

Régime asymptotique des statistiques de test de circularité

Florent CHATELAIN¹, Nicolas LE BIHAN¹

¹Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP[†],
GIPSA-Lab, 38000 Grenoble, France.

[†]: Institute of Engineering Univ. Grenoble Alpes

florent.chatelain@gipsa-lab.fr, nicolas.le-bihan@gipsa-lab.fr

Résumé – Dans le cas Gaussien, tester la circularité d’un vecteur aléatoire complexe revient à identifier une structure de corrélation spécifique entre la partie réelle et la partie imaginaire. Dans cet article, nous nous intéressons à définir un test invariant par transformation linéaire, ce qui revient à construire un tel test à l’aide des valeurs propres de la matrice de corrélation empirique des observations. Nous donnons la distribution des valeurs propres ainsi que de la valeur propre maximale dans le régime asymptotique où la taille des vecteurs et la taille de l’échantillon tendent vers l’infini pendant que leur rapport reste commensurable. Enfin, nous comparons dans ce régime asymptotique le test de Roy, qui repose sur la statistique de la plus grande valeur propre, avec le GLRT sur des simulations.

Abstract – In the Gaussian case, testing the circularity of a complex random vector is like identifying a specific correlation structure between the real and the imaginary part. In this article, we are interested in defining an invariant test by linear transformation, which is the same as constructing such a test using the eigenvalues of the empirical correlation matrix of observations. We give the distribution of eigenvalues as well as the largest eigenvalue in the asymptotic regime where the size of the vectors and the sample size tend towards infinity while their ratio remains commensurable. Finally, we compare in this asymptotic regime Roy’s test, which is based on the statistics of the largest eigenvalue, with GLRT on simulations.

1 Circularité

Nous considérons des signaux aléatoires discrets et centrés, à valeurs complexes, représentés par des vecteurs N -dimensionnels *i.e.* $\mathbf{z} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N$, où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ est la partie réelle de \mathbf{z} et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ sa partie imaginaire. La *représentation réelle* de $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ est le vecteur réel $\mathbf{x} = [\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T]^T \in \mathbb{R}^{2N}$. La propriété de *circularité* traduit l’invariance de la distribution de $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$: on dit que \mathbf{z} est *circulaire* si $\mathbf{z} \stackrel{d}{=} e^{i\theta} \mathbf{z}$ pour tout θ [1, 2, 3]. Dans le cas des signaux Gaussiens, la circularité est appelée *properness* dans la littérature [4]. Nous considérons le cas Gaussien ici, et les statistiques d’ordre 2 d’un vecteur $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ sont alors contenues dans la matrice de covariance réelle $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ de \mathbf{x} donnée par :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} & \mathbf{C}_{\mathbf{u}\mathbf{v}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{v}\mathbf{u}} & \mathbf{C}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} \end{pmatrix} \quad (1)$$

où $\mathbf{C}_{\mathbf{a}\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{N \times N} = \mathbb{E}[\mathbf{a}\mathbf{b}^T]$ est la matrice de covariance croisée entre les vecteurs réels \mathbf{a} et \mathbf{b} , et telle que $\mathbf{C}_{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \mathbf{C}_{\mathbf{b}\mathbf{a}}^T$. On note \mathcal{S} l’ensemble des matrices réelles Symétriques Définies Positives (SDP) de taille $2N \times 2N$, et donc $\mathbf{C} \in \mathcal{S}$.

On dit qu’un vecteur Gaussien complexe \mathbf{z} est circulaire à l’ordre 2 (ou *proper*) si :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = \mathbf{C}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_{\mathbf{u}\mathbf{v}}^T = -\mathbf{C}_{\mathbf{u}\mathbf{v}} \quad (2)$$

Dans le cas où la condition (2) n’est pas vérifiée, le vecteur \mathbf{z} est dit non-circulaire (ou *improper*). La conception et l’étude de tests statistiques de circularité sont des problèmes largement

abordés dans la littérature en traitement du signal [6, 7, 4]. Des travaux antérieurs [8] ont considéré ce problème en proposant un test statistique pour inférer de la structure *complexe* dans un modèle réel bivarié (*c.à.d.* la condition (2) dans une matrice de covariance de type (1)).

Nous proposons donc de nous intéresser au test binaire (à l’ordre 2) suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{z} \text{ est circulaire si (2) est vérifié} \\ H_1 : \mathbf{z} \text{ est non-circulaire sinon} \end{cases} \quad (3)$$

Dans la suite, nous considérons ce test de circularité dans le cas où nous avons à disposition un échantillon de taille M , noté $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_m\}_{m=1}^M$, avec $\mathbf{x}_m = [\mathbf{u}_m^T, \mathbf{v}_m^T]^T \in \mathbb{R}^{2N}$ des vecteurs réels $2N$ -dimensionnels *i.i.d.* Gaussiens, centrés et de matrice de covariance \mathbf{C} .

Les résultats des tests proposés dans [4, 8, 6, 7] considèrent principalement deux cas de figure : soit N et M sont fixés, soit la dimension N est fixée et le nombre d’échantillons M tend vers l’infini (dans ce deuxième cas, les auteurs de [7] retrouvent d’ailleurs le résultat connu de [11]). Nous nous intéressons dans ce qui suit au cas de figure où $N, M \rightarrow \infty$ avec $M/N \rightarrow \gamma \in [2, +\infty)$.

2 Statistiques invariantes

L’objectif est de construire un test de circularité qui ne dépende pas de la représentation des vecteurs \mathbf{z} , *i.e.* invariant par

toute transformation linéaire qui préserve la structure de circularité (2).

Comme expliqué dans [8], toute matrice SPD de \mathcal{S} peut être décomposée en la somme $\mathbf{C} = \dot{\mathbf{C}} + \ddot{\mathbf{C}}$, avec $\dot{\mathbf{C}} \in \mathcal{G}$, i.e. l'ensemble des matrices réelles $2N \times 2N$ isomorphes aux matrices complexes inversibles de $GL_N(\mathbb{C})$. Les expressions de $\dot{\mathbf{C}}$ et $\ddot{\mathbf{C}}$ sont [8] :

$$\dot{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{C}}_1 & -\dot{\mathbf{C}}_2 \\ \dot{\mathbf{C}}_2 & \dot{\mathbf{C}}_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{C}}_1 & \ddot{\mathbf{C}}_2 \\ \ddot{\mathbf{C}}_2 & -\ddot{\mathbf{C}}_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

avec $\dot{\mathbf{C}}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\text{uu}} + \mathbf{C}_{\text{vv}})$, $\dot{\mathbf{C}}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\text{uv}} - \mathbf{C}_{\text{vu}})$ et $\ddot{\mathbf{C}}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\text{uu}} - \mathbf{C}_{\text{vv}})$, $\ddot{\mathbf{C}}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{\text{uv}} + \mathbf{C}_{\text{vu}})$. Le lemme suivant permet de définir les statistiques invariantes pour le test de circularité.

Lemme 2.1. *Toute matrice SPD $\mathbf{C} \in \mathcal{S}$ peut être décomposée comme :*

$$\mathbf{C} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N + \mathbf{D}_\lambda & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_N - \mathbf{D}_\lambda \end{pmatrix} \mathbf{G}^T,$$

avec $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$, \mathbf{I}_N la matrice identité de taille $N \times N$ et $\mathbf{D}_\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ une matrice diagonale de taille $N \times N$. Les éléments de la diagonale de \mathbf{D}_λ , notés λ_i pour $1 \leq i \leq N$, sont les valeurs propres non-négatives de la matrice réelle symétrique de taille $2N \times 2N$ suivante :

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{C}) = \dot{\mathbf{C}}^{-\frac{1}{2}} \ddot{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{C}}^{-\frac{1}{2}}.$$

Les valeurs propres λ_i satisfont les propriétés suivantes : 1) λ_i et $-\lambda_i$, pour $1 \leq i \leq N$, forment l'ensemble des valeurs propres de la matrice $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{C})$ de taille $2N \times 2N$, et 2) $\lambda_i \in [0, 1]$ avec, par convention, l'ordonnancement $1 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$.

Démonstration. Voir [8, lemme 5.1 et 5.2]. \square

Le lemme 2.1 montre que toute paramétrisation de \mathbf{C} invariante par action de \mathcal{G} dépend uniquement des N valeurs propres positives $1 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$. Ces valeurs propres sont appelées *paramètres invariants maximaux* dans [9]. Le test (3) devient alors :

$$\begin{cases} H_0 : \lambda_i = 0, \text{ pour } 1 \leq i \leq N, \\ H_1 : \lambda_i \geq 0, \text{ pour } 1 \leq i \leq N. \end{cases} \quad (5)$$

Afin de définir un test de circularité sur un échantillon $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_m\}_{m=1}^M$, tel que $\mathbf{x}_m = [\mathbf{u}_m^T, \mathbf{v}_m^T]^T$, nous nous intéressons donc à la statistique suffisante que constitue la matrice de covariance empirique $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{\text{uu}} & \mathbf{S}_{\text{uv}} \\ \mathbf{S}_{\text{vu}} & \mathbf{S}_{\text{vv}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$, avec :

$$\mathbf{S}_{\text{ab}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_m \mathbf{b}_m^T \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

la matrice réelle de covariance empirique des vecteurs réels $\{\mathbf{a}_m\}_{m=1}^M$ et $\{\mathbf{b}_m\}_{m=1}^M$. On suppose ici que $M \geq 2N$, ainsi $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Afin de proposer un test invariant par action du groupe linéaire \mathcal{G} , il doit être basé sur les N valeurs propres positives

de $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{S}) = \dot{\mathbf{S}}^{-\frac{1}{2}} \ddot{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{S}}^{-\frac{1}{2}}$, dénotées l_i , $1 \leq i \leq N$. Le lemme 2.1 nous assure que ces estimées des vraies valeurs propres λ_i vérifient la propriété suivante : $1 \geq l_1 \geq \dots \geq l_N \geq 0$.

D'après (5), les valeurs propres λ_i sont nulles sous l'hypothèse H_0 , et non-négatives sinon. La distribution des l_i doit donc être stochastiquement plus grande sous H_1 que sous H_0 . Afin de construire des procédures de tests statistiques pour décider de la circularité des vecteurs observés, il est maintenant nécessaire de caractériser la loi sous H_0 des valeurs propres.

3 Distribution des valeurs propres

Soit $\mathcal{B}_N(\frac{1}{2}n_1, \frac{1}{2}n_2)$ la distribution beta matricielle de taille $N \times N$ de paramètres n_1 et n_2 comme donnée dans [10, définition 3.3.2, p. 110]. Par analogie avec l'analyse canonique des corrélations, les carrés des valeurs propres empiriques $r_n \equiv l_n^2$, pour $n = 1, \dots, N$, sont dorénavant appelés les corrélations canoniques empiriques.

Proposition 3.1. *Sous l'hypothèse H_0 , le vecteur (r_1, \dots, r_N) des corrélations canoniques empiriques $r_n = l_n^2$ suit la distribution des valeurs propres d'une variable matricielle beta $\mathcal{B}_N(\frac{1}{2}n_1, \frac{1}{2}n_2)$, de paramètres $n_1 = N + 1$ et $n_2 = M - N$. De plus, la ddp jointe des (r_1, \dots, r_N) est donnée par :*

$$p(r_1, \dots, r_N) \propto \prod_{n=1}^N (1 - r_n)^{(M-2N-1)/2} \prod_{k < n} (r_k - r_n), \quad (6)$$

avec $1 \geq r_1 \geq \dots \geq r_N \geq 0$.

Démonstration. Voir [5, Proposition 2.1.1.]. \square

Bien que, sous H_0 , la loi jointe des corrélations canoniques empiriques (r_1, \dots, r_N) soit donnée en (6), il reste difficile d'obtenir une expression analytique explicite des lois marginales. Il est cependant possible de caractériser la loi marginale asymptotique des ces variables en grande dimension, i.e. lorsque la dimension N est commensurable par rapport au nombre d'échantillons M .

Théorème 3.1. *On considère le régime asymptotique $M, N \rightarrow \infty$ où le rapport $M/N \rightarrow \gamma \in [2, +\infty)$ est fini. Sous H_0 , la distribution empirique des corrélations canoniques (i.e. les valeurs propres au carré de $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{S})$) converge vers la loi dont la ddp est :*

$$f(r) = \frac{1}{2\pi(1-r)} \sqrt{4(\gamma-1)\frac{1-r}{r} - (\gamma-2)^2}, \quad (7)$$

sur le support $r \in (0, c)$, où $c = \frac{4(\gamma-1)}{\gamma^2} \in (0, 1]$.

Démonstration. Soient \mathbf{A} et \mathbf{B} deux matrices de $\mathbb{R}^{N \times N}$ indépendantes et distribuées respectivement selon des lois de Wishart $W_N(n_1, \mathbf{\Sigma})$ et $W_N(n_2, \mathbf{\Sigma})$. On considère le régime asymptotique où $N, n_1, n_2 \rightarrow +\infty$ avec $N/n_1 \rightarrow d \in (0, 1]$ et $N/n_2 \rightarrow d' \in (0, 1)$. La loi empirique des valeurs propres

de $\frac{d}{d'} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}$ ne dépend pas de Σ et converge d'après [14] vers la distribution de ddp

$$f(x) = \frac{(1-d')\sqrt{(x-a)(b-x)}}{2\pi x(xd+d')}, \quad (8)$$

sur le support $x \in [a, b]$, où $a = \left(\frac{1-\sqrt{1-(1-d)(1-d')}}{1-d'}\right)^2$ et $b = \left(\frac{1+\sqrt{1-(1-d)(1-d')}}{1-d'}\right)^2$.

D'après [10, Thm 3.3.1, p. 109], les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}$ suivent la même loi que les valeurs propres d'une matrice de loi $\mathcal{B}_N(\frac{1}{2}n_1, \frac{1}{2}n_2)$. De plus chaque valeur propre r_i de $\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}$ se déduit de chaque valeur propre x_i de la matrice $\frac{d}{d'} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}$ par la relation $r_i = \frac{d'x_i}{d+d'x_i}$. Le *continuous mapping theorem* assure que la loi asymptotique des valeurs propres d'une telle matrice beta se déduit directement de (8) selon le changement de variable précédent.

Enfin, selon la proposition 3.1, les paramètres de loi beta matricielle pour notre problème sont $n_1 = N + 1$ et $n_2 = M - N$. Et d'après les hypothèses, il vient que $N/n_1 \rightarrow d = 1$ et $N/n_2 \rightarrow d' = \frac{1}{\gamma-1}$, ce qui permet de retrouver le résultat. \square

Il est intéressant de remarquer d'après le théorème précédent que la masse des coefficients de corrélation canoniques empiriques se concentre sur un support plus étroit que l'intervalle $[0, 1]$, *i.e.* tronqué à droite, dès lors que $\gamma > 2$.

4 Test de Roy en grande dimension

Le test de Roy est classique en analyse multivariée afin de détecter l'hypothèse alternative H_1 où au moins une des valeurs propres est non nulle. Il repose sur la statistique de la plus grande valeur propre [11, p. 84], ou, de manière équivalente pour notre problème, sur le plus grand coefficient de corrélation canonique $r_1 = l_1^2$. Il consiste à rejeter H_0 dès lors que $r_1 > \eta_\alpha$ où le seuil η_α doit être calibré en fonction de la loi de r_1 sous H_0 et du niveau de contrôle α (probabilité de fausse alarme) souhaité.

Théorème 4.1. *On considère le régime asymptotique $M, N \rightarrow \infty$ où le rapport $M/N \rightarrow \gamma \in [2, +\infty)$ est fini. Soit $W = \log(r_1/(1-r_1))$ la transformée du plus grand coefficient de corrélation canonique r_1 par la fonction logit. Sous H_0 , la loi asymptotique de W , après une standardisation appropriée, converge vers une loi de Tracy-Widom d'ordre 1 notée \mathcal{TW}_1 :*

$$\frac{W - \mu}{\sigma} \rightarrow \mathcal{TW}_1, \quad (9)$$

où

$$\begin{aligned} \mu &= 2 \log \tan\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right), \\ \sigma^3 &= \frac{16}{M^2 \sin^2(\phi+\psi) \sin \psi \sin \phi}, \\ \psi &= \arccos\left(\frac{M-2N+1}{M}\right), \\ \phi &= \arccos\left(\frac{M-2N-1}{M}\right). \end{aligned}$$

Démonstration. Ce résultat découle directement de la loi asymptotique de la plus grande valeur propre d'une loi $\mathcal{B}_N(\frac{1}{2}n_1, \frac{1}{2}n_2)$ obtenue dans [15] et de la proposition 3.1. \square

La variable W se déduisant d'une transformation monotone croissante de r_1 , le test de Roy est équivalent à seuiller W et le théorème 4.1 permet ainsi de calibrer le test. Il faut noter que [16] propose une procédure pour évaluer la loi exacte (non asymptotique) de W . Néanmoins la simple approximation par la loi asymptotique \mathcal{TW}_1 s'avère en pratique suffisamment précise pour la plupart des cas dès lors que la dimension est assez grande ($pex N \geq 10$). Enfin, même si la loi \mathcal{TW}_1 n'admet pas d'expression analytique explicite, elle peut être approchée précisément par une loi gamma décalée [17].

5 Simulations

Dans le but d'apprécier la qualité des approximations obtenues dans le régime asymptotique, les histogrammes des corrélations canoniques, et de la plus grande corrélation canonique r_1 , sont représentés Fig. 1 et comparés aux lois asymptotiques. On peut ici constater visuellement que ces approximations sont déjà précises pour $M = 200$ échantillons, même dans le cas le plus extrême de grande dimension où $\gamma = 2.5$ (*i.e.* $N = 80$).

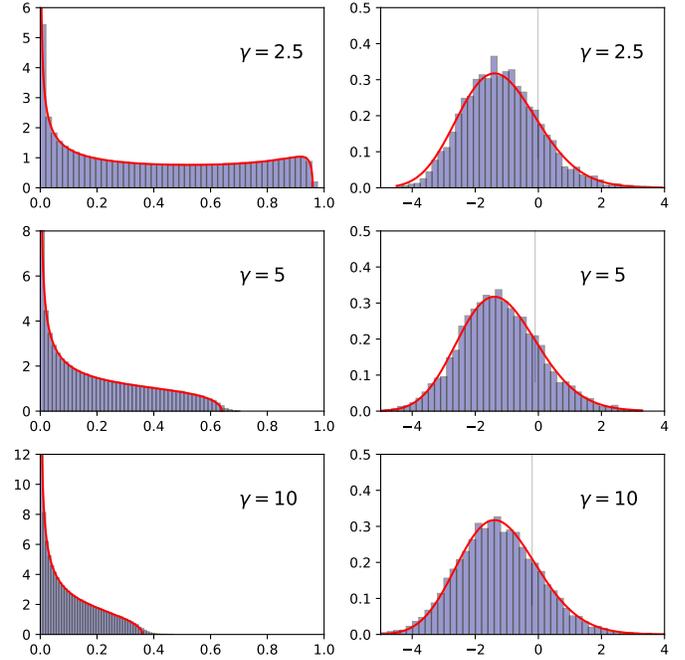


FIGURE 1 – Gauche : histogramme des corrélations canoniques empiriques, barres bleues, et loi asymptotique (Thm 3.1), trait plein rouge. Droite : histogramme de $(W - \mu)/\sigma$, barres bleues, et loi asymptotique (Thm 4.1), trait plein rouge. $M = 200$ échantillons, haut : $\gamma = 2.5$, milieu : $\gamma = 5$, bas : $\gamma = 10$.

Afin d'étudier la puissance du test de Roy pour rejeter l'hy-

pothèse H_0 de *properness*, nous simulons chaque composante $u_{m,n}$ et $v_{m,n}$, pour $n = 1, \dots, N$, de chaque vecteur $\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^N$ des parties respectivement réelles et imaginaires, pour $m = 1, \dots, M$, selon le modèle :

$$\begin{aligned} u_{m,n} &= \epsilon_{m,n} + \sqrt{a/N} w_m, \\ v_{m,n} &= \eta_{m,n} + \sqrt{a/N} w_m, \end{aligned}$$

où les variables $\epsilon_{m,n}, \eta_{m,n}$ et w_m sont i.i.d, centrées et de variance unité, et $a > 0$. Les vecteurs des parties réelles et imaginaires partagent ainsi une contribution commune de rang 1. Ceci assure la parcimonie du spectre de la vraie matrice $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{C})$ pour laquelle la seule valeur propre non nulle a pour expression $\lambda_1 = \frac{a}{1+a}$. Finalement ce test est comparé au test du GLRT dont les lois exactes et approchées en grande dimension sont caractérisées dans [5]. Les résultats présentés sur la figure 2 montrent que pour de “faibles” corrélations, les deux tests sont en général très peu puissants même si le test du GLRT est parfois légèrement plus puissant. Dans ce cas, l’estimateur de la corrélation canonique λ_1^2 est noyé dans la masse des corrélations canoniques empiriques et ne peut pas être détecté correctement. Néanmoins, dès lors que cet estimateur sort de la masse, ce qui dépend du rapport γ , le test de Roy devient alors très puissant (puissance qui tend très rapidement vers 1).

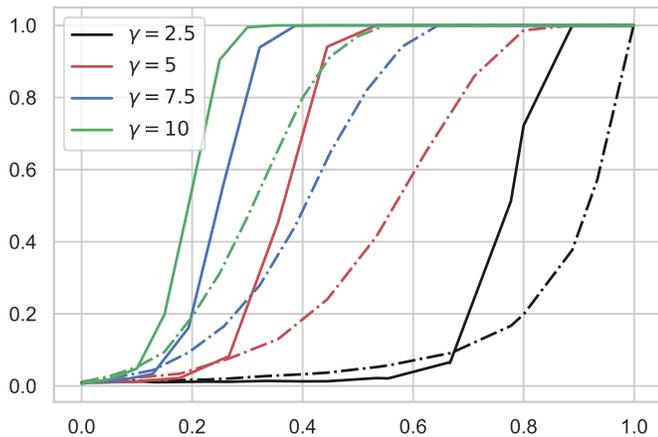


FIGURE 2 – Puissances (empiriques) du test de Roy, trait continu, et du GLRT, trait mixte, en fonction de la corrélation canonique théorique λ_1^2 et pour différentes valeurs de γ ($M = 500$ échantillons, valeur nominale de probabilité de fausse alarme $\alpha = 0.01$).

Références

[1] P. Comon, “Circularité et signaux aléatoires à temps discret,” *Traitement du Signal*, Lavoisier, 11(5), pp. 417–420, 1994.

[2] B. Picinbono, “On circularity,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, no. 12, pp. 3473–3482, 1994.

[3] P.-O. Amblard, M. Gaëta, and J.-L. Lacoume, “Statistics for complex variables and signals, Part I,” *Signal Processing*, vol. 53, pp. 1–13, 1996.

[4] P.J. Schreier and L.L. Scharf, *Statistical Signal Processing of Complex-Valued Data : The Theory of Improper and Noncircular Signals*, Cambridge University Press, 2010.

[5] F. Chatelain and N. Le Bihan, *Exact distribution and high-dimensional asymptotics for improperness test of complex signals* in *IEEE International Conference in Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Brighton, UK, 2019.

[6] P. J. Schreier, L. L. Scharf, and A. Hanssen, “A generalized likelihood ratio test for impropriety of complex signals,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 13, no. 7, pp. 433 – 436, 2006.

[7] A.T. Walden and P. Rubin-Delanchy, “On testing for impropriety of complex-valued gaussian vectors,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 3, pp. 21–51, 2009.

[8] S.A. Andersson and M.D. Perlman, “Two testing problems relating the real and complex multivariate normal distributions,” *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 15, pp. 21–51, 1975.

[9] E. L. Lehmann and Joseph P. Romano, *Testing statistical hypotheses*, Springer Texts in Statistics. Springer, New York, third edition, 2005.

[10] R.J. Muirhead, *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, Wiley-Interscience, 2005.

[11] K. V. Mardia, J. T. Kent, and J. M. Bibby, *Multivariate analysis*, Academic Press London ; New York, 1979.

[12] S. Nadarajah and S. Kotz, “The beta exponential distribution,” *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 91, no. 6, pp. 689 – 697, 2006.

[13] P. Billingsley, *Probability and Measure*, Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 1995.

[14] J. Silverstein, “The Limiting Eigenvalue Distribution of a Multivariate F Matrix,” *SIAM J MATH ANAL.*, vol. 16, no. 3, pp. 641 – 646, 1985

[15] I.M. Johnstone, “Approximate null distribution of the largest root in multivariate analysis,” *Ann. Appl. Stat.*, vol. 3, no. 4, pp. 1616 – 1633, 2009

[16] M. Chiani, “Distribution of the Largest Root of a Matrix for Roy’s Test in Multivariate Analysis of Variance,” *J. Multivar. Anal.*, vol. 143, no. C, pp. 467 – 471, jan 2016

[17] M. Chiani, “Distribution of the largest eigenvalue for real Wishart and Gaussian random matrices and a simple approximation for the Tracy-Widom distribution,” *J. Multivar. Anal.*, vol. 129, pp. 69 – 81, aug 2014