Consistance probabiliste des modèles de simulation de canaux aléatoires corrélés avec Doppler variant dans le temps

Xavier LETURC, Christophe J. LE MARTRET

Thales SIX GTS France
4 avenue des Louvresses, 92622 Gennevilliers Cedex, France
(xavier.leturc)(christophe.le_martret)@thalesgroup.com

Résumé – Dans cet article, nous étudions un modèle de simulation de canaux aléatoires corrélés dans le temps permettant de prendre en compte des variations arbitraires de vitesse de l'émetteur ou du récepteur. Pour ce faire, nous introduisons les notions de consistance déterministe et probabiliste afin de vérifier la validité du modèle. Nous mettons en évidence les limites du modèle de simulation en démontrant que ce dernier n'est consistant probabiliste que dans certains cas particuliers que nous identifions.

Abstract – In this paper, we study a model to simulate random time-correlated propagation channels for arbitrary velocities variations of the transmitter or the receiver. To this end, we introduce the notions of deterministic and probabilistic consistencies in order to check the validity of the model. We show the limitations of the simulation model by proving that it is probabilistically consistent only in some specific cases that we identify.

1 Introduction

La simulation haute fidélité de réseaux est une étape clé de la validation des systèmes de communication avec des équipements utilisant des interfaces d'accès au réseau complexes (traitements adaptatifs, multi-utilisateurs...). La simulation dite « haute fidélité » (par exemple [1, 2]) comprend généralement au moins la couche physique simulée en bande de base (échantillons complexes) ainsi qu'une couche d'accès au réseau où les paquets de données et de signalisation sont transmis à travers le canal et subissent ses effets (bruit, distorsion...). La simulation fidèle des effets de propagation est importante car les performances du réseau dépendent fortement de ces caractéristiques.

On se place dans le cas d'un environnement de propagation partiellement obstrué dans lequel tout ou partie des trajets entre l'émetteur et le récepteur ne sont pas en vue directe. En raison de la mobilité des nœuds, les amplitudes des trajets multiples du canal peuvent être modélisées comme un processus stochastique corrélé dans le temps. Cette corrélation est induite par l'effet Doppler sous-jacent à la vitesse des mobiles. La distribution des amplitudes est généralement modélisée par une loi de Rayleigh ou de Rice de paramètre K (le cas Rayleigh étant un cas particulier de Rice pour $K = 0$) selon la proportion de la puissance issue des trajets en vue direct. Lorsque l'émetteur est fixe et que le récepteur se déplace à vitesse constante, cas dénommé *fixe vers mobile* (fix-to-mobile - F2M), ce type de canal est bien représenté par le modèle de Clarke [3]. Pour la composante Rayleigh, le modèle suppose que le récepteur reçoit un ensemble de micro trajets issus de diffuseurs situés tout autour de lui avec des angles d'arrivée équirépartis sur $[0, 2\pi]$ et de même puissance. Chaque micro trajet est affecté d'un effet Doppler dont la fréquence est proportionnelle à la projection du vecteur de déplacement du mobile sur les micro trajets. Les micro trajets étant équipartis sur $[0, 2\pi]$, le modèle ne dépend pas de la direction du mobile, mais seulement de sa vitesse. Les décalages Doppler induits sur chaque micro trajet par le mouvement du récepteur créent un étalement Doppler qui se traduit par la corrélation temporelle du processus stochastique. Une extension du modèle de Clarke au cas où l'émetteur et le récepteur sont mobiles, cas dénommé *mobile vers mobile* (mobile-to-mobile - M2M), a été proposée dans [4].

Parmi la myriade des solutions proposées pour simuler un canal selon le modèle de Clarke, la méthode appelée *somme de sinusoïdes* (sum of sinusoids - SoS) est la plus populaire compte tenu de sa simplicité d'implémentation et de ses bonnes performances lorsqu'elle est bien paramétrée. Afin de simuler des scénarios réalistes pour lesquels les mobiles se déplacent avec des vitesses qui varient dans le temps (démarrage/arrêt, accélération/décélération...), il faut des modèles de simulation qui puissent prendre en compte cette spécificité. Ce n'est que très récemment qu'une approche pertinente adaptée à ce contexte fut proposée en 2016 dans [5] pour le cas F2M puis étendue au cas M2M dans [6]. Dans ces deux articles, la validité du modèle est établie dans un cas particulier selon un critère probabiliste basé sur les deux premiers moments du Doppler instantané. Ces résultats ont été généralisés dans [7] en introduisant la notion de consistance déterministe qui garantit que les fréquences Doppler instantanées du modèle sont égales à celles du modèle théoriques. *L'objet de cet article est de prolonger les travaux de [7] en établissant de nouveaux résultats caractérisant les propriétés de consistance du modèle de simulation* *afin d'en appréhender ses limites.*

Cet article est organisé de la manière suivante : dans la section 2, nous commençons par rappeler le modèle de simulation considéré, puis nous définissons les critères de validité utilisés pour vérifier sa pertinence dans la section 3. Dans la section 4, nous établissons trois nouveaux résultats qui complètent ceux obtenus dans [7]. Dans la section 5, nous terminons l'article en effectuant une synthèse des résultats obtenus et en concluant.

Remarque : le modèle proposé dans [7] est donné dans le contexte M2M. Afin d'alléger les notations, les développements présentés ici sont fait dans le contexte F2M mais se transposent de manière immédiate au M2M.

2 Modèle de simulation SoS

Dans le contexte F2M, le modèle général de simulation SoS permettant de prendre en compte les vitesses qui varient dans le temps est décrit par :

$$h(t) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{j(\phi_n(t)+\psi_n)}, \tag{1}$$

où N représente le nombre de micro trajets, ψ_n est la phase du $n$ème micro trajet et $\phi_n(t)$ est une fonction dont l'expression est spécifique à la solution proposée.

Soit $f_n(t)$ la fréquence Doppler instantanée théorique que le modèle de simulation doit restituer, alors $\phi_n(t)$ dans (1) doit vérifier

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\phi_n(t) = f_n(t), \quad \forall t. \tag{2}$$

C'est cette relation fondamentale invoquée dans [5] qui permet de définir correctement le modèle mathématique de simulation dans le cas de mobiles à vitesses variables.

Dans le cas d'une vitesse variable $v(t)$, on doit avoir

$$f_n(t) = 2\pi \frac{f_p}{c} \cos(\theta_n) v(t), \tag{3}$$

où f_p est la fréquence de l'onde, c la célérité de la lumière, v la vitesse du mobile et θ_n l'angle d'arrivée du $n$ème micro trajet. D'après (2) nous obtenons :

$$\phi_n(t) = 2\pi \int_0^t f_n(u)du = 2\pi \frac{f_p}{c} \cos(\theta_n) \int_0^t v(u)du. \tag{4}$$

On vérifie que ce modèle inclut bien le cas usuel d'un mobile à vitesse constante $v(t) = v$ pour lequel on a $\phi_n(t) = 2\pi \frac{f_p}{c} v \cos(\theta_n) t$. En effet, dans ce cas les fréquences instantanées de (1) sont bien égales aux fréquences Doppler théoriques $f_n = 2\pi \frac{f_p}{c} v \cos(\theta_n)$.

Remarque : dans [6], les auteurs introduisent des considérations géométriques afin d'essayer de donner un sens physique aux micro réflecteurs du modèle de Clarke, notant à juste titre que ce modèle ne dépend pas de la direction du mobile. D'après leur modèle, le mouvement du récepteur induit des variations temporelles des angles des micro trajets, qui associées à une vitesse variant dans le temps donne des expressions de la forme $\phi_n(t) = 2\pi \frac{f_p}{c} \int_0^t v(u)\cos(\alpha_n(u))du + \theta_n$, où $\alpha_n(t)$ sont les angles variant dans le temps. Afin de garder des expressions simples, nous supposerons dans la suite que les angles des micro trajets ne varient pas dans le temps, mais toutes les démonstrations présentées s'appliquent au formalisme de [6] en remplaçant $v(u)$ par $v(u)\cos(\alpha_n(u))$ dans (4).

Dans la suite de l'article, nous supposerons que le modèle de simulation considéré est donné par (1) et (4). Nous supposerons aussi que les θ_n et les ψ_n sont des variables aléatoires, que les θ_n sont indépendants des ψ_n et que les ψ_n sont indépendants et équiréparties sur $[0, 2\pi]$.

3 Définitions de la consistance

3.1 Consistance probabiliste

Dans [6], les auteurs définissent la notion de consistance du modèle de simulation par rapport aux deux premiers moments des fréquences Doppler instantanées. Nous avons dénommé cette propriété *consistance probabiliste* dans [7]. L'idée est de vérifier que les deux premiers moments des fréquences Doppler générées par le modèle de canal simulé par (1) sont bien égaux aux deux premiers moments des fréquences Doppler théoriques attendues. On peut noter que le signal (1) n'est de manière général pas stationnaire et donc que les outils utilisés pour estimer ses moments sont adaptés à ce contexte.

Nous introduisons maintenant quelques définitions afin d'établir formellement la notion de consistance probabiliste. On définit le moment d'ordre k de la fréquence Doppler instantanée comme suit :

$$B_{f_n}^{(k)}(t) := \mathbb{E}_{\theta_n}[(f_n(t))^k], \tag{5}$$

qui constitue la référence théorique que notre modèle de simulation doit respecter au mieux.

On définit ensuite le moment d'ordre k de la densité spectrale de puissance instantanée de $h(t)$ comme suit :

$$B_{hh}^{(k)}(t) := \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^k S_{hh}(t,f)df}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{hh}(t,f)df}, \tag{6}$$

où

$$S_{hh}(t,f) := \int_{-\infty}^{+\infty} R_{hh}(t,\tau)e^{-2j\pi f\tau}d\tau, \tag{7}$$

avec

$$R_{hh}(t,\tau) := \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\psi}}\left[h\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\bar{h}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]. \tag{8}$$

En utilisant la propriété de la dérivée de la transformée de Fourier $\frac{\partial^k}{\partial \tau^k} R_{hh}(t,\tau) = (2\pi j)^k \int f^k S(t,f) e^{j2\pi f\tau} df$, on identifie (6) comme

$$B_{hh}^{(k)}(t) = \frac{1}{(j2\pi)^k} \frac{R_{hh}^{(k)}(t,0)}{R_{hh}(t,0)}, \tag{9}$$

où $R_{hh}^{(k)}(t,0)$ est la dérivée $k$ème de $R_{hh}(t,\tau)$ par rapport à τ, évaluée en $\tau = 0$. Il est montré dans [7, Eq. (17)] que $R_{hh}(t,0) = 1$ et donc (9) peut se réécrire comme suit :

$$B_{hh}^{(k)}(t) := \frac{1}{(j2\pi)^k} R_{hh}^{(k)}(t,0). \tag{10}$$

La consistance probabiliste à l'ordre k est alors définie par :

Définition 1. *Un modèle de canal non-stationnaire est* **consistant probabiliste (CP) à l'ordre** k *si et seulement si la condition suivante est vérifiée :*

$$B_{f_n}^{(n)}(t) = B_{hh}^{(n)}(t), \quad \forall n \leq k, \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{11}$$

La consistance telle qu'introduite dans [5] peut être vue comme une consistance probabiliste à l'ordre deux et peut être qualifiée de consistance probabiliste au sens large :

Définition 2. *Un modèle de canal non-stationnaire CP à l'ordre deux est appelé* **consistant probabiliste au sens large (CPSL)**.

On peut aussi définir une consistance probabiliste stricte :

Définition 3. *Un modèle de canal non-stationnaire CP à tous les ordres est appelé* **consistant probabiliste au sens stricte (CPSS)**.

3.2 Consistance déterministe

L'approche utilisée dans [5] invoque la relation liant la fréquence instantanée et la phase des micro trajets dans l'expression (1) mais en l'appliquant dans le cas particulier d'un mouvement uniformément accélérée, sans établir un modèle général valant pour un vitesse $v(t)$ quelconque. L'argument des auteurs est de dire que ce modèle de cinématique correspond au développement au premier ordre de la vitesse pour un mouvement quelconque. Nous avons proposé dans [7] de définir le modèle général de simulation comme (1) dans lequel les phases vérifient (2), quelles que soit $f_n(t)$. Nous avons appelé cette propriété la *consistance déterministe*, qui garantit que les fréquences Doppler instantanées du modèle de simulation sont égales à celles du modèle théorique :

Définition 4. *Un modèle de canal non-stationnaire sous la forme* (1) *dont les phases vérifient la condition* (2) *est appelé* **consistant déterministe**.

4 Résultats sur la consistance

En premier lieu, nous rappelons le théorème issu de [7] avec les définitions introduites dans cet article :

Théorème 1. *[7, théorème 1] La consistance déterministe du modèle de simulation (1) implique la CPSL quelles que soient la densité de probabilité des θ_n et la vitesse.*

Nous étendons ici le théorème 1 à tout les ordres dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré, pour lequel la vitesse s'écrit :

$$v(t) = v_0 + at, \quad \forall t. \tag{12}$$

Théorème 2. *Dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré, le modèle de simulation consistant déterministe est CPSS.*

Démonstration. On doit démontrer que $B_{hh}^{(k)}(t) = \mathbb{E}_{\theta_n}[f_n(t)^k]$, $\forall k, \forall t$. Dans un premier temps, on rappelle que dans [7, Eq. (16)], il est montré que (8) se ramène à :

$$R_{hh}(t,\tau) = \mathbb{E}_{\theta_n}\left[e^{jD_n(t,\tau)}\right]. \tag{13}$$

avec $D_n(t,\tau) := \phi_n(t+\tau/2) - \phi_n(t-\tau/2)$. Dans le cas du mouvement uniformément accéléré, avec v_0 et a des réels positifs. En remplaçant (12) dans (4), on obtient :

$$D_n(t,\tau) = 2\pi\tau f_n(t). \tag{14}$$

Après avoir remplacé (14) dans (13), le calcul la dérivée $k$ème de $R_{hh}(t,\tau)$ par rapport à τ s'exprime comme :

$$R_{hh}^{(k)}(t,\tau) = (j2\pi)^k \mathbb{E}_{\theta_n}\left[f_n(t)^k e^{j2\pi\tau f_n(t)}\right], \tag{15}$$

qui injectée dans (10) donne :

$$B_{hh}^{(k)}(t) = \mathbb{E}_{\theta_n}[(f_n(t))^k], \tag{16}$$

ce qui conclut la démonstration. □

Le théorème suivant indique que le modèle de simulation consistant déterministe n'est consistant à l'ordre trois que dans certains cas particuliers que nous identifions.

Théorème 3. *Le modèle de simulation consistant déterministe n'est CP à l'ordre trois que si : a) le mouvement est uniformément accéléré, ou si b) $\mathbb{E}_{\theta_n}[\cos(\theta_n)] = 0$, $\forall n$, quelle que soit la vitesse du mobile.*

Démonstration. La démonstration pour le cas a) est immédiate en vertu du théorème 2. Pour le cas b), compte tenu du théorème 1, il suffit de calculer $B_{hh}^{(3)}(t)$ à partir de (10) qui nécessite le calcul de la dérivée troisième de $R_{hh}(t,\tau)$ par rapport à τ. En partant de (13), on obtient :

$$\begin{aligned} R_{hh}^{(3)}(t,\tau) =& \mathbb{E}_{\theta_n}\Bigg[e^{jD_n(t,\tau)}\bigg(-j(D_n^{(1)}(t,\tau))^3 \\ & -3D_n^{(2)}(t,\tau)D_n^{(1)}(t,\tau) + jD_n^{(3)}(t,\tau)\bigg)\Bigg], \end{aligned} \tag{17}$$

où $D_n^{(k)}(t,\tau)$ est la dérivée $k$ème de $D_n(t,\tau)$ par rapport à τ. En injectant (4) dans la définition de $D_n(t,\tau)$, on obtient $D_n^{(1)}(t,\tau) = \pi(f_n(t+\tau/2) + f_n(t-\tau/2))$, $D_n^{(2)}(t,\tau) = \pi/2(f_n^{(1)}(t+\tau/2) - f_n^{(1)}(t-\tau/2))$ et $D_n^{(3)}(t,\tau) = \pi/4(f_n^{(2)}(t+\tau/2) + f_n^{(2)}(t-\tau/2))$, où $f_n^{(k)}(x)$ est la dérivée $k$ème de $f_n(x)$ par rapport à x. En remplaçant les expressions de $D_n^{(k)}(t,\tau)$ précédemment trouvées dans (17) on obtient d'après (10) :

$$B_{hh}^{(3)}(t) := \mathbb{E}_{\theta_n}\left[f_n(t)^3 - \frac{1}{16\pi^2}f_n^{(2)}(t)\right]. \tag{18}$$

D'après la définition 1, on en déduit que le modèle déterministe consistant sera CP à l'ordre trois si et seulement si on a $\mathbb{E}_{\theta_n}[f_n^{(2)}(t)] = 0$, $\forall t$, ce qui d'après (3) est équivalent à :

$$v^{(2)}(t)\mathbb{E}_{\theta_n}[\cos(\theta_n)] = 0, \quad \forall t, \tag{19}$$

où $v^{(2)}(t)$ est la dérivée seconde de $v(t)$. Pour un mouvement quelconque du mobile, l'équation (19) n'est vérifiée que si $\mathbb{E}_{\theta_n}[\cos(\theta_n)] = 0$, ce qui conclut la démonstration. □

Les densités de probabilité définies sur $[0, 2\pi]$ vérifiant la condition $\mathbb{E}_{\theta_n}[\cos(\theta_n)] = 0$ sont caractérisées par leur symétrie par rapport au point $\theta = \pi$. Cela comprend entre autres, le cas particulier des angles uniformément répartis sur $[0, 2\pi]$, fréquemment considéré dans la littérature.

Le théorème suivant indique que le modèle de simulation consistant déterministe n'est CP à l'ordre quatre que dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré.

Théorème 4. *Le modèle de simulation* (1) *n'est CP à l'ordre quatre que dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré*

Démonstration. La démonstration nécessite de calculer $B_{hh}^{(4)}(t)$ à partir de (10). Le calcul de la dérivée quatrième de $R_{hh}(t, \tau)$ par rapport à τ, s'exprime comme :

$$\begin{aligned} R_{hh}^{(4)}(t,\tau) =&\mathbb{E}_{\theta_n}\left[e^{jD_n(t,\tau)}\left((D_n^{(1)}(t,\tau))^4\right.\right.\\ &- 6jD_n^{(2)}(t,\tau)(D_n^{(1)}(t,\tau))^2\\ &- 4D_n^{(1)}(t,\tau)D_n^{(3)}(t,\tau)\\ &\left.\left.- 3(D_n^{(2)}(t,\tau))^2 + jD_n^{(4)}(t,\tau)\right)\right], \end{aligned} \tag{20}$$

avec $D_n^{(4)}(t,\tau) = \pi/8(f_n^{(3)}(t+\tau/2) - f_n^{(3)}(t-\tau/2))$. En remplaçant (20) dans (10), on obtient :

$$B_{hh}^{(4)}(t) := \mathbb{E}_{\theta_n}\left[f_n(t)^4 - 4\pi^2 f_n(t) f_n^{(2)}(t)\right]. \tag{21}$$

D'après la définition 1, on en déduit que le modèle déterministe consistant sera CP à l'ordre quatre si et seulement si on a $\mathbb{E}_{\theta_n}\left[f_n(t)f_n^{(2)}(t)\right] = 0$. D'après (3) cette condition est équivalente à :

$$v(t)v^{(2)}(t)\mathbb{E}_{\theta_n}[\cos^2(\theta_n)] = 0, \tag{22}$$

condition qui n'est vérifiée que si $v(t)v^{(2)}(t) = 0$ ce qui conclut la démonstration. □

5 Synthèse et conclusion

5.1 Synthèse

Dans la section 4, nous avons démontré plusieurs propriétés du modèle de simulation consistant déterministe en termes de consistance probabiliste. Ces résultats dépendent de la cinématique du mobile ainsi que des angles des micro trajets θ_n. Ils sont résumés dans le tableau 1. Ces résultats mettent en évidence les limites du modèle de simulation d'un point de vu consistance probabiliste puisque ce dernier n'est CPSS que pour un mouvement uniformément accéléré.

TABLE 1: Synthèse des résultats concernant la consistance probabiliste du modèle de simulation consistant déterministe.

Consistance	modèle pour $v(t)$	Propriétés des θ_n
CPSL	quelconque	quelconque
CP à l'ordre 3	quelconque	$\mathbb{E}_{\theta_n}[\cos(\theta_n)] = 0$
CP à l'ordre 4	accélération uniforme	quelconque
CPSS	accélération uniforme	quelconque

5.2 Conclusion

Dans cet article, nous avons considéré le modèle consistant déterministe qui apparait adapté pour simuler de manière pertinente des canaux aléatoires corrélés selon le modèle de Clarke lorsque la vitesse des mobiles varie dans le temps. Ce modèle généralise celui introduit dans [6] de manière formelle. Nous avons établi certaines propriétés de ce modèle en terme de consistance probabiliste et montré qu'il n'est pas CPSS sauf dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré. Il peut être aussi CP à l'ordre trois sous certaines conditions sur les angles des micro trajets.

Dans des travaux futurs, il pourrait-être intéressant de comprendre comment se traduit la non consistance probabiliste stricte sur la qualité du signal simulé ou de rechercher d'autres types de consistance déterministe garantissant une CPSS.

Références

[1] J. Mittag, S. Papanastasiou, H. Hartenstein, and E. G. Strom, "Enabling accurate cross-layer PHY/MAC/NET simulation studies of vehicular communication networks," *Proceedings of the IEEE*, vol. 99, no. 7, pp. 1311–1326, Jul. 2011.

[2] L. Rose, R. Massin, L. Vijayandran, M. Debbah, and C. J. Le Martret, "CORASMA program on cognitive radio for tactical networks : High fidelity simulator and first results on dynamic frequency allocation," in *IEEE Military Comm. Conf. (MILCOM)*, Nov. 2013, pp. 360–368.

[3] R. H. Clarke, "A statistical theory of mobile-radio reception," *The Bell System Technical Journal*, vol. 47, no. 6, pp. 957–1000, Jul. 1968.

[4] A. S. Akki and F. Haber, "A statistical model of mobile-to-mobile land communication channel," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 35, no. 1, pp. 2–7, Feb. 1986.

[5] M. Patzold and C. A. Gutiérrez, "The Wigner distribution of sum-of-cissoids and sum-of-chirps processes for the modelling of stationary and non-stationary mobile channels," in *2016 IEEE 83rd Vehicular Technology Conference (VTC Spring)*, May 2016, pp. 1–5.

[6] M. Patzold, C. A. Gutiérrez, and N. Youssef, "On the consistency of non-stationary multipath fading channels with respect to the average doppler shift and the doppler spread," in *2017 IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, Mar. 2017, pp. 1–6.

[7] S. Imbert, X. Leturc, and C. J. Le Martret, "On the simulation of correlated mobile-to-mobile fading channels for time-varying velocities," in *2018 International Conference on Military Communications and Information Systems (ICMCIS)*, May 2018.