

Factorisation en matrices quaternioniques non-négatives : un nouvel outil pour l'imagerie spectro-polarimétrique

Julien FLAMANT¹, Sebastian MIRON¹, David BRIE¹

¹Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000 Nancy, France

julien.flamant, sebastian.miron, david.brie@univ-lorraine.fr

Résumé – Cet article introduit la notion de factorisation en matrices quaternioniques non-négatives (Q-NMF). Ce nouvel outil étend la factorisation en matrices non-négatives (NMF) usuelle au cas des signaux polarisés. L'approche repose sur deux points clés : (i) la représentation algébrique de l'information de polarisation à l'aide des quaternions et (ii) l'exploitation des contraintes physiques liées à la polarisation généralisant la contrainte de non-négativité. La question centrale de l'unicité de la Q-NMF est abordée. Grâce aux liens entre Q-NMF et NMF nous établissons le rôle primordial joué par l'information de polarisation à des fins d'identification. En tant qu'outil générique d'approximation de rang faible pour les signaux polarisés, la Q-NMF offre un potentiel très prometteur, notamment pour le démixage d'images spectro-polarimétriques.

Abstract – This article introduces the notion of non-negative quaternion matrix factorization (Q-NMF). This new tools extends the usual non-negative matrix factorization (NMF) to the case of polarized signals. The approach relies on two key features: (i) the algebraic representation of polarization information thanks to quaternions and (ii) the exploitation of physical constraints linked to polarization generalizing non-negativity constraints. The central question of the unicity of Q-NMF is explored. We establish the key disambiguating role played by polarization information thanks to the relations between Q-NMF and NMF. As a generic low-rank approximation tool for polarized signals, the Q-NMF appears of very promising use, notably for the unmixing of spectro-polarimetric images.

1 Introduction

L'information de polarisation est essentielle dans de nombreux domaines de l'imagerie, allant de l'astrophysique [1] à la biologie [2]. Elle présente naturellement un fort pouvoir discriminant ainsi qu'une multitude d'informations physiques et morphologiques, inaccessibles à l'imagerie d'intensité conventionnelle. Depuis plusieurs années, l'exploitation de la polarisation dans les systèmes d'imagerie hyperspectrale suscite un intérêt grandissant [3]. Cette *imagerie spectro-polarimétrique* correspond à l'acquisition, en chaque pixel u et longueur d'onde λ , d'un vecteur de paramètres de Stokes $\mathbf{x}(\lambda, u) \in \mathbb{R}^4$ décrivant sous forme énergétique les propriétés de polarisation de la lumière. Ces paramètres obéissent à des contraintes spécifiques liées à la physique de la polarisation. Celles-ci généralisent la contrainte de non-négativité classique : seul un de des paramètres de Stokes est nécessairement non-négatif et les 4 paramètres sont reliés entre eux par une relation d'inégalité.

Une image spectro-polarimétrique peut être représentée sous la forme d'un tableau de données à 3 dimensions (diversités spatiale, spectrale et de polarisation). Dans le cas de sources à bande étroite, l'adaptation de techniques d'approximations de rang faible tensorielles usuelles (ex. CPD avec contraintes [4]) aux spécificités de la polarisation permet alors un démixage efficace des données. En revanche, le cas général de sources à bande large est autrement plus difficile, en raison de l'évolution de la polarisation avec la longueur d'onde, et requiert le développement d'outils d'analyse et de traitement dédiés.

Dans ce but, nous introduisons la notion de factorisation en matrices quaternioniques non-négatives (Q-NMF). Ce nouvel outil étend au cas des signaux polarisés le concept de factorisation en matrices non-négatives (NMF), largement utilisé en démixage hyperspectral [5]. L'approche repose d'une part sur l'exploitation d'une représentation algébrique du vecteur de Stokes $\mathbf{x}(\lambda, u)$ grâce aux quaternions et d'autre part sur l'exploitation des contraintes physiques liées à la polarisation, généralisant la contrainte de non-négativité usuelle. En particulier, nous démontrons le rôle clé joué par les contraintes liées à la polarisation en termes d'unicité de la factorisation. La pertinence de l'approche est illustrée numériquement. Une discussion sur la résolution pratique du problème de la Q-NMF conclut cet article.

2 Préliminaires

2.1 Polarisation

La polarisation est une propriété fondamentale des ondes, notamment électromagnétiques, décrivant la nature géométrique des oscillations. A titre d'exemple, le vecteur du champ électrique de la lumière dans le vide décrit une trajectoire elliptique dans le plan transverse à la direction de propagation : l'onde est dite *elliptiquement polarisée*. Les propriétés d'intensité et de polarisation de la lumière peuvent être décrites par 4 paramètres de Stokes S_0, S_1, S_2, S_3 . Ce jeu de quantités énergétiques, mesurables expérimentalement, est ainsi couramment utilisé

dans de nombreuses applications, notamment en optique [6]. Le premier paramètre de Stokes $S_0 \geq 0$ mesure l'intensité totale, i.e. la somme des intensités issues de la partie polarisée et non-polarisée de la lumière. La contribution relative de ces deux parties est contrôlée par le degré de polarisation Φ

$$\Phi = \frac{\text{intensité partie polarisée}}{\text{intensité totale}} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}, \quad (1)$$

où, par définition, $\Phi \in [0, 1]$. Quand $\Phi = 1$, la lumière est dite *totale* polarisée, tandis que pour $\Phi = 0$ elle est dite *non-polarisée*. Pour $0 < \Phi < 1$, la lumière est dite *partiellement polarisée*. Les trois paramètres de Stokes restants S_1, S_2, S_3 définissent l'état de polarisation de l'onde : S_1 et S_2 encodent les états de polarisation linéaire, tandis que S_3 donne la contribution liée à la polarisation circulaire.

2.2 Représentation quaternionique

Un vecteur de Stokes $(S_0, S_1, S_2, S_3)^\top \in \mathbb{R}^4$ peut être représenté sous forme algébrique par le quaternion¹

$$w = S_0 + iS_3 + jS_1 + kS_2 \in \mathbb{H}, \quad (2)$$

avec $\mathbb{H} = \text{Vect}\{1, i, j, k\}$ l'ensemble des quaternions, i, j, k étant des racines de -1 ($i^2 = j^2 = k^2 = -1$) telles que $ij = k$ et $ij = -ji$. Une réécriture géométrique de (2) est :

$$w = I + I\Phi\mu \quad (3)$$

où $I = S_0 \geq 0$ est l'intensité totale, $\Phi \in [0, 1]$ le degré de polarisation. Le quaternion pur μ tel que $\mu^2 = -1$ est appelé *axe de polarisation*. Il peut être identifié avec un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 sur la sphère de Poincaré [7] encodant l'ellipse de polarisation de l'onde considérée. L'expression (3) illustre également l'un des avantages de l'approche quaternionique, en permettant une séparation naturelle entre l'information purement énergétique (la partie réelle de w , $\text{Re}w = I$) et l'information géométrique liée à la polarisation (la partie imaginaire de w , $\text{Im}w = I\Phi\mu$).

Au delà des représentations algébriques (2)-(3), le formalisme quaternionique permet la construction d'un cadre général pour l'analyse et le filtrage des signaux bivariés ou polarisés, comme démontré récemment [7]. En particulier, les expressions (2)-(3) apparaissent naturellement dans le cadre de la définition de la densité spectrale quaternionique de puissance des signaux bivariés stationnaires au second ordre. Ce lien théorique renforce ainsi la pertinence de l'approche décrite dans cet article pour le démixage d'images spectro-polarimétriques.

2.3 Contrainte de polarisation

Un vecteur de Stokes $(S_0, S_1, S_2, S_3)^\top \in \mathbb{R}^4$ est admissible s'il satisfait les contraintes (S) suivantes :

$$S_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \leq S_0. \quad (S)$$

La première contrainte $S_0 \geq 0$ est usuelle et indique que l'intensité totale est une quantité réelle non-négative. La seconde quantité est spécifique à l'information de polarisation et

montre que l'intensité de la partie polarisée ne peut être plus grande que l'intensité totale. Notons que (S) n'impose pas les paramètres S_1, S_2, S_3 à être non-négatifs.

D'un point de vue mathématique, (S) étend la contrainte de non-négativité usuelle des signaux univariés au cas des signaux bivariés. En effet, considérons la matrice de *cohérence* \mathbf{J} [8, Section 1.4] telle que

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_0 + S_1 & S_2 + iS_3 \\ S_2 - iS_3 & S_0 - S_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}. \quad (4)$$

La matrice \mathbf{J} correspond à la matrice de covariance du champ électrique complexe associé [8, Section 1.4.1]. Ainsi, \mathbf{J} est Hermitienne semi-définie positive ou simplement *non-négative*, caractérisée par $\text{tr} \mathbf{J} \geq 0$ et $\det \mathbf{J} \geq 0$. On obtient alors directement (S) à partir de (4).

Le cœur de l'approche proposée repose sur l'exploitation de (S) au travers de la représentation quaternionique (2) des paramètres de Stokes. On définit alors par extension l'ensemble des quaternions non-négatifs $\mathbb{H}_S \subset \mathbb{H}$ tel que

$$\mathbb{H}_S \triangleq \{q \in \mathbb{H} \mid \text{Re}q \geq 0 \text{ et } |\text{Im}q| \leq \text{Re}q\}. \quad (5)$$

Cette identification formelle entre un quaternion $q \in \mathbb{H}_S$ et un vecteur de Stokes est utilisée dans toute la suite.

3 Factorisation en matrices quaternioniques non-négatives

Cette section introduit la notion de factorisation en matrices quaternioniques non-négatives (Q-NMF), qui généralise la NMF au cas des signaux bivariés. La Q-NMF repose sur deux points clés : (i) la contrainte de polarisation (S) , correspondant à la propriété de non-négativité pour les signaux polarisés et (ii) la représentation algébrique (2) des paramètres de Stokes à l'aide des quaternions.

3.1 Définition

Considérons pour simplifier le cas de l'imagerie hyperspectrale polarisée : pour chaque longueur d'onde λ et pixel u on mesure le vecteur de Stokes représenté sous la forme (2) par $x(\lambda, u) \in \mathbb{H}_S$. On cherche alors une décomposition de ces vecteurs de Stokes spatio-fréquentiels $x(\lambda, u)$ en P sources polarisées, inconnues, telles que

$$x(\lambda, u) = \sum_{p=1}^P w_p(\lambda) h_p(u) \quad (6)$$

où $h_p(u) \geq 0$ est l'activation de la source p au pixel u et $w_p(\lambda) \in \mathbb{H}_S$ est le vecteur de Stokes correspondant à la longueur d'onde λ . L'équation (6) décrit un problème de séparation aveugle de sources polarisées à large bande. C'est un modèle générique : aucune hypothèse sur la dépendance fréquentielle de la polarisation n'est formulée, à la différence d'approches existantes basées sur des modèles bande étroite [9].

¹Cette convention pour l'ordre des paramètres de Stokes est issue de [7].

La résolution de (6) peut se voir comme le problème de factorisation de matrices quaternioniques non-négatives (Q-NMF) suivant

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{H} \quad (7)$$

où $\mathbf{X} \in \mathbb{H}_S^{M \times N}$ est la matrice des données spectro-polarimétriques, i.e. $(\mathbf{X})_{mn} = x_{mn} = x(\lambda_m, u_n)$. La matrice des sources $\mathbf{W} \in \mathbb{H}_S^{M \times P}$ a pour coefficients $(\mathbf{W})_{mp} = w_{mp} = w_p(\nu_m)$, tandis que $\mathbf{H} \in \mathbb{R}_+^{P \times N}$ est la matrice d'activation telle que $(\mathbf{H})_{pn} = h_{pn} = h_p(u_n)$. La Q-NMF (7) de \mathbf{X} repose, d'une part sur l'exploitation de la contrainte (S) pour les sources \mathbf{W} , et d'autre part sur la contrainte usuelle de non-négativité pour les activations \mathbf{H} . Notons enfin que pour $P \leq M, N$ donné, \mathbf{W} et \mathbf{H} définissent une approximation de rang faible de \mathbf{X} .

3.2 Lien avec la NMF

La décomposition en parties réelle et imaginaire d'un quaternion permet de réécrire la Q-NMF (7) comme suit

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{H} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re } \mathbf{X} = [\text{Re } \mathbf{W}] \mathbf{H} & (\text{NMF}) \\ \text{Im } \mathbf{X} = [\text{Im } \mathbf{W}] \mathbf{H} & (\text{polarisation}) \end{cases} \quad (8)$$

L'équation (8) montre que la Q-NMF (7) peut être vue comme un problème de co-factorisation matriciel avec la matrice des activations \mathbf{H} pour facteur commun. Le premier problème $\text{Re } \mathbf{X} = [\text{Re } \mathbf{W}] \mathbf{H}$, décrit un problème NMF standard sur la partie réelle de \mathbf{X} , c'est à dire sur les données d'intensité (paramètre de Stokes $S_0 \geq 0$). Le second problème $\text{Im } \mathbf{X} = [\text{Im } \mathbf{W}] \mathbf{H}$ cherche à factoriser la partie imaginaire de \mathbf{X} décrivant les propriétés de polarisation (paramètres de Stokes S_1, S_2, S_3). Ces deux problèmes de factorisation sont couplés en raison de la présence de la matrice des activations \mathbf{H} dans ces deux derniers, mais aussi en raison de la nature de la contrainte (S) liant les facteurs \mathbf{W} des deux problèmes.

La relation entre (7) et (8) donne une illustration supplémentaire de la manière dont la Q-NMF généralise la NMF au cas des signaux bivariés ou polarisés. En particulier, (8) permet de quantifier précisément l'impact en termes d'identifiabilité de l'information de polarisation et de la contrainte (S) associée.

4 Unicité de la Q-NMF

La Q-NMF (7) soulève une question fondamentale : quelles sont les conditions garantissant l'unicité des facteurs \mathbf{W} et \mathbf{H} de la décomposition ? Comme pour la NMF [10–13], cette problématique liée à l'*identifiabilité* des facteurs permet de garantir l'interprétabilité des facteurs \mathbf{W} et \mathbf{H} .

Soit $\mathbf{X} \in \mathbb{H}_S^{M \times N}$ et supposons qu'il existe deux facteurs $\mathbf{W} \in \mathbb{H}_S^{M \times P}$ et $\mathbf{H} \in \mathbb{R}_+^{P \times N}$ tels que $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{H}$. Considérons à présent une matrice $\mathbf{T} \in \mathbb{H}^{P \times P}$ inversible. Toute paire de facteurs $(\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{H}})$ définie par $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}\mathbf{T}$ et $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}$ laisse les données inchangées $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{W}}\tilde{\mathbf{H}}$. Cependant, les contraintes de non-négativité réelle et quaternionique sur les nouveaux facteurs requièrent $\tilde{\mathbf{W}} \in \mathbb{H}_S^{M \times P}$ et $\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}_+^{P \times N}$. Ceci réduit fortement l'ensemble des matrices \mathbf{T} admissible :

ainsi, la contrainte de non-négativité réelle sur \mathbf{H} implique que \mathbf{T} soit une matrice réelle, ce que l'on suppose à présent.

La matrice de transformation \mathbf{T} étant réelle, la Q-NMF exhibe les mêmes ambiguïtés triviales de la NMF, à savoir :

- indétermination d'échelle :

$$\mathbf{T} = \text{diag}(t_1, t_2, \dots, t_P), t_i > 0, 1 \leq i \leq P \quad (9)$$

- indétermination d'ordre :

$$\mathbf{T} \text{ est une matrice de permutation} \quad (10)$$

Ces résultats peuvent être directement obtenus par adaptation de la preuve du cas NMF [10] au cas de la Q-NMF. La Q-NMF et la NMF partagent ainsi la même définition pour l'unicité [10] : pour \mathbf{X} donné, la Q-NMF $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{H}$ est dite *essentiellement unique* si les seules indéterminations sont les indéterminations d'échelle (9) et les indéterminations d'ordre (10). Le restant de cette section établit l'impact des contraintes (S) pour \mathbf{W} et de non-négativité pour \mathbf{H} sur l'unicité des facteurs de la Q-NMF.

4.1 Cas de deux sources ($P = 2$)

Bien que le cas particulier $P = 2$ puisse apparaître réducteur, son étude nous permet de tirer de nombreux enseignements quant au rôle joué par la contrainte (S). Supposons que la Q-NMF $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{H}$ existe. Pour $1 \leq m \leq M$ et $1 \leq n \leq N$, les coefficients de chaque facteurs \mathbf{W} et \mathbf{H} sont donnés par

$$(\mathbf{W})_{mp} = I_{mp} + I_{mp}\Phi_{mp}\boldsymbol{\mu}_{mp} \text{ et } (\mathbf{H})_{pn} = h_{pn} \quad (11)$$

où $p = 1, 2$ correspond à l'indice de chaque source. Nous avons démontré dans [14] la condition suffisante d'unicité suivante :

Proposition 1. *Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- $\exists m_1, m_2 \in \{1, 2, \dots, M\}$ t.q.

$$\begin{cases} \Phi_{m_1 1} = 1, \Phi_{m_1 2}\boldsymbol{\mu}_{m_1 2} \neq \boldsymbol{\mu}_{m_1 1} \\ I_{m_1 1} \geq f(\Phi_{m_1 2}, \boldsymbol{\mu}_{m_1 1}, \boldsymbol{\mu}_{m_1 2}) I_{m_1 2} \\ \Phi_{m_2 2} = 1, \Phi_{m_2 1}\boldsymbol{\mu}_{m_2 1} \neq \boldsymbol{\mu}_{m_2 2} \\ I_{m_2 2} \geq f(\Phi_{m_2 1}, \boldsymbol{\mu}_{m_2 1}, \boldsymbol{\mu}_{m_2 2}) I_{m_2 1} \end{cases} \quad (C1)$$

où f est une fonction bornée à valeurs dans $[0, 1]$.

- $\exists n_1, n_2 \in \{1, 2, \dots, N\}, n_1 \neq n_2$ t.q.

$$\begin{cases} h_{1n_1} > 0 \text{ et } h_{2n_1} = 0 \\ h_{2n_2} > 0 \text{ et } h_{1n_2} = 0 \end{cases} \quad (C2)$$

alors la Q-NMF $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{H}$ est essentiellement unique.

Comme attendu, la condition (C2) est identique à celle obtenue pour le facteur d'activation de la NMF [10]. En revanche, la condition (C1) démontre le rôle clé joué par l'information de polarisation. A la différence du cas NMF qui requiert l'annulation à tour de rôle des sources [10], (C1) montre qu'il est suffisant qu'il existe au moins 2 indices m_1, m_2 (non nécessairement différents !) tels qu'en m_1 , la source 1 soit totalement polarisée, d'intensité plus élevée d'un facteur appartenant à $[0, 1]$ par rapport à la source 2, et que cette dernière n'ait pas exactement le même état de polarisation que la source 1. Le cas m_2 est obtenu par symétrie. Ces conditions d'unicité apparaissent particulièrement peu restrictives comparées au cas de la NMF [10].

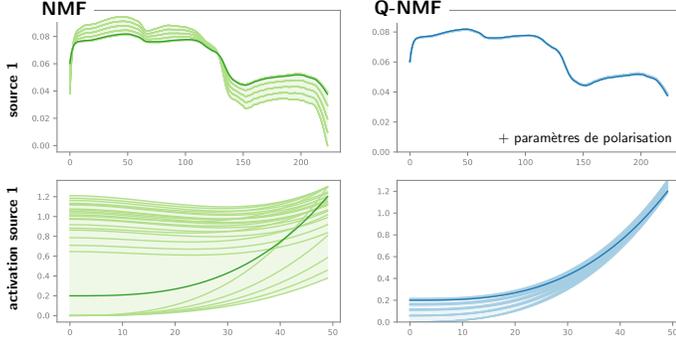


FIG. 1: Ensemble de solutions admissibles pour la NMF et la Q-NMF. L'information de polarisation permet de fortement réduire l'espace des solutions admissibles.

4.2 Cas général ($P \geq 2$)

L'étude de l'unicité de la Q-NMF dans le cas général $P \geq 2$ est bien plus complexe. Toutefois, la relation entre la Q-NMF et la NMF (cf. Section 3.2) permet d'illustrer l'intérêt de l'information de polarisation dans les cas où une approche NMF basée sur la seule information d'intensité n'est pas identifiable.

On se place donc dans le cas où les sources ne s'annulent jamais, *i.e.* pour tout m, p , $\text{Re}W_{mp} > 0$. Dans ce cas, le problème NMF associé $\text{Re}\mathbf{X} = [\text{Re}\mathbf{W}]\mathbf{H}$ est réputé être non-identifiable, car une condition nécessaire d'unicité de la NMF réside dans l'annulation des sources deux à deux [10]. Au contraire, la proposition 2 montre que dans ce même cas, il existe une condition nécessaire d'unicité de la Q-NMF impliquant l'information de polarisation. La preuve de ce résultat est donnée dans [14].

Proposition 2. *Supposons que la Q-NMF $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{H}$ est essentiellement unique. Les conditions suivantes sont alors vérifiées :*

- $\forall(p, q), p \neq q,$

$$\exists m \text{ t.q. } \Phi_{mp} = 1, \Phi_{mq}\mu_{mq} \neq \mu_{mp}, \quad (\text{A1})$$

- $\forall(p, q), p \neq q,$

$$\exists n \text{ t.q. } h_{pn} = 0 \text{ et } h_{qn} > 0. \quad (\text{A2})$$

Etant donné une Q-NMF essentiellement unique avec des sources strictement positives, pour tout paire de sources distinctes (p, q) deux critères doivent donc être vérifiés : (A1) il existe un indice m tel que la source p soit totalement polarisée et la source q ait un état de polarisation différent; (A2) il existe un indice n tel que la source q soit active et la source p inactive. Cette dernière condition (A2) est identique à la celle obtenue pour le facteur d'activation de la NMF [10].

5 Discussion

En toute généralité, la contrainte de polarisation (\mathcal{S}) permet de réduire grandement l'espace des solutions admissibles de la Q-NMF $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{H}$ par rapport à la NMF $\text{Re}\mathbf{X} = [\text{Re}\mathbf{W}]\mathbf{H}$

associée, et améliore ainsi l'identifiabilité des facteurs sources et des activations. La Fig. 1 illustre ce phénomène : pour une source donnée, comparé à la NMF, l'ensemble admissible des sources et activations apparaît clairement plus restreint pour la Q-NMF, jusqu'à être quasi-unique pour le facteur source.

D'un point de vue pratique, nous montrons dans [14] que la résolution de la Q-NMF (3) peut s'effectuer par un algorithme de type alternating least squares (ALS). Cet algorithme est remarquablement simple et offre de bonnes performances en pratique. Il fait néanmoins appel à des résultats non-triviaux sur l'optimisation de fonctions à variables quaternioniques [15], ne pouvant être reproduits ici, faute d'espace.

Ces premiers résultats théoriques et méthodologiques illustrent la capacité générale de la Q-NMF à exploiter la spécificité de l'information de polarisation. Ce nouvel outil apparaît très prometteur, nous permettant d'envisager de nombreux travaux futurs sur les plans théoriques, algorithmiques et applicatifs.

Remerciements – Les auteurs remercient le soutien de la région Grand Est et du projet ANR-15-CE10-0007 OPTIFIN.

Références

- [1] R. Antonucci, "Optical spectropolarimetry of radio galaxies," *Astrophys. J.*, vol. 278, pp. 499–520, 1984.
- [2] Y. Zhao, L. Zhang, and Q. Pan, "Spectropolarimetric imaging for pathological analysis of skin," *Appl. Opt.*, vol. 48, no. 10, pp. 236–246, 2009.
- [3] T. Mu *et al.*, "Static hyperspectral imaging polarimeter for full linear stokes parameters," *Opt. Exp.*, vol. 20, no. 16, pp. 18 194–18 201, 2012.
- [4] M. A. Veganzones, J. E. Cohen, R. C. Farias, J. Chanussot, and P. Comon, "Nonnegative tensor cp decomposition of hyperspectral data," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 54, no. 5, pp. 2577–2588, 2015.
- [5] W.-K. Ma *et al.*, "A signal processing perspective on hyperspectral unmixing: Insights from remote sensing," *IEEE Sig. Proc. Mag.*, vol. 31, no. 1, pp. 67–81, 2014.
- [6] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*. Pergamon Press, 1980.
- [7] J. Flamant, "A general approach for the analysis and filtering of bivariate signals," 2018. [Online]. Available: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01926941/>
- [8] J. Gil and R. Ossikovski, *Polarized Light and the Mueller matrix approach*. CRC Press, 2016.
- [9] F. E. Raimondi *et al.*, "Wideband multiple diversity tensor array processing," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 65, no. 20, pp. 5334–5346, 2017.
- [10] S. Moussaoui, D. Brie, and J. Idier, "Non-negative source separation: range of admissible solutions and conditions for the uniqueness of the solution," in *IEEE ICASSP'05*, vol. 5, 2005, pp. v–289.
- [11] D. Donoho and V. Stodden, "When does non-negative matrix factorization give a correct decomposition into parts?" in *Advances in neural information processing systems*, 2004, pp. 1141–1148.
- [12] H. Laurberg *et al.*, "Theorems on positive data: On the uniqueness of nmf," *Computational intelligence and neuroscience*, vol. 2008, 2008.
- [13] K. Huang, N. D. Sidiropoulos, and A. Swami, "Non-negative matrix factorization revisited: Uniqueness and algorithm for symmetric decomposition," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 62, no. 1, pp. 211–224, 2014.
- [14] J. Flamant, S. Miron, and D. Brie, "Quaternion non-negative matrix factorization: definition, uniqueness and algorithm," 2019, arXiv:1903.10593.
- [15] D. Xu and D. P. Mandic, "The theory of quaternion matrix derivatives," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 63, no. 6, pp. 1543–1556, 2015.