

Filtrage p -Laplacien adaptatif et guidé pour le traitement de la couleur associée à des nuages de points 3D

Sébastien BOUGLEUX¹, Olivier LÉZORAY¹, Anass NOURI²

¹Normandie Univ, UNICAEN, ENSICAEN, CNRS, GREYC, 14000 Caen, France

²Vision Lab, Isen Brest, L@bISEN, 29228 Brest Cedex, France

{bouglex,olivier.lezoray}@unicaen.fr, anass.nouri@isen-ouest.yncrea.fr

Résumé – De plus en plus d’applications nécessitent d’éditer la couleur associée aux sommets d’un maillage ou aux points d’un nuage 3D. Dans ce contexte, nous proposons un filtre régularisant sur graphes dirigés qui repose sur la minimisation d’une fonction composée d’un terme d’attache aux données, d’un terme de lissage basé sur une norme p TV spatialement variable, et d’un terme de préservation des structures basé sur l’amplitude du gradient. Les deux derniers termes peuvent être liés aux formulations du p -Laplacien sur graphes dirigés. Cela permet d’imposer différentes formes de traitement sur différentes parties du graphe pour une meilleure qualité de lissage.

Abstract – Editing of 3D colored meshes represents a fundamental component of nowadays computer vision and computer graphics applications. In this paper, we propose a framework based on the p -laplacian on directed graphs for structure-preserving filtering. This relies on a novel objective function composed of a fitting term, a smoothness term with a spatially-variant p TV norm, and a structure-preserving term. The last two terms can be related to formulations of the p -Laplacian on directed graphs. This enables to impose different forms of processing onto different graph areas for better smoothing quality.

1 Introduction

Filtrer des images tout en préservant certaines structures est une tâche importante en édition d’images et en photographie numérique [13, 3, 7, 11, 12]. Pour éditer une image (lissage, abstraction, accentuation), elle est généralement décomposée en une couche contenant les structures principales à préserver et plusieurs couches faisant apparaître progressivement des niveaux de détails de moins en moins importants. Les capteurs 3D à faible coût permettent le développement à grande échelle de la numérisation d’objets 3D. Il est désormais facile d’acquérir des nuages de points ou des maillages 3D où chaque point ou sommet est décrit par sa position 3D et sa couleur RVB. Cependant, la qualité visuelle des données acquises n’est pas toujours suffisante, par exemple pour l’impression 3D. De plus, si les données doivent être utilisées dans des applications de réalité virtuelle ou augmentées, elles doivent souvent être post-traitées pour être visuellement simplifiées. Avec de telles tâches, on s’intéresse au développement de filtres préservant les structures qui fonctionnent sur la couleur associée à des données 3D, comme cela a été proposé en traitement d’images. Peu de travaux considèrent ce problème. Certains filtres de ont été étendus aux maillages ou nuages de points 3D mais la majorité d’entre-eux se focalisent sur l’édition des coordonnées des points 3D pour affiner le maillage. Certains travaux traitent néanmoins de la couleur associée aux données 3D, par exemple par masquage flou [2], ou par l’utilisation de filtres morphologiques pour obtenir une décomposition hiérarchique de l’infor-

mation couleur [9].

Dans le cadre du traitement du signal sur graphes dirigés, nous proposons un filtre régularisant pour traiter la couleur associée à des données 3D. Il est obtenu en minimisant une fonction composée de trois termes (Sec. 3) : un terme d’attache aux données, un terme de régularisation et un terme de préservation des structures. Pour que le filtrage s’adapte localement aux données à filtrer, le terme de régularisation repose sur une norme p TV (p variation totale) où p varie spatialement. Ce terme peut être lié aux formulations du p -Laplacien sur graphes pondérés (Sec. 2), ce qui prolonge nos travaux précédents qui ne considéraient que les deux premiers termes avec une norme p TV fixe [1]. Le terme de préservation des structures permet de préserver l’amplitude du gradient, guidé par un indicateur de structure. Comme illustré par nos expérimentations (Sec. 4), ces termes contribuent à l’amélioration de la qualité du lissage.

2 p -Laplaciens sur graphes pondérés

Nous considérons des données composées de n_v éléments, chacun contenus dans \mathbb{R}^{n_c} , *e.g.*, des points 3D ou des couleurs RVB. Une donnée est représentée par une matrice réelle $F = [f_{i,c}]_{i \in N_v, c \in N_c}$ avec $N_v = \{1, \dots, n_v\}$ et $N_c = \{1, \dots, n_c\}$, $f_{i,c}$ codant la composante c du i -ème élément. Alternative-ment, le i -ème élément peut être représenté par un vecteur $f_i = [f_{i,c}]_{c \in N_c}$. Les éléments sont reliés par des arêtes pour former un graphe utilisé comme domaine pour traiter F . Puisque les

connexions n'ont généralement pas la même importance, un poids est associé à chaque arête, et le graphe peut être représenté par sa matrice d'adjacence sommet-sommet pondérée $W = [w_{i,j}]_{i \in N_v, j \in N_v}$, avec $w_{i,j} \in]0, +\infty[$ si les éléments i et j sont connectés par une arête de i vers j , ou $w_{i,j} = 0$ si ils ne le sont pas. Les graphes sont supposés être sans boucle ($w_{i,i} = 0$) et dirigés ($w_{i,j}$ et $w_{j,i}$ peuvent être différents). Ceci est motivé par la construction de graphes basés sur les k plus proches voisins, qui sont connus pour produire des connexions asymétriques en général, *i.e.*, une arête de i vers j n'a pas nécessairement son arête opposée (de j vers i). De tels graphes sont généralement symétriques, *i.e.*, W est remplacé par $\frac{1}{2}(W + W^T)$, avant traitement des données. Bien que cela soit mathématiquement correct pour la plupart des méthodes basées sur le Laplacien non normalisé $L = \text{diag}((W + W^T)1_{n_v}) - (W + W^T)$ [8], ce n'est pas le cas pour la plupart des opérateurs du second ordre, en particulier les opérateurs non-linéaires comme les p -Laplaciens [14, 1]. Ces opérateurs sont les principaux ingrédients des techniques de filtrage basées sur des principes variationnels, mais peu d'entre-eux ont été considérés pour les graphes dirigés. Nous avons récemment proposé plusieurs formulations du p -Laplacien [1]. Nous décrivons le cas non-normalisé utilisé par le processus de filtrage présenté dans la section suivante.

Le gradient d'une donnée F , sur un graphe pondéré W , peut se définir par $\nabla^W F = (\partial_j^W F)_{j \in N_v}$, avec $\partial_j^W F = [\sqrt{w_{i,j}}(f_{j,c} - f_{i,c})]_{i \in N_v, c \in N_c}$. Le gradient en un sommet i est donc donné par $\nabla_i^W F = [\sqrt{w_{i,j}}(f_{j,c} - f_{i,c})]_{j \in N_v, c \in N_c}$ et son amplitude par

$$|\nabla_i^W F| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_v} w_{i,j} \sum_{c=1}^{n_c} (f_{j,c} - f_{i,c})^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_v} w_{i,j} \|f_j - f_i\|^2}$$

avec $\|f\| = \sqrt{\sum_{c=1}^{n_c} f_c^2}$ et $F_c \in \mathbb{R}^{n_v}$ la restriction de F à la composante c , fournit un outil de base pour mesurer la variation de F en chaque sommet. La régularité de F sur le graphe peut alors être mesurée par la variation totale (p TV) définie par :

$$\|F\|_{p\text{TV}} = \|\nabla^W F\|_1 = \sum_{i=1}^{n_v} |\nabla_i^W F|^p \quad (1)$$

où $p \in [1, +\infty[$ contrôle le degré de régularité, et $|\nabla^W F| = [|\nabla_i^W F|]_{i \in N_v}$. Comme pour les graphes non-dirigés, il est facile de montrer que $\nabla \|F\|_{p\text{TV}} = p L_{p,F} F$ avec

$$L_{p,F} = \text{diag}((W_{p,F} + W_{p,F}^T)1_{n_v}) - (W_{p,F} + W_{p,F}^T) \quad (2)$$

et $W_{p,F} = \text{diag}(|\nabla^W F|^{p-2})W$, *i.e.*,

$$[L_{p,F} F]_{i,c} = \sum_{j=1}^{n_v} \left(\frac{w_{i,j}}{|\nabla_i^W F|^{2-p}} + \frac{w_{j,i}}{|\nabla_j^W F|^{2-p}} \right) (f_{i,c} - f_{j,c})$$

Il définit le p -Laplacien de F sur W . Le Laplacien L est obtenu avec $p = 2$, et pour $p = 1$, $L_{1,F} F$ définit la courbure moyenne de F . Le p -Laplacien est non linéaire, et $L_{p,F}$ est symétrique, positif semi-défini, et peut être vu comme un Laplacien dépendant des données. Il peut se réécrire $L_{p,F} = \text{diag}(\overline{W}_{p,F} 1_{n_v}) - \overline{W}_{p,F}$ avec $\overline{W}_{p,F} = W_{p,F} + W_{p,F}^T$, équivalent à un Laplacien dépendant des données sur un graphe non-dirigé.

La norme p TV et le p -Laplacien dépendent de p . Dans la section suivante, une plus grande flexibilité est proposée en adaptant p aux données, localement en chaque sommet.

3 Filtrage p -Laplacien adaptatif

3.1 Formulation

La méthode proposée consiste à régulariser une donnée $F^0 \in \mathbb{R}^{n_v \times n_c}$ en minimisant une fonction $E(F, F^0) = \lambda_d E_d(F, F^0) + \lambda_s E_s(F, F^0) + \lambda_r E_r(F)$, avec E_d un terme de fidélité, E_r un terme de régularisation, E_s un terme guidant la préservation des structures, et $\lambda_d, \lambda_s, \lambda_r \in [0, +\infty[$ des constantes fixant la contribution de chacun des termes. Ce modèle a été récemment proposé pour filtrer des images [5]. Nous considérons ici un autre terme de régularisation et un autre terme de guidage.

Le terme de fidélité E_d permet de fournir une solution proche de F^0 . Il est mesuré par l'erreur quadratique :

$$E_d(F, F^0) = \|F - F^0\|^2 \quad (3)$$

avec $\|F\| = \sqrt{\text{tr}(F^T F)}$. Les différences locales ($f_{i,c} - f_{i,c}^0$) devraient être nulles, ou faibles, aux sommets inclus dans des parties devant être préservées. Ceci est guidé par le terme E_s . Il mesure une erreur quadratique entre l'amplitude du gradient de F et celle de F^0 , sur le même graphe $S = [s_{i,j}]_{i,j \in N_v}$:

$$E_s(F, F^0) = \frac{1}{2n_s} \sum_{i=1}^{n_v} \alpha_i (|\nabla_i^S F|^2 - |\nabla_i^S F^0|^2)^2 \quad (4)$$

avec $\alpha = [\alpha_i]_{i \in N_v}$, $\alpha_i \in [0, 1]$ le degré de préservation de structure, et $n_s = n_c \sum_{i=1}^{n_v} \alpha_i$ un terme de normalisation. Le terme α se comporte comme un masque qui force plus ou moins la préservation de l'amplitude du gradient de F^0 . Pour s'assurer que les structures dans F^0 soient préservées, il devrait être défini à partir d'un indicateur de structure (Sec. 3.3).

Les différences locales impliquées dans les termes E_d and E_s devraient être plus élevées aux sommets représentant des détails peu importants ou plus généralement des parties devant être lissées. Pour cela, les variations de F^0 sont réduites en ces sommets, relativement à une fonction p TV adaptative :

$$E_r(F) = \sum_{i=1}^{n_v} \frac{1}{p_i} |\nabla_i^W F|^{p_i} \quad (5)$$

où $p_i \in [1, 2]$ fixe le degré de régularité au sommet i et assure la convexité de (5). Intuitivement, il devrait dépendre de F^0 et être inversement proportionnel à α_i , *i.e.*, large aux sommets où les données doivent être lissées et faible où les données doivent être préservées. Notons que les graphes W and S sont différents. En pratique, il est plus cohérent et efficace qu'ils soient structurellement équivalents, *i.e.*, $s_{i,j} = 0 \Leftrightarrow w_{i,j} = 0$.

3.2 Processus de filtrage

Pour optimiser E relativement à F (fonction convexe), le gradient $\nabla E(F) = [\partial E(F)/\partial f_{i,c}]_{i \in N_v, c \in N_c}$ est considéré, ce

qui revient à résoudre le système d'équations $\nabla E(F) = 0$,

$$\nabla E(F) = 2(F - F^0) + \lambda_r L_{r,F} F + \frac{2}{n_s} \lambda_s L_{s,F} F \quad (6)$$

où $L_{r,F}$ et $L_{s,F}$ sont définis ci-dessous. En effet, il est facile de montrer que $\nabla E_d(F) = 2(F - F^0)$ et $\nabla E_r(F) = L_{r,F} F$, avec

$$[L_{r,F} F]_{i,c} = \sum_{j=1}^{n_v} \left(\frac{w_{i,j}}{|\nabla_i^W F|^2 - p_i} + \frac{w_{j,i}}{|\nabla_j^W F|^2 - p_j} \right) (f_{i,c} - f_{j,c})$$

Contrairement au p -Laplacien (Sect. 2), $L_{r,F}$ utilise ici un degré de régularité $p = [p_i]_{i \in N_v}$ en chaque sommet. De même, le gradient de E_s est donné par $\nabla E_s(F) = \frac{2}{n_s} L_{s,F} F$ avec

$$[L_{s,F} F]_{i,c} = \sum_{j=1}^{n_v} (a_i s_{i,j} + a_j s_{j,i}) (f_{i,c} - f_{j,c}) \quad (7)$$

et $a_i = \alpha_i (|\nabla_i^S F|^2 - |\nabla_i^S F^0|^2)$.

Nous considérons la méthode de Gauss-Jacobi linéarisée pour calculer une solution au système d'équations. Soit $F^{(t)}$ la solution à l'itération t . En initialisant avec $F^{(0)} = F^0$, et $g^0 = |\nabla^S F^0|^2$, la méthode itère les étapes :

$$\begin{aligned} \forall i, \quad h_i &\leftarrow |\nabla_i^W F^{(t)}|^{p_i-2} \\ \forall i, \quad g_i &\leftarrow \alpha_i \left(|\nabla_i^S F^{(t)}|^2 - g_i^0 \right) \\ \forall i, \forall j, \quad \bar{w}_{i,j} &\leftarrow \frac{1}{2} (h_i w_{i,j} + h_j w_{j,i}) \\ \forall i, \forall j, \quad \bar{s}_{i,j} &\leftarrow \frac{1}{n_s} (g_i s_{i,j} + g_j s_{j,i}) \\ \forall i, \forall c, \quad f_{i,c}^{(t+1)} &\leftarrow \frac{\lambda_d f_{i,c}^0 + \sum_{j=1}^{n_v} (\lambda_r \bar{w}_{i,j} + \lambda_s \bar{s}_{i,j}) f_{j,c}^{(t)}}{\lambda_d + \sum_{j=1}^{n_v} \lambda_r \bar{w}_{i,j} + \lambda_s \bar{s}_{i,j}} \end{aligned}$$

jusqu'à convergence ou qu'un nombre d'itérations soit atteint. Une itération calcule $F^{(t+1)}$, en chaque sommet, comme la moyenne pondérée de $F^{(t)}$ dans le voisinage du sommet dans le graphe $\bar{W} + \bar{S}$. Contrairement aux filtres basés sur la p TV sur graphes non-dirigés [4] et dirigés [1], le paramètre p est adapté aux données en chaque sommet.

3.3 Paramètres pour des points 3D colorés

Le filtre proposé dépend de plusieurs paramètres : les graphes W et S , le vecteur p indiquant le degré local de régularité, et le vecteur α guidant la préservation des structures. Ils dépendent de la nature des données et de l'effet souhaité. Nous les décrivons pour des points 3D avec couleurs RVB. Étant donné un ensemble $X = \{x_i\}_{i=1, \dots, n_v}$ de n_v points $x_i \in \mathbb{R}^3$, et un ensemble $F^0 \in \mathbb{R}^{n_v \times 3}$ de couleurs RVB associées à ces points ($n_c = 3$), nous supposons qu'un graphe connecté S^0 a déjà été construit pour connecter les points entre-eux. Lorsque X échantillonne la surface d'un objet 3D, S^0 peut être construit à partir des arêtes du maillage ayant X comme sommets. Mais n'importe quel graphe peut être utilisé dès lors qu'il est connecté et représente suffisamment la géométrie des données.

Les graphes S et W sont construits en connectant chaque point $x_i \in X$ à ses k plus proches points voisins contenus

dans un voisinage \mathcal{N}^β dans S^0 (sommets atteints depuis x_i en parcourant β arêtes), relativement à la mesure de dissimilarité $d(x_i, x_j) = d_{\text{EMD}}(H(\Phi_i^\tau), H(\Phi_j^\tau))$, où $\Phi^\tau = (\Phi_i^\tau)_{i=1, \dots, n_v}$ associe à chaque x_i une caractéristique $\Phi_i^\tau = (f_j^0)_{j \in \mathcal{N}_i^\tau \cup \{i\}}$, i.e., la couleur des points x_j autour de x_i dans un voisinage \mathcal{N}_i^τ dans S^0 . Comme S^0 n'est pas supposé être régulier, une simple norme L_2 ne peut pas être utilisée pour les comparer. La distance d_{EMD} (*Earth Mover Distance*) [10] entre les histogrammes H des caractéristiques dans l'espace $L^* a^* b^*$ est plus appropriée. Les connexions retenues sont alors directement utilisées pour construire le graphe S . Ce graphe est non-pondéré, i.e., $s_{i,j} = 1$ si x_j est parmi les k plus proches voisins de x_i , ou 0 sinon. Le graphe W a la structure de S mais il est pondéré relativement aux distances entre les caractéristiques par :

$$w_{i,j} = 1 - \frac{d_{\text{EMD}}(H(\Phi_i^\tau), H(\Phi_j^\tau))}{\max_{\substack{l=1, \dots, n_v \\ s_{i,l}=1}} d_{\text{EMD}}(H(\Phi_i^\tau), H(\Phi_l^\tau))} \quad (8)$$

si $s_{i,j} = 1$, et 0 sinon. Remarquons que S et W sont dirigés.

Les deux autres paramètres p and α sont définis à partir d'un indicateur de structure $m = [m_i]_{i=1, \dots, n_v}$. En chaque point x_i , il représente le degré local de structure dans F^0 . Ceci est mesuré par la somme normalisée des distances dans un voisinage \mathcal{N}_i^ρ dans S^0 : $m_i = \frac{1}{|\mathcal{N}_i^\rho|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i^\rho} d_{\text{EMD}}(H(\Phi_i^{\rho-1}), H(\Phi_j^{\rho-1}))$,

$$p_i = 1 + \frac{1}{1 + m_i^2}, \quad \alpha_i = \frac{m_i - \min_j m_j}{\delta_i (\max_j m_j - \min_j m_j)} \quad (9)$$

avec δ_i le nombre d'arêtes sortant de i dans S (degré sortant). Cela permet de normaliser le gradient dans E_s . Comme discuté dans la section précédente, p et α (Eq. 9) sont antagonistes, un pour lisser les données, et l'autre pour préserver les structures.

4 Expérimentations et conclusion

Nous considérons des données acquises par numérisation 3D +RVB avec un scanner. Le maillage des objets est directement fourni. Nous l'utilisons pour définir le graphe initial S^0 . Les paramètres de construction des graphes S et W , et l'indicateur de structure m , sont fixés à $\beta = 5$, $\tau = 1$ et $\rho = 2$ (taille des sauts), et le nombre de voisins est fixé à $k = 10$. De plus, $\lambda_d = 10^{-3}$, $\lambda_r = 1$, $\lambda_s = 0.25$, et le nombre d'itérations est fixé à 25.

La figure 1 montre les résultats obtenus pour un maillage basse résolution (19247 sommets et 38490 faces). La 1ère ligne montre le maillage original et l'indicateur m de structure à préserver. La 2nde montre les résultats classiques obtenus avec des valeurs fixes de p et sans préservation de structure. Avec $p = 2$ (Laplacien), on obtient un fort effet de lissage, alors qu'avec $p = 1$ (TV), les différences entre couleurs sont mieux préservées. Cependant, certains petits détails indésirables sont également conservés. Faire varier p spatialement permet d'éliminer ces petits détails (3ème ligne). Certaines parties, comme le collier du canard, restent néanmoins floues. Ce problème est finalement réduit par le terme de préservation de structure.

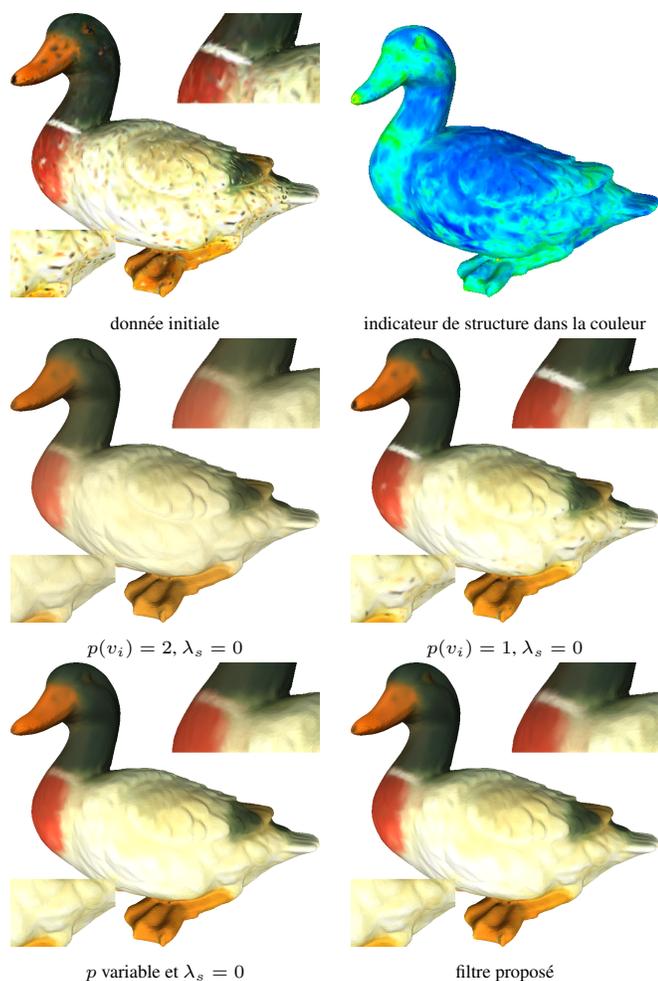


FIGURE 1 – Illustration de la méthode.

La figure 2 montre un exemple d'édition de la couleur des sommets d'un maillage haute résolution (780977 sommets et 1557701 faces). Le filtre proposé permet de supprimer les petits détails tout en préservant les structures les plus saillantes. Ceci peut être utilisé dans des procédures d'amélioration de la netteté [6]. La différence entre la couleur initiale et la couleur filtrée est calculée, augmentée d'un facteur de 0.8, et ajoutée à la version filtrée. Comme on peut l'observer, le résultat améliore le contraste local sans perdre les détails importants. Cela montre l'intérêt de notre approche pour des tâches d'édition. Nos futurs travaux étudieront plus finement le modèle proposé pour de telles tâches, en particulier les tâches d'abstraction.

Références

- [1] Z. Abu-Aisheh, S. Bogleux, and O. Lézoray. p-laplacian regularization of signals on directed graphs. In *Int. Symp. on Visual Computing*, volume LNCS 11241, pages 650–661, 2018.
- [2] Z. Afrose and Y. Shen. Mesh color sharpening. *Advances in Engineering Software*, 91 :36 – 43, 2016.
- [3] H. Cho, H. Lee, H. Kang, and S. Lee. Bilateral texture filtering. *ACM Trans. Graph.*, 33(4) :128 :1–128 :8, 2014.

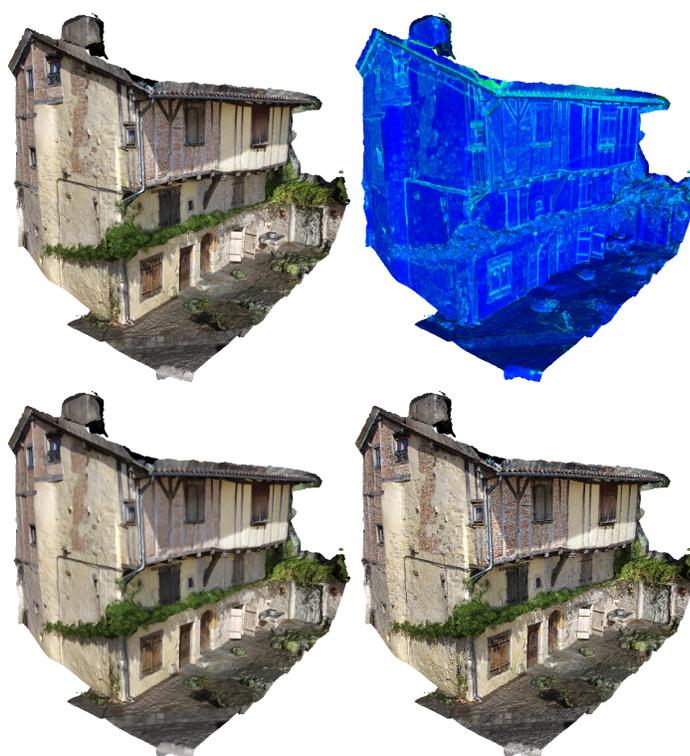


FIGURE 2 – 1ère ligne : maillage initial, indicateur de structure. 2ème ligne : filtrage et amélioration de la netteté.

- [4] A. Elmoataz, O. Lezoray, and S. Bogleux. Nonlocal discrete regularization on weighted graphs : A framework for image and manifold processing. *IEEE Trans. Image Processing*, 17(7) :1047–1060, 2008.
- [5] Q. Fan, J. Yang, D. Wipf, B. Chen, and X. Tong. Image smoothing via unsupervised learning. *ACM Trans. Graph.*, 37(6) :259 :1–259 :14, 2018.
- [6] Z. Farbman, R. Fattal, D. Lischinski, and R. Szeliski. Edge-preserving decompositions for multi-scale tone and detail manipulation. *ACM Trans. Graph.*, 27(3), 2008.
- [7] E. S. L. Gastal and M. M. Oliveira. Domain transform for edge-aware image and video processing. *ACM Trans. Graph.*, 30(4) :69, 2011.
- [8] M. Hein, J.-Y. Audibert, and U. von Luxburg. Graph laplacians and their convergence on random neighborhood graphs. *Journal of Machine Learning Research*, 8 :1325–1368, 2007.
- [9] O. Lézoray. 3d colored mesh graph signals multi-layer morphological enhancement. In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 1358–1362, 2017.
- [10] Y. Rubner, C. Tomasi, and L. J. Guibas. The earth mover's distance as a metric for image retrieval. *International Journal of Computer Vision*, 40(2) :99–121, 2000.
- [11] L. Xu, C. Lu, Y. Xu, and J. Jia. Image smoothing via L_0 gradient minimization. *ACM Trans. Graph.*, 30(6) :174, 2011.
- [12] L. Xu, Q. Yan, Y. Xia, and J. Jia. Structure extraction from texture via relative total variation. *ACM Trans. Graph.*, 31(6) :139 :1–139 :10, 2012.
- [13] Q. Zhang, X. Shen, L. Xu, and J. Jia. Rolling guidance filter. In *European Conference on Computer Vision*, pages 815–830, 2014.
- [14] D. Zhou, B. Schölkopf, and T. Hofmann. Semi-supervised learning on directed graphs. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 1633–1640, 2004.