

Représentation et comparaison des processus périodiquement corrélés sur des groupes de Lie par les opérateurs de Dilatation

Guillaume BOULEUX, Maël DUGAST, Eric MARCON

Univ Lyon, INSA-Lyon, DISP EA 4570
21 Av Jean Capelle, F-69621 Villeurbanne, France

{guillaume.bouleux,mael.dugast,eric.marcon}@insa-lyon.fr

Résumé – Nous proposons dans cet article une nouvelle représentation des processus stochastiques réels avec un intérêt marqué pour les processus nonstationnaires périodiquement corrélés (PC). Nous utilisons pour ce faire la théorie de la dilatation qui permet la représentation de la mesure spectrale du processus par un ensemble de matrices de rotations, appelées matrices de Dilatation. Due à la périodicité de la mesure spectrale, l'ensemble des matrices de dilatations formes une courbe fermée discrète sur $SO(n)$. La comparaison entre les différents processus peut alors être réalisée en comparant ces courbes sur $SO(n)$, induisant la notion de forme et d'espace de formes. Ainsi, une métrique adaptée est proposée et conduit en la proposition d'une distance. Quelques résultats permettent de mettre en valeur cette nouvelle approche.

Abstract – In this paper, we propose a new representation of real stochastic processes with a marked interest in periodically correlated nonstationary processes (PC). To do this, we use the Dilation theory, which allows the representation of the spectral measure of the process by a set of rotation matrices, defined as Dilation matrices. Due to the periodicity of the spectral measure, the set of Dilation matrices forms a discrete closed curve on $SO(n)$. The comparison between the various processes can thus be performed by comparing these curves on $SO(n)$, inducing the notion of shape and shape space. Thus, an adapted metric is proposed and leads to the proposition of a distance. Some results highlight this new approach.

1 Introduction

L'analyse et/ou la représentation des processus non stationnaires est abordée depuis quatre ou cinq décennies à présent par l'analyse temps-échelle/temps-fréquence ou encore par la représentation de Fourier lorsque les processus appartiennent à la classe des processus périodiquement corrélés (PC), ou enfin par l'utilisation des coefficients de corrélation partiels (parcours). L'un des avantages à utiliser les parcours réside dans leur forte relation avec la mesure du processus par la relation point-à-point avec les coefficients de corrélations [6]. Ils apparaissent par conséquent explicitement dans la décomposition en polynôme orthogonal de la mesure, et sont les éléments pour la construction de matrices de dilatation qui apparaissent dans les matrices Cantero Moral et Velazquez (CMV) / Géronimus, Gragg et Teplyaev (GGT), dans le problème des flots de Schur, sont également vues dans la littérature en tant qu'opérateurs d'évolution ou opérateur de décalage, et apparaissent enfin dans la représentation d'espace-état. La théorie de la dilatation s'inspire de la théorie des opérateurs [5], qui relie la mesure et les opérateurs unitaires du processus. Dans sa version la plus simple, la théorie de la dilatation correspond à la dilatation de Naimark [5], et stipule qu'étant donné une séquence de coefficients de corrélation $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, il existe une matrice unitaire W telle que $R_i \triangleq (1\ 0\ 0 \dots)W^i(1\ 0\ 0 \dots)^T$ où \cdot^T dénote la transposition. Lorsque le processus n'est pas stationnaire, sa matrice de corrélation associée n'est plus structurée Toeplitz, un

ensemble de matrices est alors requis [4] et l'expression précédente devient $R_{i,j} \triangleq (1\ 0\ 0 \dots)W_{i+1}W_{i+2} \dots W_j(1\ 0\ 0 \dots)^T$. Les matrices W_i sont théoriquement comprises comme des matrices de rotation infinie, qui deviennent finies lorsque la séquence des coefficients de corrélation est elle-même finie. Dans ce cas particulier, les matrices W_i appartiennent à $SO(n)$ ou $SU(n)$, le groupe spécial orthogonal ou unitaire, respectivement, et la mesure du processus est totalement décrite par l'ensemble de W_i . En conséquence, la mesure du processus est magnifiquement caractérisée pour le cas nonstationnaire, par une trajectoire échantillonnée induite par les matrices de dilatation sur un groupe de Lie. Lorsque le processus est périodiquement corrélé, la séquence de parcours est périodique, ainsi que la séquence de matrices de dilatation, ce qui donne une courbe fermée. Cela pose ensuite la question de la comparaison des processus au moyen de leurs matrices de dilatation. Nous proposons de répondre à cette question grâce à une approche issue de la géométrie différentielle.

2 Construction des matrices de Dilatation

L'idée, principalement exposée dans [4] consiste en la paramétrisation des matrices de corrélations par une ou des séquences de nombres, appelés séquence de choix, coefficients de Geronimo ou Verblunsky, paramètres de Schur ou encore coef-

coefficients de reflexion partiels (parcours) selon le contexte. Pour simplifier l'étude, nous nous plaçons dans le cadre des matrices définies positives. Il existe en fait une bijection entre l'ensemble des matrices définies positives et les parcours, comme cela à pu être noté par Levinson, Burg, et plus récemment par Lambert-Lacroix ou Barbaresco, dans le cas de signaux stationnaires. Cette paramétrisation dans sa forme la plus simple associe les coefficients de reflexion partiels que nous nommerons $\{\Gamma_{i,j}\}_{i < j}$, à la matrice de corrélation. A partir des $\{\Gamma_{i,j}\}_{i < j}$ on forme les rotations de Givens :

$$G_{j-k}(\Gamma_{k,k+l}) = I \oplus \begin{pmatrix} \Gamma_{k,k+l} & D_{\Gamma_{k,k+l}}^* \\ D_{\Gamma_{k,k+l}} & -\Gamma_{k,k+l}^* \end{pmatrix} \oplus I \quad (1)$$

avec I la matrice identité et $D_{\Gamma_{i,j}} = (I - \Gamma_{i,j}^* \Gamma_{i,j})$ l'opérateur de défaut de la contraction $\Gamma_{i,j}$. En notant :

$$W_i = G_{j-i}(\Gamma_{i,i+1}) G_{j-i}(\Gamma_{i,i+2}) \dots G_{j-i}(\Gamma_{i,j}) \quad (2)$$

on peut alors écrire :

$$R_{i,j} = P_1 W_i W_{i-1} \dots W_{j-1} |_{H_1} \quad (3)$$

où $P_1 = (1 \ 0 \ \dots)^T$ c'est-à-dire la projection orthogonale sur la première ligne, et H_1 est la restriction à la première colonne. On retrouve alors la relation énoncée précédemment $R_{i,j} = (1 \ 0 \ \dots) W_{i+1} W_{i+2} \dots W_j (1 \ 0 \ \dots)^T$, correspondant à la décomposition de Kolmogorov. La structure d'une matrice de dilatation W_i est telle que

$$W_i = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & D_{1*} \Gamma_2 & D_{1*} D_{2*} \Gamma_3 & \dots \\ D_1 & -\Gamma_1^* \Gamma_2 & -\Gamma_1^* D_{2*} \Gamma_3 & \dots \\ 0 & D_2 & -\Gamma_2^* \Gamma_3 & \dots \\ 0 & 0 & D_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

W_i appartient à la classe de matrices dites Hessenberg supérieures à coefficients sous-diagonaux positifs. Bien évidemment, lorsque le processus est stationnaire, les calculs sont grandement simplifiés. Ainsi, on a $W = W_i$, $\forall i$, $\Gamma_{i,j} = \Gamma_{j-i}$.

3 Comparaison des processus PC

3.1 Espace des formes

Nous nous intéressons donc aux courbes reposant sur une variété, et plus précisément sur un groupe de Lie. Notons c une telle courbe, $c : [0, 1] \in SO(n)$. Pour étudier la structure géométrique de ces objets, considérons l'ensemble des courbes de $SO(n)$ défini par $\mathcal{M} = \{c \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], SO(n)) : c'(t) \neq 0 \ \forall t\}$. Lorsque nous comparons deux courbes, il est naturel de définir une distance entre ces courbes qui ne dépendent pas de leurs paramétrisations ou de leurs rotations. Cela revient à reparamétriser les courbes par un difféomorphisme croissant $\phi \in \mathcal{D} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ et impose que la métrique sur \mathcal{M} soit invariante par reparamétrisation. Cette propriété conduit à la relation d'équivalence

$$c_0 \sim c_1 \Leftrightarrow \exists \phi \in \mathcal{D} : c_0 = c_1 \circ \phi. \quad (4)$$

pour deux courbes c_0, c_1 de \mathcal{M} . De cette relation nous obtenons naturellement une définition d'un espace quotient de \mathcal{M} , généralement nommé l'espace des formes et s'écrivant

$$\mathcal{S} = \mathcal{M} / \sim, \text{ ou } \mathcal{S} = \mathcal{M} / \mathcal{D}. \quad (5)$$

On en déduit une distance sur l'espace des formes à partir de celle défini sur \mathcal{M}

$$d_{\mathcal{S}}([c_0], [c_1]) = \inf_{\phi \in \mathcal{D}} d_{\mathcal{M}}(c_0, c_1 \circ \phi), \quad (6)$$

où $[c_0], [c_1]$ sont respectivement les représentants des classes d'équivalences de c_0 et c_1 .

3.2 Métrique et Distance sur \mathcal{S} puis \mathcal{M}

Nous nous proposons maintenant de donner quelques informations sur le choix d'une métrique pertinente sur \mathcal{M} afin de comparer les différentes courbes fermées. Comme l'espace de base est un groupe de Lie, nous utilisons l'approche de Celledoni, mais beaucoup d'autres travaux ont été proposés pour tenir compte de la structure (ou non) homogène de la variété de base. Dans [1] il est montré que malheureusement nous ne pouvons utiliser la simple métrique L^2 sur \mathcal{M} ou \mathcal{S} car elle conduit à une distance nulle. Il est dans ce cas impossible de différencier 2 formes de courbes différentes qu'elles appartiennent à \mathcal{M} ou \mathcal{S} . Pour pallier à cette difficulté, la famille des métriques élastiques, dérivée de la métrique de Sobolev, a été étudiée. Dans le cas d'un espace euclidien \mathbb{R}^n , elle admet l'expression :

$$g_c^{a,b}(u, v) = \int (a^2 \langle D_l u^N, D_l v^N \rangle + b^2 \langle D_l u^T, D_l v^T \rangle) \|c'\| dt,$$

où $D_l u = u' / \|c'\|$, $D_l u^T = \langle D_l u, w \rangle w$, avec $w = c' / \|c'\|$ and $D_l u^N = D_l u - D_l u^T$. Dans notre cas il est montré que $a, b = 1, 1/2$ permet d'avoir une équivalence avec une transformation à la fois simple d'interprétation et d'implémentation, la TSRV. La TSRV, adaptée à notre cas, paramétrise la courbe c par son vecteur vitesse et son point d'ancrage puis transporte les nouvelles courbes appartenant aux espaces tangents successifs par translation à droite, tous en même point de référence, qui sera l'identité e de $SO(n)$. C'est une isométrie de \mathcal{M} vers l'espace des courbes lisses. Sa définition est

$$F_{Lie} : \mathcal{M} \longrightarrow SO(n) \times L^2([0, 1], \mathfrak{g}) \quad (7)$$

$$F_{Lie}(c)(t) = (e, q(t)) = \left(e, \frac{T_c^{c(t) \rightarrow I}(c'(t))}{\sqrt{\|c'(t)\|}} \right) \quad (8)$$

où \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie, $\|\cdot\|$ une norme induite par une métrique invariante à droite sur $SO(n)$, et où $T_c^{c(t) \rightarrow I}$ correspond au transport de $c(t)$ vers l'identité suivant la courbe c . Avec cette transformation, qui correspond donc à une métrique de Sobolev du premier ordre, la distance voulue en (6) conduit à résoudre le problème d'optimisation :

$$d_{\mathcal{S}}([c_0], [c_1]) = \inf_{\phi \in \mathcal{D}} \left(\int_0^1 \|q_0(t) - q_1(\phi(t)) \sqrt{\phi'(t)}\|^2 \right)^{1/2},$$

Modèle de Signal affiché dans la Figure 1	Distance au Signal (c)		
	SO(3)	SO(4)	SO(5)
(a)	5.72	97.19	526.36
(b)	31.63	41.78	298.64
(d)	4.19	187.42	621.51

TABLE 1 – Distances entre les signaux (a),(b),(d) et le Signal de référence (c) de la Figure 1 calculées par (3.2)

qui est résolu par un algorithme de descente de gradient traditionnel ou une programmation linéaire dynamique [2]. Nous obtenons aussi une expression familière pour l’interpolation géodésique entre deux courbes c_0 et c_1 , exprimée dans leur domaine TSRV :

$$\mathcal{Q}(s) = F_{Lie}^{-1}((1-s)F_{Lie}(c_0) + sF_{Lie}(c_1)) \text{ pour } s \in [0, 1].$$

4 Résultats

Afin maintenant de voir l’intérêt de l’approche proposée dans cet article pour la compréhension des processus PC, nous proposons des représentations sur $SO(3)$ de quatre processus différents, Figure 1 dont les courbes ont été interpolés avec 200 points. Pour cette représentation, nous avons générés 1000 échantillons pour un classique modèle de signal modulé en amplitude $a(t) \cos(2\pi f/f_e t)$ où $a(t)$ est un processus aléatoire stationnaire centré réduit de période 20 points, un modèle périodique AR(2) de période 20 points, un modèle périodique AR(2) de période 54 points, et un modèle périodique ARMA(2,1) de période 20 points. Le package PerARMA de R a été utilisé pour générer les signaux et estimer les séquences périodiques de parcours pour chacun des signaux. L’analyse de la figure Figure 1 montre que la mesure spectrale du signal modulé en amplitude ne s’étale pas beaucoup sur $SO(3)$, indiquant finalement une certaine quasi stationnarité. Par contre, si l’aspect temporel du signal PARMA(2,1) est semblable à celui du signal modulé en amplitude, leur représentation sur $SO(3)$ est vraiment différente. La mesure spectrale du modèle PARMA(2,1) s’étale beaucoup plus. Enfin, l’observation des figures Figure 1 issues du même modèle mais dont les périodicités sont différentes, laisse suggérer que plus le nombre de points par période est important et plus les courbes sur $SO(3)$ s’enlacent.

Pour terminer cette analyse, nous avons calculé la distance définie par (3.2) entre le processus PC de la Figure 1-(c) et tous les autres processus PC étudiés et affichés sur la Figure 1. Les distances sont rapportées à l’intérieur de la Table 1. Clairement, les distances entre les formes des courbes caractérisant la mesure spectrale de chaque processus PC révèlent une certaine proximité spectrale entre les processus PC référencés. Le signal intéressant est celui qui est indexé par la lettre (b) et représente un signal PAR (2) avec exactement les mêmes paramètres de modèle que celui du signal de référence, mais avec une périodicité de 54 points au lieu de 20. La courbe associée à ce signal a de nombreux lacets dans sa représentation, ce qui

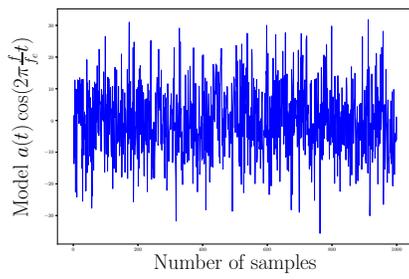
fait que sa distance est la plus grande sur $SO(3)$, mais lorsque la dimension augmente, sa distance au signal (c) devient la plus faible. Ceci est particulièrement intéressant, nous montrons par exemple dans [3] qu’il existe une compétition entre les courbes d’un PAR (2) avec des paramètres de modèle différents mais de même périodicité et d’un PAR (2) avec les mêmes paramètres de modèle mais de périodicité différente. Nous indiquerons enfin que plus de résultats et d’analyse pourront être trouvées dans [3], où il est montré également les interpolations de géodésiques entre les courbes fermées représentatives des mesures spectrales des processus.

5 Conclusion

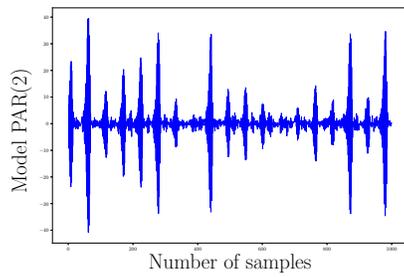
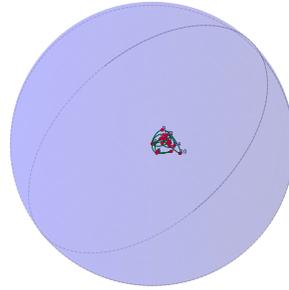
Dans cet article, une nouvelle représentation des processus nonstationnaires périodiquement corrélés réels a été proposée grâce à la théorie de la Dilatation. Elle permet de représenter la mesure spectrale du processus sur un groupe de Lie en dessinant une courbe fermée sur $SO(n)$. La comparaison des processus peut alors s’effectuer directement par comparaison de ces courbes fermées en utilisant des outils de la géométrie différentielle. En particulier, une métrique adaptée est proposée afin d’obtenir un calcul de distance rapide et une interpolation de géodésique simple. Nous noterons que la théorie reste valable pour des signaux complexes et que des travaux en cours montrent qu’il est possible de classifier les processus par des caractéristiques topologiques de la mesure spectrale des processus. Enfin, le formalisme de la géométrie différentielle permet d’interpoler entre les matrices de rotation et donc d’interpoler la mesure spectrale du processus. En allant un cran plus loin, on peut donc interpoler les séquences de corrélations et ainsi obtenir des spectres plus précis.

Références

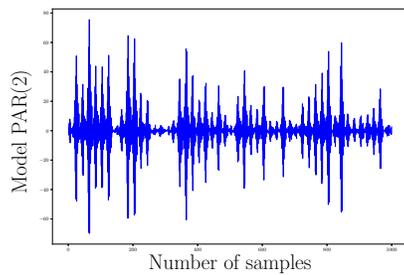
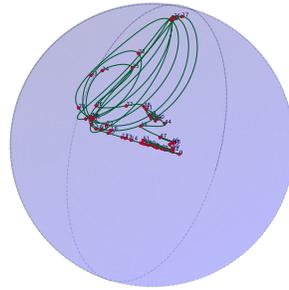
- [1] M. Bauer, M. Bruveris, and P. W. Michor, Why Use Sobolev Metrics on the Space of Curves, in *Riemannian Computing in Computer Vision*, 2016.
- [2] E. Celledoni, M. Eslitzbichler, and A. Schmeding, Shape analysis on Lie groups with applications in computer animation, *Journal of Geometric Mechanics*, vol 8, 2016.
- [3] M. Dugast, G. Bouleux, and E. Marcon. Representation and Characterization of Nonstationary Processes by Dilation Operators and Induced Shape Space Manifolds, In *Entropy*, Vol.20, no 9, 2018.
- [4] Tiberiu Constantinescu. *Schur parameters, factorization and dilation problems*, Birkhäuser Basel, 1995.
- [5] B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici, and L. Kérchy. *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, Springer New York, 2010.
- [6] L. Yang, M. Arnaudon, and F. Barbaresco. Riemannian median, geometry of covariance matrices and radar target detection, In *Radar Conference (EuRAD), 2010 European*, pages 415–418, September 2010.



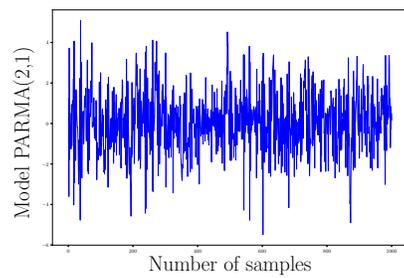
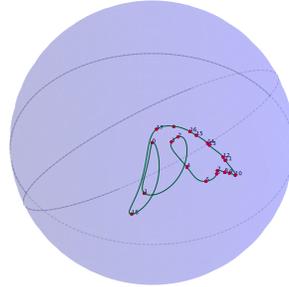
(a)



(b)



(c)



(d)

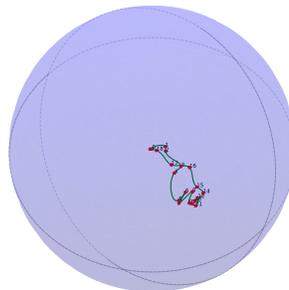


FIGURE 1 – 1000 échantillons des processus PC générés par (a) un processus stationnaire centré réduit $a(t)$ modulé en amplitude; (b) un modèle périodique AR(2) de période 54 points; (c) un modèle périodique AR(2) de période 20 points; and (d) un modèle périodique ARMA(2,1) de période 20 points.