

Reconstruction d’image par inversion de Fredholm pour une PSF évanescence, cas de la coronographie solaire spatiale

Céline THEYS¹, Claude AIME¹, Henri LANTÉRI¹

¹Université Côte d’Azur, Observatoire de la Côte d’Azur, CNRS, Laboratoire Lagrange, France
celine.theys@univ-cotedazur.fr, claude.aime@univ-cotedazur.fr,
hlanteri@univ-cotedazur.fr

Résumé – Nous décrivons l’inversion de l’intégrale de Fredholm pour des images subissant un fort vignettage conduisant à des PSFs dites évanescences car disparaissant vers un bord du champ. L’algorithme utilisé, de type gradient avec contrainte de non-négativité, utilise une régularisation adaptative et automatique faisant usage du rapport de Strehl. Cette régularisation s’avère déterminante pour la qualité de la reconstruction. Les simulations effectuées en présence d’un bruit composite Gaussien Poissonien montrent d’excellentes reconstructions jusqu’en limite de disparition de la PSF. L’application est faite dans le cadre de la prochaine expérience Proba 3 - ASPIICS de l’ESA visant à observer la couronne solaire avec une précision inégalée.

Abstract – We describe the inversion of Fredholm’s integral for images in the case of a strong vignetting leading to so-called evanescent PSFs that disappear at an edge of the field. The algorithm used, of the gradient type with non-negativity constraint, uses an adaptive and automatic regularization making use of the Strehl ratio. This regularization improves the reconstruction decisively. Simulations carried out in the presence of a composite Poisson and Gaussian noise show excellent reconstructions up to the limit of the disappearance of the PSF. The application is made in preparation of the next ESA Proba 3 - ASPIICS experiment to observe the solar corona with unparalleled accuracy.

1 Introduction

La présente étude se situe dans le cadre de l’expérience spatiale Proba-3 ASPIICS de l’ESA qui a pour objet la réalisation d’une éclipse artificielle de soleil à l’aide de deux satellites dans l’espace. Le premier porte un disque occulteur de diamètre 1.5 m, et le second, à 150 m de distance, comporte un coronographe de Lyot qui a une pupille d’entrée de 5 cm de diamètre.

Du point de vue optique, l’utilisation d’un occulteur externe provoque un phénomène géométrique connu sous le nom de *vignettage* qui correspond à un mauvais éclairage de la pupille pour certaines parties de l’image. Pour ASPIICS, ce phénomène est très brutal, car la transmission passe de 100% à zéro en une centaine de pixels de l’image. Cette variation brutale du flux s’accompagne d’une transformation corrélative de la forme de la PSF, qui passe de la parfaite tache d’Airy à une figure déformée tel que illustré dans la Fig.1. C’est en ce sens que l’on utilise le terme de PSF *évanescence*. En terme de traitement des données, cette variation de la PSF fait que la relation objet image ne peut pas se traduire par l’habituelle relation de convolution mais nécessite l’utilisation de la relation de Fredholm, [1]. Cette problématique a fait l’objet d’études, principalement dans le contexte de l’optique adaptative, où la PSF variante peut faire l’objet d’approximations, et on peut citer par exemple [3].

Dans notre cas, une simulation complète de l’expérience conduisant à la connaissance exacte de la PSF pour chaque point

source a été effectuée. Pour cela on propage numériquement des fronts d’onde, en calculant la diffraction de Fresnel de l’occulteur à l’entrée du coronographe de Lyot, et la propagation à l’intérieur de ce coronographe, [7]. Une première étude décrivant en détail les aspects optiques et astrophysiques de l’expérience a été récemment publiée. L’inversion de Fredholm y est décrite pour un objet test et l’algorithme utilisé est l’algorithme de Richardson Lucy adapté au cas de PSFs variantes, [1]. Le travail présenté ici est une extension notable du travail précédent. L’objet utilisé est une authentique image de la couronne et l’algorithme de reconstruction utilise une régularisation adaptative basée sur le rapport de Strehl, ce qui permet d’intégrer directement une donnée physique du problème.

2 Inversion de l’intégrale de Fredholm

Dans ce contexte, l’image observée y est reliée à l’objet d’intérêt x et à la réponse de l’instrument h par une relation de Fredholm de 1^{re} espèce. Le modèle discrétisé de cette relation s’écrit :

$$y_{m,n} = \sum_{i,j} x_{i,j} h_{m,i,n,j} \quad (1)$$

où $y_{m,n}$, $x_{i,j}$ et $h_{m,i,n,j}$ sont les valeurs des tableaux correspondants. Les valeurs de l’image données par (1) peuvent être placées sous la forme matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (2)$$

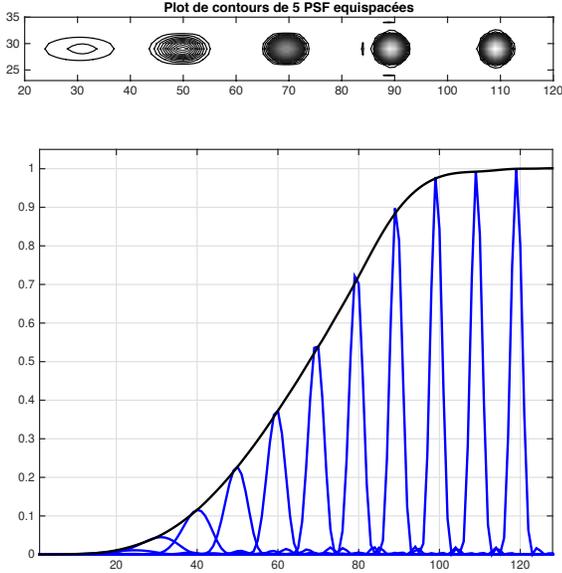


FIGURE 1 – Du limbe (gauche) à la fin de la couronne solaire (droite). Haut : variation de la PSF illustrée pour 5 points sources, en courbes de niveaux. Bas : coupes longitudinales de 10 PSFs (en bleu) montrant la chute du flux et l'élargissement des réponses dans la zone de vignetage, proche du limbe solaire. L'enveloppe est assimilée au rapport de Strehl S_i (en noir) utilisé dans l'Eq. 6.

Les tableaux sont $(N^2 \times 1)$ pour \mathbf{y} et \mathbf{x} , $(N^2 \times N^2)$ pour \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{1,1,1,1} & h_{1,1,1,2} & \dots & h_{1,N,1,N} \\ h_{1,1,2,1} & h_{1,1,2,2} & \dots & h_{1,N,2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N,1,N,1} & h_{N,1,N,2} & \dots & h_{N,N,N,N} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Chaque colonne de \mathbf{H} contient les valeurs de l'une des PSF présentées dans la Fig. 1, ordonnées lexicographiquement. Contrairement au cas des PSFs invariantes dans le champ où l'inversion peut être implémentée en effectuant des transformées de Fourier discrètes (TFD) 2D, ici nous devons manipuler des matrices de dimension $N^2 \times N^2$.

L'estimation de \mathbf{x} , à partir de \mathbf{y} et de \mathbf{H} , Eq. (2), est un problème dit mal posé et l'inversion directe de (2) conduit à un résultat inacceptable du au mauvais conditionnement de \mathbf{H} , [5]. La solution classique consiste à utiliser des méthodes itératives pour estimer \mathbf{x} , ce qui revient à effectuer une inversion partielle de \mathbf{H} .

Une contrainte de non-négativité est imposée à l'objet à reconstruire et le problème peut être formulé par :

$$\min_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}), \quad s.t \quad x_i \geq 0, \quad \forall i \quad (4)$$

avec :

$$J(\mathbf{x}) = J_1(\mathbf{x}) + \gamma J_2(\mathbf{x}) \quad (5)$$

Où $J_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})$ est le terme quadratique classique d'attache aux données et $J_2(\mathbf{x})$ est le terme de régularisation, [8]. Nous utilisons un terme de régularisation tout à fait

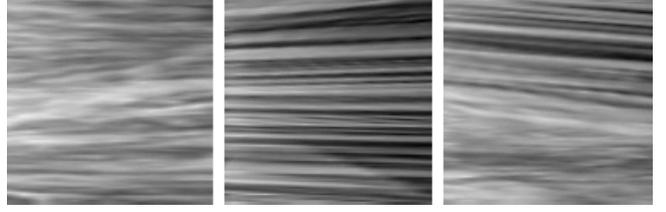


FIGURE 2 – Exemple de trois images représentant une petite partie de la couronne solaire. Le bord solaire est à gauche.

particulier, basé sur des considérations physiques. Tout d'abord nous comparons l'objet \mathbf{x} à sa version lissée $A_D \mathbf{x}$, telle qu'elle pourrait être observée avec un télescope parfait de diamètre D , c'est à dire convolué par une tache d'Airy. Le diamètre D est un hyper-paramètre fixé dans cette première étude à la valeur de la pupille d'entrée du coronographe (5 cm), en adoptant la même démarche que dans [4], pour éviter de reconstruire les fréquences au delà de la fréquence de coupure de l'instrument parfait non vigneté. De plus, pour prendre en compte l'évanescence de la PSF dans la zone de vignetage, nous pondérons cette quantité par le rapport de Strehl donné par la courbe noire de la Fig. 1. On a donc pour le terme de régularisation :

$$J_2(\mathbf{x}) = \sum_i S_i (\mathbf{x}_i - [A_D \mathbf{x}]_i)^2 \quad (6)$$

où $\mathbf{x}_i - [A_D \mathbf{x}]_i$ est l'écart entre la reconstruction \mathbf{x} et sa version lissée $A_D \mathbf{x}$ pour un indice i , A_D est la matrice de lissage contenant la tache d'Airy et S_i est la valeur du rapport de Strehl, périodique de période 128. On notera donc que ce terme S_i permet de régulariser de manière variable et automatique en fonction de la PSF de la zone de l'image à restaurer. J est convexe par rapport à \mathbf{x} et pour minimiser $J(\mathbf{x})$, on utilise alors un algorithme de descente de type gradient avec contrainte de non-négativité, suivant la démarche exposée dans [6]. Après résolution des conditions de Karush Kuhn Tucker (KKT), la condition à l'optimum \mathbf{x}^* s'écrit, pour une composante r :

$$[\nabla_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}^*)]_r \mathbf{x}_r^* = 0, \quad r = 1, \dots, N^2. \quad (7)$$

Cette condition va servir comme direction de descente dans l'algorithme itératif :

$$\mathbf{x}_r^{k+1} = \mathbf{x}_r^k + \alpha_r^k \mathbf{x}_r^k [-\nabla_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}^k)]_r. \quad (8)$$

avec α_r^k , le pas de descente que l'on choisira de manière à avoir $J(\mathbf{x}^{(k+1)}) < J(\mathbf{x}^k)$ à chaque itération k . La procédure de recherche de α_r^k de type Armijo est faite dans un intervalle préalablement calculé pour assurer $\mathbf{x}^{k+1} > 0$ étant donné $\mathbf{x}^k > 0$, ce qui en fait un algorithme de point intérieur, détaillé dans [6].

Avec les fonctionnelles J_1 et J_2 choisies, on a :

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mathbf{x}} J_1]_r &= -[\mathbf{H}^T \mathbf{y}]_r + [\mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{x}]_r \\ [\nabla_{\mathbf{x}} J_2]_r &= -S_r [(\mathbf{A}_D + \mathbf{A}_D^T) \mathbf{x}]_r + S_r [(I + \mathbf{A}_D^T \mathbf{A}_D) \mathbf{x}]_r. \end{aligned}$$

On peut noter que l'implémentation des opérations liées à la régularisation se fait par TFD 2D, et qu'ici A_D est symétrique, ce qui simplifie les équations ci-dessus.

3 Résultats de simulation

L'objet de référence \mathbf{x} provient d'images obtenues lors de l'éclipse totale de soleil du 9 mars 2016 en Indonésie par D. Sabers, R. Royer et M. Druckmüller, Fig. 2. Pour les besoins de notre étude, ces images sont re-échantillonnées en 128×128 points. Le bord du soleil est à gauche de l'image, les stries globalement horizontales sont dues à des jets de matière coronale. Ces images ont subi divers prétraitements, suivis d'une anamorphose décrite dans [1] et consistant en une transformation de cartésien en polaire de manière à rendre rectiligne et vertical le bord solaire. Le traitement d'inversion de l'intégrale de Fredholm est illustré par la suite sur l'objet 3 (haut) qui montre une petite protubérance solaire (à gauche au milieu de l'image).

En utilisant une procédure d'imagerie à travers le coronographe SPIICS décrite dans [7], on simule l'image observée, c'est à dire l'objet modifié par la PSF variable. C'est la transformation $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$, Eq. (2). La Fig. 3 (milieu) est le résultat de cette transformation. On notera que la protubérance n'est déjà plus visible car elle se trouve dans la zone où la PSF évanescence a presque complètement disparu. Cette variation de la PSF est illustrée dans la Fig.1. En terme optique, cet effet est le vignettage dû à l'occulteur externe, inévitable dans ce type d'expérience. Lorsque l'on applique l'algorithme Eq. (8) à cette image sans bruit avec $\gamma = 0$, i.e sans régularisation, on obtient le résultat de la Fig. 3 (bas), le nombre d'itérations est très grand et la reconstruction très bonne.

Dans le contexte de l'expérience, ces images seront perturbées par des phénomènes qui peuvent être modélisés comme deux bruits indépendants de nature différente. Elles présentent un bruit de Poisson dû à l'émission de la couronne elle même, et un bruit Gaussien qui provient du halo de diffraction du disque solaire lui même. On peut alors écrire la transformation de l'objet \mathbf{x} comme :

$$\mathbf{y} = \mathcal{P}(\mathbf{H}\mathbf{x}) + \mathbf{n} \quad (9)$$

Ce modèle a été étudié dans [2], et pourrait être utilisé pour J_1 dans un travail ultérieur. Dans l'exemple traité, on prend 10000 photons en moyenne par pixel de l'image et $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, 10000)$, Fig. 4 (haut). On effectue ensuite une inversion de l'intégrale de Fredholm de cette image en utilisant la régularisation décrite dans l'équation (6) avec ou sans le facteur adaptatif S_i et l'algorithme Eq. (8). Le critère de qualité choisi est le minimum de l'erreur de reconstruction ϵ^k , calculée par :

$$\epsilon^k = \frac{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}^k\|}{\|\mathbf{x}_t\|} \quad (10)$$

Où \mathbf{x}_t est l'objet « true ». Les résultats obtenus, Fig. 4 (milieu et bas) montrent l'intérêt incontestable de cette régularisation variable, corroboré par les courbes de l'erreur fonction de γ , Fig. 5. En effet la valeur de l'erreur de reconstruction obtenue avec S_i et $\gamma = 0.01$ est plus faible que celle obtenue par "early stopping", avec $\gamma = 0$.

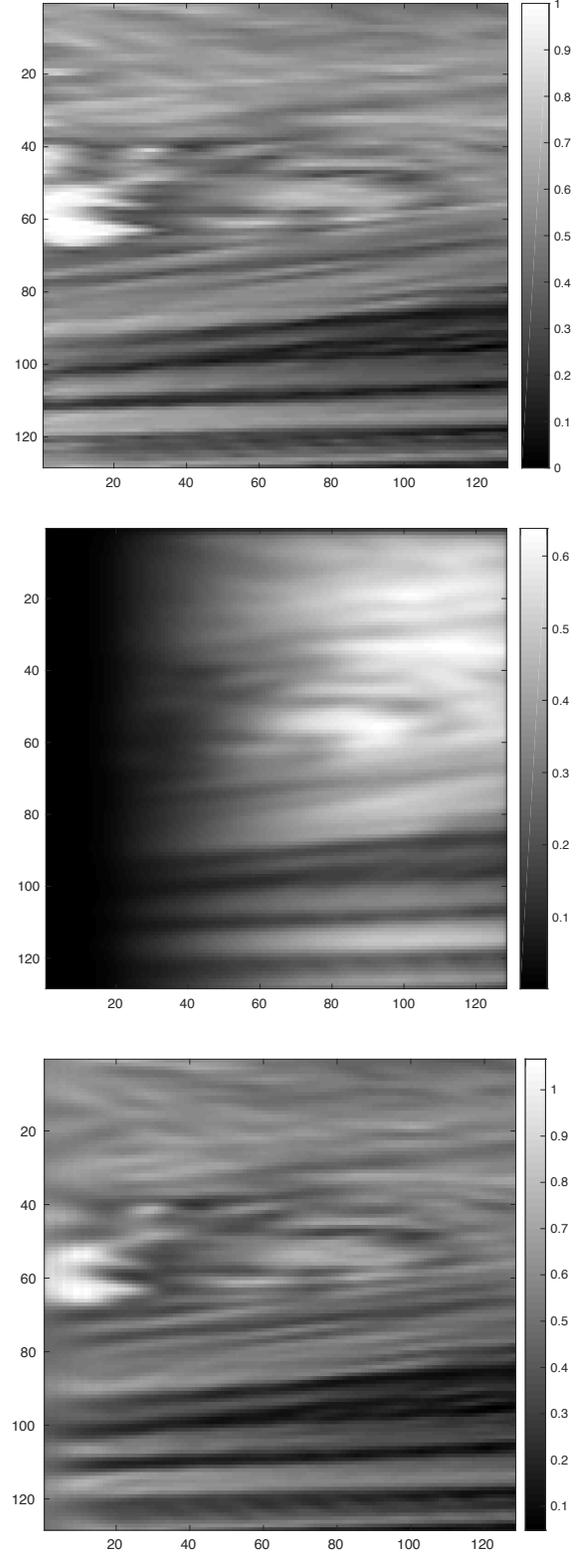


FIGURE 3 – De haut en bas. Objet. Résultat de la transformation par la PSF évanescence, $\mathbf{H}\mathbf{x}$. Objet reconstruit sans régularisation à $k = 999998$, $\epsilon = 0.049$.

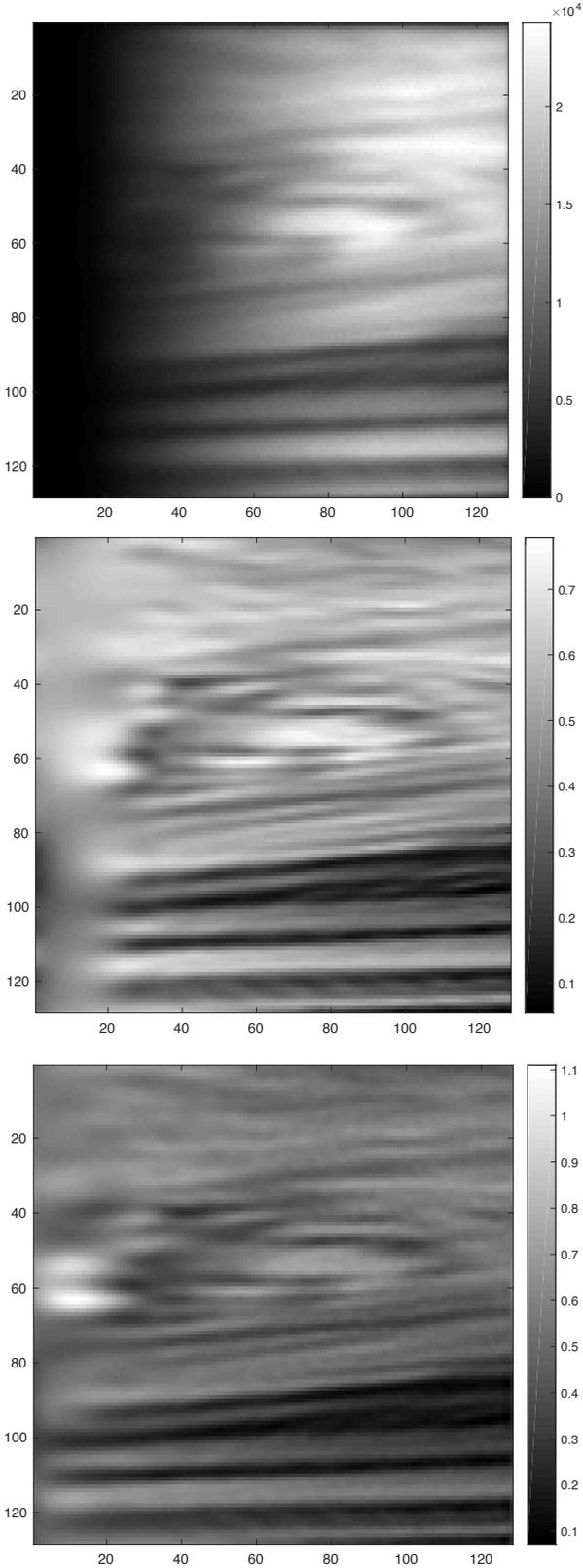


FIGURE 4 – De haut en bas. Image bruitée y (10000 photons par pixel et $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, 10000)$). Reconstruction avec $\gamma = 0.001$, $\epsilon = 0.126$, $k = 998$. Reconstruction avec $\gamma = 0.01$ et S_i , $\epsilon = 0.083$, $k = 998$.

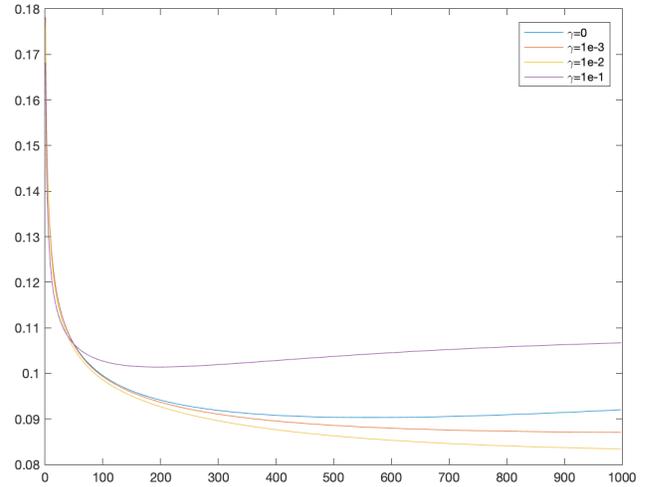


FIGURE 5 – Régularisation adaptative par S_i , erreur fonction de k pour différentes valeurs de γ .

Remerciements

Nous remercions le Pr. Miloslav Druckmüller de l'Institute of Mathematics, Faculty of Mechanical Engineering Brno University of Technology, Czech Republic pour les images d'éclipse. voir : (www.zam.fme.vutbr.cz/druck/).

Références

- [1] C. Aime, C. Theys, R. Rougeot & H. Lantéri, "Principle of Fredholm image reconstruction in the vignetting zone of an externally occulted solar coronagraph. Application to ASPIICS," *A & A*, 622, 2019.
- [2] F. Benvenuto, A. La Camera, C. Theys, A. Ferrari, H. Lantéri and M Bertero, "The study of an iterative method for the reconstruction of images corrupted by Poisson and Gaussian noise," *Inverse problems*, vol. 24, pp. 035016, 2008.
- [3] L. Denis, E. Thiébaud, F. Soulez, J. M. Becker, R. Mourya, "Fast approximations of shift-variant blur" *Int. J. Comput. Vis.*, 115, 253 2015.
- [4] R. C. Flicker & F. J. Rigaut, "Anisoplanatic deconvolution of adaptive optics images" *JOSA A*, 22(3), pp 504–513, 2005.
- [5] L. Landweber, "An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind," *Am. J. Math.*, Am. J. Math., vol. 73, pp. 615, 1951.
- [6] H. Lantéri, M. Roche, and C. Aime, "Penalized maximum likelihood image restoration with positivity constraints - multiplicative algorithms," *Inverse problems*, vol. 18, pp. 1397–1419, 2002.
- [7] R. Rougeot, R. Flamary, D. Galano & C. Aime, "Performance of the hybrid externally occulted Lyot solar coronagraph. Application to ASPIICS" *A & A*, 599, A2, 2017.
- [8] D. M. Titterton, "General structure of regularization procedures in image reconstruction" *A & A*, 144, 381, 1985.