaux des utilisateurs et des bloqueurs et un quantificateur de Max-Lloyd (quantificateur non-uniforme optimal) le facteur de distorsion peut être approximé pour un nombre de bits  $b \geq 3$  avec la formule de Panter-Dite [11, 12] :

$$\rho \approx \frac{\pi\sqrt{3}}{2} 2^{-2b} \quad (26)$$

ce qui nous permet d'approximer les matrices de covariance selon :

$$\mathbf{R}_{y_q} \approx (1 - \rho)((1 - \rho)\mathbf{R}_{y_a} + \rho \text{diag}(\mathbf{R}_{y_a})) \quad (27)$$

$$\mathbf{R}_{n_q} = \mathbf{R}_{y_q} - (1 - \rho)^2 \mathbf{R}_{y_a} \quad (28)$$

Une fois que l'on dispose de ces matrices et de la matrice de formation de voies analogique on peut calculer la matrice de formation de voies de Capon de l'étage numérique :

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}_{y_q}^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{H} \quad (29)$$

La distribution du bruit de quantification étant inconnue, il n'est possible d'avoir ni son entropie ni par conséquent la somme-capacité du système. Néanmoins en faisant l'hypothèse d'une distribution du pire cas i.e. distribution gaussienne, on obtient une borne inférieure sur la somme capacité en utilisant le résultat connu de la capacité MIMO [13] :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{D}^H \left( (1 - \rho)(\mathbf{A}^H (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{H}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{n})) + \mathbf{n}_q \right) \quad (30)$$

$$= \mathbf{H}_{tot} \mathbf{x} + \mathbf{n}_{tot} \quad (31)$$

$$\mathbf{R}_{n_{tot}} = (1 - \rho)^2 (\mathbf{A}^H \mathbf{R}_y \mathbf{A}) + \mathbf{D}^H \mathbf{R}_{n_q} \mathbf{D} \quad (32)$$

$$C = \log_2 \det(\mathbf{I} + \mathbf{R}_{n_{tot}}^{-1} \mathbf{H}_{tot} \mathbf{H}_{tot}^H) \quad (33)$$

## 3 Résultats de simulation

Dans cette section on présente les résultats de simulations. On compare les systèmes FVH et FV-EN. Pour les systèmes FVH on considère deux algorithmes de construction de l'étage analogique, l'approche de relaxation présentée en section 2.1.2 et une approche à convergence locale de l'état de l'art [5]. Les deux algorithmes ont pour critère d'arrêt un nombre d'itérations égal à 100 ou une progression en RSIB inférieure à  $10^{-6}$ . À titre de référence, on trace aussi les performances d'un système hybride sans contrainte de déphaseurs seuls dont les étages analogique et numérique sont construits à l'aide du FV de Capon. Les simulations ont été réalisées pour la configuration  $n_r = 16$ ,  $n_u = 8$ ,  $n_b = 1$ ,  $P_b \in [0, 60]\text{dB}^1$  et  $b \in \{4, 8, 12\}$  bits et moyennées sur 200 tirages de canaux. Les matrices de canal sont générées suivant un modèle de réseau linéaire uniforme (RLU) mono-trajet, i.e. leurs colonnes s'écrivent comme  $h[1, e^{-j2\pi d \sin(\theta)} \dots e^{-j(n_r-1)2\pi d \sin(\theta)}]^T$  avec la distance inter-élément  $d = 0.5$ , le fading  $h \sim \mathcal{CN}(0, 1)$  et l'angle d'arrivée  $\theta$  suivant une loi uniforme dans  $[-90^\circ, 90^\circ]$ .

Dans la fig. 2a, on observe une claire dégradation des performances du système EN, à cause de l'introduction du bruit de

1. Par rapport à la puissance des utilisateurs fixée à 1.

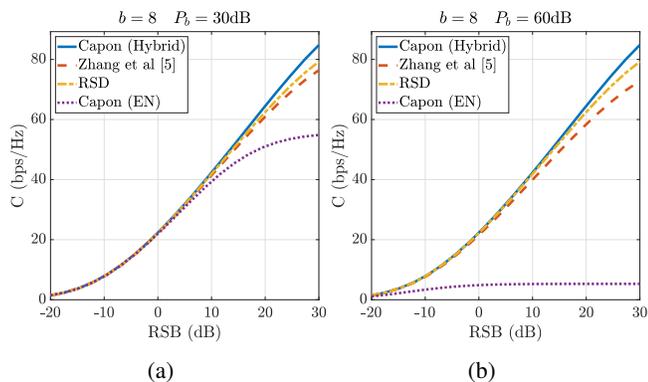


FIGURE 2 – Borne inférieure sur la somme-capacité de différents systèmes de FV en fonction du RSB.

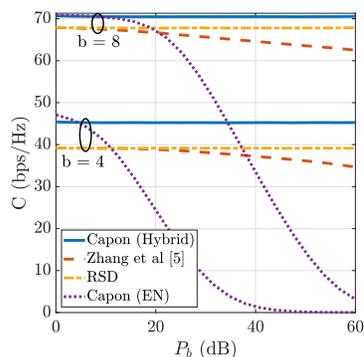


FIGURE 3 – Borne inférieure sur la somme-capacité de différents systèmes de FV en fonction de la puissance du bloqueur.

quantification non-négligeable. L'utilisation d'un filtrage spatial analogique est donc nécessaire afin d'éviter une capacité très faible. En revanche les systèmes hybrides gardent une performance proche de l'optimum avec un léger avantage pour l'algorithme RSD à fort RSB.

Dans la fig.3 on trace les performances pour un RSB = 20 dB en fonction de la puissance du bloqueur pour deux valeurs de  $b = 4$  et  $8$  bits. On remarque ici aussi une claire diminution des performances du système EN, aggravé par le passage de  $b = 8$  à  $4$  bits. Le système de référence Capon et l'algorithme RSD ne dépendent pas de la puissance du bloqueur à cause du positionnement de zéro parfait. La perte entre les deux vient du fait que la restriction des poids à de simples déphaseurs ne permet pas d'apodiser le diagramme de rayonnement, ce qui mène à des pertes via le phénomène de gain en bruit blanc [14]. Comparativement l'approche à convergence locale de [5] implique un alignement imparfait du zéro et donc une sensibilité au niveau du bloqueur.

## 4 Conclusion

Dans cet article on a traité le problème de FV à base déphaseurs seuls pour des PC dans un scénario dense à DDT. On a évalué les performances de plusieurs systèmes en terme de somme-capacité en tenant compte de la présence des CANs. On a utilisé une approche de relaxation pour convertir le pro-

blème non-convexe de maximisation du RSIB en un problème convexe résoluble avec des algorithmes conventionnels de point intérieur. On a montré l'avantage de la FVH dans la présence de forts bloqueurs par rapport à la FV EN. Contrairement à une solution de l'état de l'art à convergence locale, l'approche proposée a une convergence assurée due à la convexité du problème et une insensibilité à la puissance du bloqueur.

## Références

- [1] A. F. Molisch, V. V. Ratnam, S. Han, Z. Li, S. L. H. Nguyen, L. Li, and K. Haneda, "Hybrid Beamforming for Massive MIMO : A Survey," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 55, no. 9, 2017.
- [2] F. Sofrabi and W. Yu, "Hybrid digital and analog beamforming design for large-scale MIMO systems," in *ICASSP*, 2015.
- [3] Z. Pi, "Optimal transmitter beamforming with per-antenna power constraints," in *IEEE Int. Conf. Commun.*, 2012.
- [4] A. Wiesel, Y. C. Eldar, and S. Shamai, "Zero-Forcing Precoding and Generalized Inverses," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 9, 2008.
- [5] X. Zhang, M. Coldrey, T. Eriksson, and M. Viberg, "Hybrid beamforming in uplink massive MIMO systems in the presence of blockers," in *ICASSP*, 2017.
- [6] M. R. Bekkar, B. Miscopein, S. Bories, L. Ros, and C. Siclet, "Constant modulus hybrid beamforming for multi-user systems in the presence of blockers," in *Int. Conf. Telecommun.*, 2018.
- [7] "A generalized capon estimator for localization of multiple spread sources," vol. 52.
- [8] Z. q. Luo, W. k. Ma, A. M. c. So, Y. Ye, and S. Zhang, "Semidefinite Relaxation of Quadratic Optimization Problems," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 27, no. 3, 2010.
- [9] C. Lu, W. Sheng, Y. Han, and X. Ma, "Robust adaptive phase-only beamforming algorithm for interference suppression," *Int. J. of Adaptive Control and Signal Process.*, vol. 29, no. 9, 2015.
- [10] A. Mezghani and J. A. Nossek, "Capacity lower bound of MIMO channels with output quantization and correlated noise," in *Int. Symp. Inform. Theory*, 2012.
- [11] P. F. Panter and W. Dite, "Quantization distortion in pulse-count modulation with nonuniform spacing of levels," *IRE*, vol. 39, no. 1, 1951.
- [12] "Source Coding : Part I of Fundamentals of Source and Video Coding," vol. 4, no. 1-2.
- [13] A. Goldsmith, S. A. Jafar, N. Jindal, and S. Vishwanath, "Capacity limits of MIMO channels," *IEEE J. Sel. Areas in Commun.*, vol. 21, no. 5, 2003.
- [14] S. M. Kogon, "Eigenvectors, diagonal loading and white noise gain constraints for robust adaptive beamforming," in *Asilomar Conf. Signal. Systems Computers*, vol. 2, 2003.