

Cartographie d'impédance par inversion d'un code d'électromagnétisme 3D surfacique

Julien BOISSY¹⁻², Pierre MINVIELLE¹, Muriel SESQUES¹, Jean-François GIOVANNELLI²

¹CEA, CESTA, DAM, 15 Avenue des Sablières, 33114 Le Barp, France

²IMS (Univ. Bordeaux, CNRS, BINP), 351 Cours de la Libération, 33400 Talence, France

Julien.Boissy@cea.fr, Pierre.Minvielle@cea.fr, Muriel.Sesques@cea.fr,
Giova@IMS-Bordeaux.fr

Résumé – Cet article est dédié au problème de la reconstruction d'impédance surfacique d'un objet tridimensionnel. Il se base sur la mesure de coefficients de rétrodiffusion par un radar monostatique. Il s'agit d'un problème qui nécessite la résolution coûteuse des équations de Maxwell. Dans un premier temps on présente comment, en s'appuyant sur la linéarisation des équations de Maxwell sous forme intégrale au sein d'un code de calcul d'électromagnétisme 3D, il est possible de se ramener à un modèle direct. Puis, on propose deux méthodes de reconstruction fondées sur la minimisation de critères pénalisés convexes ; elles sont validées sur des données simulées.

Abstract – This article is dedicated to the problem of reconstructing the surface impedance of a three-dimensional object. It is based on the measurement of backscattering coefficients by a monostatic radar. This problem requires the costly resolution of Maxwell's equations. First we present how it is possible to reduce it to a direct model, based on the linearization of Maxwell's equations in integral form within a 3D electromagnetism numerical code. Then, two reconstruction methods are proposed based on the minimization of convex penalized criteria ; they are validated on simulated data.

1 Introduction

La reconstruction de propriétés matériaux est un enjeu majeur dans de nombreux domaines (imagerie médicale, acoustique, *etc.*). Dans ce contexte, on souhaite remonter aux propriétés électromagnétiques d'un objet sous la forme d'impédance surfacique en exploitant des mesures de coefficients de rétrodiffusion. Pour cela, on s'appuie sur un code d'électromagnétisme 3D résolvant les équations de Maxwell par la méthode des « équations intégrales ». Cependant le problème est en grande dimension, le calcul direct est alors coûteux en temps de calcul. Dans une première partie, on montre comment il est possible de s'appuyer sur un modèle direct linéarisé que l'on désire inverser [1, 2]. Pour autant, le nombre d'inconnues est grandement supérieur au nombre de données observées. Il existe donc une infinité de solutions vérifiant le système. Pour surmonter cette difficulté, on développe dans une seconde partie des méthodes de reconstruction fondées sur les moindres carrés avec pénalités quadratique et Huber [1, 2].

2 Problématique

Le problème revient à déterminer, à partir de mesures de Surface Équivalente Radar (SER) monostatique, émetteur et récepteur co-localisés, les propriétés électromagnétiques locales des matériaux recouvrant un objet de géométrie connue. Le principe de mesure de SER est le suivant : l'objet d'intérêt est placé à l'intérieur d'une chambre anéchoïque (recouverte d'ab-

sorbants radar) où les échos parasites sont réduits. L'illumination en champ lointain (CL) est produite par un radar émettant une onde monochromatique. À la réception, diverses techniques (calibration, substitution de l'objet, filtrage, *etc.*) sont appliquées pour conduire à la mesure calibrée de SER. Finalement, on mesure les coefficients de rétrodiffusion complexes $\{\sigma_1, \dots, \sigma_K\}$ quantifiant l'atténuation de l'onde rétrodiffusée ainsi que son déphasage, pour les conditions d'observation $\{\Psi_1, \dots, \Psi_K\}$ illustrées sur la figure 1. Elles correspondent à différentes directions d'illumination de la cible et à différentes polarisations du champ électromagnétique, HH (horizontale) ou VV (verticale), à l'émission et à la réception.

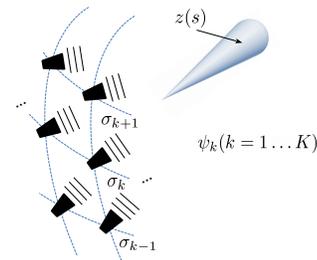


FIGURE 1: Scénario d'observation.

On modélise l'empilement de matériaux par une impédance surfacique sous les *conditions de Leontovich* [3]. Cette approximation n'est valide que si les matériaux recouvrant l'objet sont d'indices suffisamment élevés. L'objectif est de déterminer l'im-

impédance $z(s)$, quantité complexe à la surface de l'objet, à partir des coefficients de rétrodiffusion observés.

3 Modèle direct

3.1 Code Maxwell 3D

À impédance de surface donnée, on sait calculer les coefficients de rétrodiffusion σ_k à l'aide du code ARLENE, développé au CEA-DAM. Fondé sur la résolution du système de Maxwell sous forme intégrale en régime harmonique, ce code d'électromagnétisme 3D permet de traiter des assemblages de matériaux diélectriques et de conducteurs, et tient compte des invariances géométriques. Ce code massivement parallèle exploite efficacement plusieurs milliers de cœurs du supercalculateur TERA1000 [4]. Les équations intégrales sont résolues par une méthode d'éléments finis de surface sous forme standard de Raviart-Thomas [5]. Lorsque l'empilement de matériaux est modélisé par une impédance surfacique [3], la formulation variationnelle associée à la résolution des équations de Maxwell sous forme intégrale est symétrique, mais non hermitienne [6]. On note $z \in \mathbb{C}^L$ l'impédance discrétisée à la surface de l'objet, L étant le nombre de mailles, et $\mathbf{x}_k \in \mathbb{C}^N$ les flux des courants électriques et magnétiques à travers les arêtes du maillage 3D. À fréquence f fixée et direction Ψ_k donnée, le système discret qui en résulte se met sous la forme :

$$\mathbf{A}(z)\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k \quad (1)$$

où $\mathbf{A}(z) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ est la matrice du système qui dépend de z , et \mathbf{b}_k le second membre fonction de la direction d'éclairiment Ψ_k . Pour $\mathbf{x}_k(z)$ solution de (1), on a directement l'intégrale du rayonnement : $\sigma_k = \mathbf{x}_k^t(z)\mathbf{c}$, où \mathbf{c} est l'opérateur d'observation en réception. Considérant toutes les directions, le système s'écrit :

$$\mathbf{A}(z)\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (2)$$

avec $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K]$ et $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_K]$. Pour $\mathbf{X}(z)$ solution de (2), on obtient alors la relation non-linéaire $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h}(z) = \mathbf{X}(z)^t \mathbf{c}$. La matrice $\mathbf{A}(z)$ est pleine et la taille du système croît de façon quadratique avec la fréquence. L'emploi d'un solveur direct de type Cholesky est privilégié par rapport à un solveur itératif en raison du grand nombre de seconds membres, ainsi que pour des raisons de précision dû au mauvais conditionnement de la matrice $\mathbf{A}(z)$.

Remarque : Lorsque le problème atteint des centaines de milliers d'inconnues, l'emploi d'un solveur direct devient irréaliste car il exige des ressources mémoire en $O(N^2)$ et un nombre d'opérations en $O(N^3)$. On utilise alors la méthode des H-matrices [4], conduisant à un stockage compact ou compressé de la matrice initiale. Ainsi, le coût d'une factorisation de Cholesky d'une H-matrice est en $O(N \log_2(N))$ contre $O(N^3)$ pour une matrice dense.

3.2 Linéarisation intrusive

On considère l'approximation d'ordre 1 autour d'une impédance de surface z_0 : $\mathbf{h}(z) \approx \mathbf{h}(z_0) + \mathbf{H}(z - z_0)$. On a :

$\mathbf{h}(z_0) = \mathbf{X}(z_0)^t \mathbf{c}$, avec $\mathbf{X}(z_0)$ solution du système linéaire $\mathbf{A}(z_0)\mathbf{X}(z_0) = \mathbf{B}$, et \mathbf{H} la matrice jacobienne en z_0 :

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} \right|_{z=z_0}^t \mathbf{c}$$

Par dérivation de (2) relativement à la l -ième composante de z , on obtient :

$$\mathbf{A}(z) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z_l} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_l} \mathbf{X}(z) = 0, \text{ avec } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_l} \triangleq \left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial z_l} \right]_{i,j=1 \dots N}$$

En z_0 , on a donc le système linéaire :

$$\mathbf{A}(z_0) \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z_l} \right|_{z=z_0} = - \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_l} \right|_{z=z_0} \mathbf{X}(z_0) \quad (3)$$

Ainsi, en plus de la résolution standard qui forme $\mathbf{A}(z_0)$ et détermine $\mathbf{X}(z_0)$ puis $\boldsymbol{\sigma}_0$, pour obtenir \mathbf{H} il faut résoudre les L systèmes supplémentaires (3) qui diffèrent par leurs seconds membres. On exploite alors le fait que l'impédance intervient dans la formulation variationnelle [6] uniquement sous la forme d'une intégrale simple du type $\int_S z J \cdot J' + z^{-1} M \cdot M' ds$, où les courants électriques J et magnétiques M à la surface de l'objet sont les inconnues directes du système de Maxwell tandis que J' et M' sont les fonctions tests de la méthode de Galerkin pour la résolution. La dérivation de la matrice \mathbf{A} par rapport à l'impédance conduit ainsi à des matrices $\partial \mathbf{A} / \partial z_k$ très creuses, qui sont stockées de façon optimisée pour effectuer efficacement les produits matrices vecteurs.

Finalement, on obtient le modèle direct linéarisé bruité suivant :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{H}(z - z_0) + \boldsymbol{\epsilon} \quad (4)$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est un terme d'erreur d'approximation et de mesure. En posant $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{H}z_0$, le modèle devient :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{H}z + \boldsymbol{\epsilon} \quad (5)$$

4 Reconstruction

Dans le but de fournir une solution, on pose le critère des moindres carrés, $J_{LS}(z)$, qui s'appuie sur le modèle direct (5) :

$$J_{LS}(z) = \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{H}z\|_2^2 \quad (6)$$

Le système est sous-déterminé, il n'existe donc pas de solution unique minimisant le critère. Afin d'orienter la reconstruction en tenant compte des informations disponibles sur l'objet, on introduit une pénalisation $P(z)$. On note μ le paramètre pondérant le terme d'attache aux données (6) et la pénalité. Le critère devient :

$$J_{PLS}(z) = J_{LS}(z) + \mu P(z) \quad (7)$$

et la solution :

$$\hat{z}_{PLS} = \arg \min_z J_{PLS}(z) \quad (8)$$

On considère deux cas. Le premier où l'impédance est régulière sur l'ensemble de la surface et le second où elle est régulière par parties. Pour inclure ces informations, on pénalise le gradient de l'impédance sur la surface :

$$P(z) = \sum_{p \sim q} \varphi(\delta_{pq}) \quad \text{avec } \delta_{pq} = \frac{z_p - z_q}{d_{pq}}$$

et φ un potentiel que l'on définit par la suite. On note d_{pq} la distance entre les barycentres des mailles p et q ($p \sim q$ signifie que les mailles p et q sont voisines). De plus, on note δ le vecteur des δ_{pq} et il peut s'exprimer : $\delta = \mathbf{D}\mathbf{z}$, avec \mathbf{D} la matrice des différences pondérées :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \dots & -1/d_{pq} & \dots & 1/d_{pq} & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

Par la suite, on s'intéresse aux pénalités quadratique et Huber. On note φ_Q, φ_H et J_Q, J_H les potentiels et critères correspondant, ainsi que $\hat{\mathbf{z}}_Q$ et $\hat{\mathbf{z}}_H$ les solutions associées.

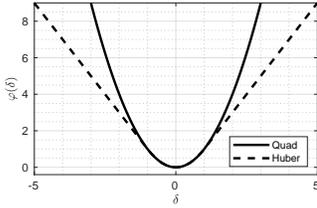


FIGURE 2: Fonctions de pénalité Quadratique et Huber.

4.1 Cas lisse et pénalité quadratique

Afin de favoriser des solutions homogènes et régulières sur l'ensemble la surface, on choisit le potentiel quadratique $\varphi_Q(\delta) = |\delta|^2$, voir la figure 2. La minimisation du critère mène à la solution classique :

$$\hat{\mathbf{z}}_Q = (\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} + \mu \mathbf{D}^\dagger \mathbf{D})^{-1} \mathbf{H}^\dagger \tilde{\sigma} \quad (9)$$

4.2 Cas lisse par parties et pénalité Huber

On cherche à favoriser des solutions régulières, mais également à préserver des discontinuités. De plus, on souhaite que le critère soit convexe afin de s'assurer de l'existence et de l'unicité de la solution et de permettre l'exploitation des nombreuses méthodes de minimisation disponibles. Pour cela, on choisit le potentiel de Huber [2] appartenant à la famille des potentiels L2/L1 (*hyperbole, log cosinus hyperbolique, etc.*), voir la figure 2 :

$$\varphi_H(\delta) = \begin{cases} |\delta|^2 & |\delta| \leq T \\ 2T|\delta| - T^2 & |\delta| \geq T \end{cases} \quad (10)$$

Afin de minimiser le nouveau critère, on choisit de s'appuyer sur des algorithmes semi-quadratiques, dont la particularité consiste en l'introduction de variables auxiliaires, notées \mathbf{a} . En effet, ces algorithmes permettent de passer du problème de minimisation d'un critère non-quadratique, $J_{PLS}(\mathbf{z})$, à la minimisation d'un critère augmenté $J_{SQ}(\mathbf{z}, \mathbf{a})$, tel que :

$$J_H(\mathbf{z}) = \inf_{\mathbf{a}} J_{SQ}(\mathbf{z}, \mathbf{a})$$

où $J_{SQ}(\mathbf{z}, \mathbf{a})$ est quadratique selon \mathbf{z} et $\arg \min_{\mathbf{a}} J_{SQ}(\mathbf{z}, \mathbf{a})$ est séparable et explicite. Le critère augmenté s'écrit [2] :

$$J_{SQ}(\mathbf{z}, \mathbf{a}) = \|\tilde{\sigma} - \mathbf{H}\mathbf{z}\|_2^2 + \mu' \left[\frac{1}{2} \|\mathbf{D}\mathbf{z} - \mathbf{a}\|_2^2 + \sum_{p \sim q} \zeta_\alpha(a_{pq}) \right]$$

avec $\zeta_\alpha(a) = \sup_{\delta} [\alpha \varphi_H(\delta) - \frac{1}{2} |\delta - a|^2]$ et $\mu' = \mu/\alpha$, $\alpha \in]0, 1/2[$. La minimisation selon \mathbf{z} pour un \mathbf{a} fixé conduit à :

$$\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{a}) = (\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} + \bar{\mu} \mathbf{D}^\dagger \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{H}^\dagger \tilde{\sigma} + \bar{\mu} \mathbf{D}^\dagger \mathbf{a}) \quad (11)$$

où $\bar{\mu} = \mu/2\alpha$. Pour un \mathbf{z} fixé, la minimisation selon \mathbf{a} est explicite et séparable telle que :

$$\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{z}) = \delta - \alpha \varphi'_H(\delta) \quad (12)$$

Le minimiseur $\hat{\mathbf{z}}_H$ est obtenu à convergence d'un algorithme itératif minimisant tour à tour le critère suivant \mathbf{a} et \mathbf{z} .

Algorithme Semi-Quadratique

Début

Initialisation $\mathbf{a}^{[0]} = \mathbf{0}$

Tant que $\|\mathbf{z}^{[n]} - \mathbf{z}^{[n-1]}\| > s$ **faire**

- $\mathbf{z}^{[n]}(\mathbf{a}^{[n-1]}) = \arg \min_{\mathbf{z}} J_{SQ}(\mathbf{z}, \mathbf{a}^{[n-1]})$, Eq. (11)

- $\mathbf{a}^{[n]}(\mathbf{z}^{[n]}) = \arg \min_{\mathbf{a}} J_{SQ}(\mathbf{z}^{[n]}, \mathbf{a})$, Eq. (12)

Fin tant que

Fin

Remarques :

- Le coefficient α permet de régler la vitesse de convergence sans conséquence sur la solution. La convergence est connue pour être plus rapide si $\alpha \rightarrow 1/2$ [2].
- Si $T \rightarrow \infty$, alors la solution $\hat{\mathbf{z}}_H$ coïncide avec $\hat{\mathbf{z}}_Q$.
- Les solutions (9) et (11) sont calculées par résolution des systèmes linéaires correspondant sous Matlab.

5 Résultats

L'objet considéré est un *sphère cône IEEE* [7] de 60 cm de hauteur. Il est illuminé par une onde monochromatique à la fréquence de 1.5 GHz suivant $K = 900$ conditions d'observation définies par la polarisation (HH ou VV), le gisement φ ($0^\circ : 10^\circ : 170^\circ$) et le site θ ($-60^\circ : 5^\circ : 60^\circ$), voir la figure 3.

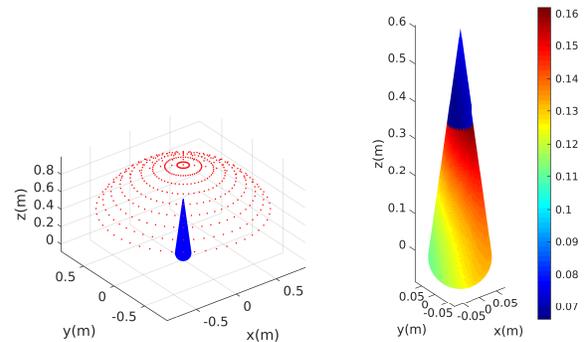


FIGURE 3: Directions d'observation en CL à gauche et carte d'impédance vraie $|z^*|$ à droite.

5.1 Données simulées

Pour simuler les données σ , on considère la surface approchée par un maillage de $L = 7400$ éléments et on prend pour impédance de référence $\mathbf{z}_0 = [0.1, \dots, 0.1]^t$ au centre du domaine d'intérêt. Les impédances considérées sont normalisées

par l'impédance du vide (en Ohms). En exploitant la partie 3.2, on obtient σ_0 et \mathbf{H} utilisés pour la simulation et la reconstruction. On se donne une carte d'impédance vraie z^* lisse par parties, voir la figure 3. Les données sont alors simulées en utilisant le modèle direct (4), où l'on choisit ϵ comme un bruit gaussien complexe circulaire avec un RSB de 20dB entre $\mathbf{H}(z - z_0)$ et ϵ . On représente les données sous forme d'hologrammes en fonction des angles θ et φ sur la figure 4.

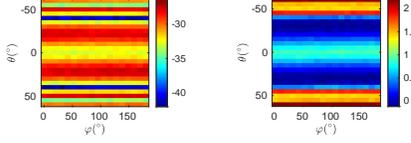


FIGURE 4: Données simulées σ (polarisation HH). Représentation en log du module à gauche et en phase à droite.

5.2 Reconstruction

On représente les reconstructions de z et les cartes d'erreurs absolues sur la figure 5. Dans les deux cas, les hyperparamètres sont réglés manuellement. On prend $\mu = 5.10^{-8}$ pour les deux reconstructions et $T = 0.3$ pour le cas Huber. La solution avec pénalité quadratique \hat{z}_Q fournit une reconstruction régulière sur la totalité de l'objet, respectant le niveau moyen ainsi que les zones de fortes et faibles valeurs d'impédances. Cependant, comme attendu pour cette solution, la discontinuité est mal reconstruite. Cela est dû au choix de l'hyperparamètre μ . Plus il est grand et plus la solution est lisse et inversement, plus il est petit et plus la solution est chahutée. Le potentiel quadratique pénalisant de manière équivalente l'ensemble des différences, il en résulte une incompatibilité entre la valeur du μ permettant une reconstruction de qualité des zones lisses et celle autorisant la reconstruction d'une discontinuité. Pour dépasser cette limitation, on privilégie alors la solution \hat{z}_H fondée sur le potentiel de Huber, voir la figure 5, qui accorde un degré de liberté supplémentaire en autorisant les fortes variations en faible nombre au-dessus d'un seuil T . La solution obtenue est de qualité, non seulement les niveaux d'impédance sont respectés, mais la discontinuité est plus correctement reconstruite.

6 Conclusion et perspectives

La reconstruction de l'impédance surfacique repose sur la linéarisation des équations Maxwell sous forme intégrale au sein d'un code d'électromagnétisme 3D surfacique, ainsi que sur la mise en œuvre de méthodes de régularisation fondées sur les pénalités quadratique et Huber. Les résultats obtenus sont satisfaisants pour des cas lisses et lisses par morceaux. Pour autant, afin de reconstruire au mieux les discontinuités, on envisage des potentiels type L2/L0 [2] malgré le fait que la non-convexité et la non-différentiabilité de ces potentiels amènent à un problème d'optimisation difficile. De plus, on envisage le réglage des hyperparamètres de manière non supervisée au moyen de méthodes bayésiennes.

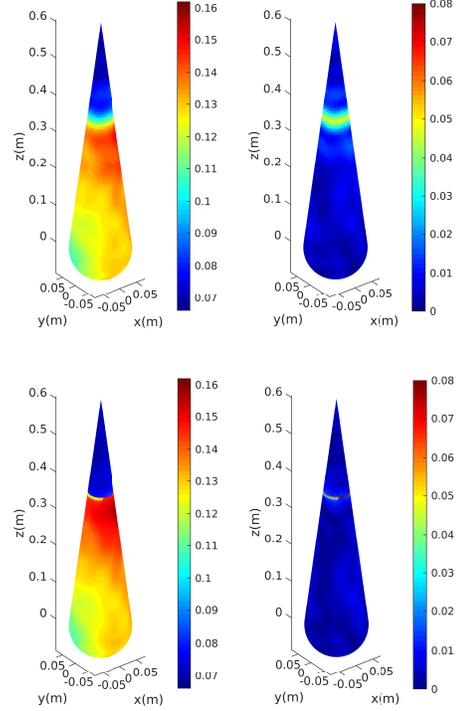


FIGURE 5: Reconstruction $|\hat{z}_Q|$ et carte d'erreur $|\hat{z}_Q - z^*|$ en haut et reconstruction $|\hat{z}_H|$ et carte d'erreur $|\hat{z}_H - z^*|$ en bas.

Références

- [1] A. Mohammad - Djafari. *Problèmes inverses en imagerie et en vision Tome 1 et 2*. IC2 Traité du Signal et Image, Lavoisier, Hermès, Paris, 2009.
- [2] J. Idier. *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*. IC2 Traité du Signal et Image, Lavoisier, Hermès, Paris, 2001.
- [3] S. Tretyakov. *Analytical Modeling in Applied Electromagnetics*. Chapitre 3, Artech house 2003.
- [4] C. Augonnet, A. Pujols, M. Sesques. Fast Direct Solver for Integral Equations on Massively Parallel Architecture, *2015 Antennas and Propagation Society International Symposium*. Vancouver, Canada, Juillet 2015.
- [5] P.-A. Raviart, J.M. Thomas. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems, *Mathematical aspects of finite element methods* Springer, Berlin, pp. 292-315, 1977.
- [6] A. Bendali, M'B. Fares, J. Gay. A Boundary-Element Solution of the Leontovitch problem. *IEEE transaction on Antennas and Propagation*, Volume : 47, Issue : 10, pp 1597-1605, 1999.
- [7] A.C. Woo, H.T.G. Wang, M.J. Schuh, M.L. Sanders. EM programmer's notebook-benchmark radar targets for the validation of computational electromagnetics programs. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Volume : 35, pp 84-89, Février 1993.