Densité de probabilité gaussienne à maximum d'Entropie pour les groupes de Lie basée sur le modèle symplectique de Jean-Marie Souriau

FRÉDÉRIC BARBARESCO[1]

[1] THALES Land & Air Systems
6 rue de la Verrerie, 92190 Meudon, France

[1]frederic.barbaresco@thalesgroup.com

Résumé – Nous introduisons les densités de probabilité pour les groupes de Lie sur la base du modèle symplectique de la physique statistique de Jean-Marie Souriau, appelé la « Thermodynamique des groupes de Lie ». Pour décrire la statistique pour un groupe de Lie, on considère la variété symplectique homogène associée aux orbites coadjointes du groupe via la 2-forme de Souriau. La densité à maximum d'Entropie est donnée par la densité de Gibbs covariante définie sur la variété symplectique via l'application moment de Souriau. Nous illustrons ce modèle pour les groupes de Lie *SU(1,1)* (qui agit sur le disque de Poincaré) et *SU(N,N)* (qui agit sur le disque de Siegel). Pour ce dernier, on peut déduire la densité pour les matrices symétriques définies positives comme élément du demi-espace de Siegel.

Abstract - We introduce probability densities for Lie groups based on Jean-Marie Souriau's symplectic model of statistical physics, called the "Thermodynamics of Lie groups". To describe the statistics for a Lie group, we consider the homogeneous symplectic manifold associated with the coadjoint orbits of the group via the Souriau 2-form. The covariant Gibbs density defined on the symplectic manifold via the Souriau moment map gives the maximum entropy density. We illustrate this model for the Lie groups *SU(1,1)* (which acts on the Poincaré disk) and *SU(N,N)* (which acts on the Siegel disk). For the latter, one can deduce the density for positive definite symmetric matrices as an element of the Siegel half-space.

1 Thermodynamique des groupes de Lie

Dans ce chapitre, nous expliquerons comment définir des statistiques sur les groupes de Lie et la variété symplectique associée aux orbites coadjointes, et plus particulièrement comment définir l'extension de la densité de Gauss comme densité de Gibbs dans le cadre de la mécanique statistique géométrique. Amari a prouvé que la métrique riemannienne dans une famille exponentielle est la matrice d'information de Fisher définie par :

$$g_{ij} = -\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right]_{ij} \quad \text{avec} \quad \Phi(\theta) = -\log \int_{\mathbb{R}} e^{-\langle \theta, y\rangle} dy \qquad (1)$$

et le potentiel dual, l'entropie de Shannon, est donné par la transformée de Legendre :

$$S(\eta) = \langle \theta, \eta \rangle - \Phi(\theta) \quad \text{avec} \quad \eta_i = \frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta_i} \quad \text{et} \quad \theta_i = \frac{\partial S(\eta)}{\partial \eta_i} \qquad (2)$$

On remarque que $\Phi(\theta) = -\log \int_R e^{-\langle\theta,y\rangle} dy = -\log \psi(\theta)$ est liée à la fonction génératrice des cumulants classique . JL Koszul et E. Vinberg ont introduit une généralisation par une métrique hessienne affinement invariante sur un cône convexe saillant par sa fonction caractéristique [1,2] :

$$\begin{aligned} &\Phi_\Omega(\theta) = -\log \int_{\Omega^*} e^{-\langle\theta,y\rangle} dy = -\log \psi_\Omega(\theta) \\ &\theta \in \Omega \text{ cone convexe saillant et } \psi_\Omega(\theta) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle\theta,y\rangle} dy \end{aligned} \qquad (3)$$

Le nom « fonction caractéristique » vient du lien souligné par Ernest Vinberg et I. Satake [7] :

Soit Ω un cone dans U et Ω^* son dual

$$\begin{aligned} &\forall \lambda > 0, H_\lambda(x) = \left\{ y \in U / \langle x, y \rangle = \lambda \right\} \\ &\text{et soit } d^{(\lambda)}y \text{ la mesure de Lebesgue sur } H_\lambda(x) : \\ &\psi_\Omega(x) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle x,y\rangle} dy = \frac{(m-1)!}{\lambda^{m-1}} \int_{\Omega^* \cap H_\lambda(x)} d^{(\lambda)}y \end{aligned} \qquad (4)$$

Il existe une bijection $x \in \Omega \mapsto x^* \in \Omega^*$, satisfaisant $(gx)^* = {}^t g^{-1} x^*$ pour tout $g \in G(\Omega) = \{ g \in GL(U) / g\Omega = \Omega \}$ le groupe d'automorphismes linéaires de Ω et x^* est :

$$x^* = \int_{\Omega^* \cap H_\lambda(x)} y d^{(\lambda)}y \Big/ \int_{\Omega^* \cap H_\lambda(x)} d^{(\lambda)}y \qquad (5)$$

On peut observer que x^* est le centre de gravité de $\Omega^* \cap H_\lambda(x)$. Nous avons la propriété que $\psi_\Omega(gx) = |\det(g)|^{-1} \psi_\Omega(x)$ pour tout $x \in \Omega, g \in G(\Omega)$ et alors $\psi_\Omega(x)dx$ est une mesure invariante sur Ω. En écrivant $\partial_a = \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} &\partial_a \Phi_\Omega(x) = \partial_a \left(-\log \psi_\Omega(x) \right) \;,\; a \in U, x \in \Omega \\ &\partial_a \Phi_\Omega(x) = \psi_\Omega(x)^{-1} \int_{\Omega^*} \langle a, y \rangle e^{-\langle x,y\rangle} dy = \langle a, x^* \rangle \end{aligned} \qquad (6)$$

Alors, l'espace tangent à l'hypersurface $\{ y \in U / \psi_\Omega(y) = \psi_\Omega(x) \}$ en $x \in \Omega$ est donné par $\{ y \in U / \langle x^*, y \rangle = m \}$. Pour $x \in \Omega, a, b \in U$, la forme bilinéaire $\partial_a \partial_b \log \psi_\Omega(x)$ est symétrique et définie positive, de sorte qu'elle définit une métrique riemannienne invariante sur Ω. Ces relations ont été étendues par Jean-Marie Souriau en mécanique statistique géométrique, où il a développé une «

thermodynamique des groupes de Lie » des systèmes dynamiques où la densité de Gibbs (d'entropie maximale) est covariante par rapport à l'action du groupe de Lie. Dans le modèle Souriau, les structures précédentes sont conservées :

$$I(\beta)=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} \text{ avec } \Phi(\beta)=-\log\int_M e^{-\langle U(\xi),\beta\rangle}d\lambda_\omega \quad (7)$$

$U: M\to\mathfrak{g}^*$ application moment

On conserve la transformée de Legendre :

$$S(Q)=\langle Q,\beta\rangle-\Phi(\beta) \text{ avec } Q=\frac{\partial\Phi(\beta)}{\partial\beta}\in\mathfrak{g}^* \text{ et } \beta=\frac{\partial S(Q)}{\partial Q}\in\mathfrak{g} \quad (8)$$

Dans le modèle thermodynamique des groupes de Lie de Souriau [1-5], β est une température (de Planck) « géométrique », élément $\mathfrak{g}$ de l'algèbre de Lie du groupe, et Q est une chaleur « géométrique », élément $\mathfrak{g}^*$ de l'espace dual de l'algèbre de Lie du groupe. Souriau a proposé une métrique riemannienne que nous avons identifiée comme généralisation de la métrique de Fisher:

$$I(\beta)=\left[g_\beta\right] \text{ avec } g_\beta\left([\beta,Z_1],[\beta,Z_2]\right)=\tilde{\Theta}_\beta\left(Z_1,[\beta,Z_2]\right) \quad (9)$$

$$\text{avec } \tilde{\Theta}_\beta\left(Z_1,Z_2\right)=\tilde{\Theta}\left(Z_1,Z_2\right)+\left\langle Q,ad_{Z_1}(Z_2)\right\rangle \quad (10)$$

Souriau a prouvé que toute orbite co-adjointe d'un groupe de Lie donné par $O_F=\left\{Ad_g^*F,g\in G\right\}$ dans $\mathfrak{g}^*, F\in\mathfrak{g}^*$ porte une structure symplectique homogène naturelle par une 2-forme fermée G -invariante. Si nous définissons $K=Ad_g^*=\left(Ad_{g^{-1}}\right)^*$ et $K_*(X)=-\left(ad_X\right)^*$ avec :

$$\left\langle Ad_g^*F,Y\right\rangle=\left\langle F,Ad_{g^{-1}}Y\right\rangle,\forall g\in G,Y\in\mathfrak{g},F\in\mathfrak{g}^* \quad (11)$$

où si $X\in\mathfrak{g}$, $Ad_g(X)=gXg^{-1}\in\mathfrak{g}$, la 2-forme G-invariante est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_\Omega\left(ad_XF,ad_YF\right)=B_F\left(X,Y\right)=\left\langle F,[X,Y]\right\rangle, X,Y\in\mathfrak{g} \quad (12)$$

Le théorème fondamental de Souriau est que « *Toute variété symplectique sur laquelle un groupe de Lie agit transitivement par une action hamiltonienne est un espace de recouvrement d'une orbite coadjointe* ». On peut observer que pour le modèle de Souriau, la métrique de Fisher est une extension de cette 2-forme:

$$g_\beta\left([\beta,Z_1],[\beta,Z_2]\right)=\tilde{\Theta}\left(Z_1,[\beta,Z_2]\right)+\left\langle Q,\left[Z_1,[\beta,Z_2]\right]\right\rangle \quad (13)$$

Le terme additionnel de Souriau $\tilde{\Theta}\left(Z_1,[\beta,Z_2]\right)$ est généré par non-équivariance via le cocycle symplectique. Le tenseur $\tilde{\Theta}$ utilisé pour définir cette métrique de Fisher étendue est défini par l'application des moments $J(x)$, application de M (variété symplectique homogène) sur $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de l'algèbre de Lie, donnée par :

$$\tilde{\Theta}(X,Y)=J_{[X,Y]}-\left\{J_X,J_Y\right\} \quad (14)$$

avec $J(x): M\to\mathfrak{g}^*$ tel que $J_X(x)=\left\langle J(x),X\right\rangle, X\in\mathfrak{g}$

Ce tenseur $\tilde{\Theta}$ est également défini dans l'espace tangent du cocycle $\theta(g)\in\mathfrak{g}^*$ (ce cocycle apparaît du fait de la non-équivariance de l'opérateur coadjoint Ad_g^*, action du groupe sur l'espace dual de l'algèbre de Lie ; action du groupe sur l'espace dual du L'algèbre de Lie est modifiée avec un cocycle pour que l'application moment devienne équivariante par rapport à cette nouvelle action affine) :

$$Q\left(Ad_g(\beta)\right)=Ad_g^*(Q)+\theta(g) \quad (15)$$

$\theta(g)\in\mathfrak{g}^*$ est appelé un cocycle de non-équivariance, et c'est une mesure du manque d'équivariance de l'application moments.

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}(X,Y):\ &\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R} \qquad \text{avec } \Theta(X)=T_e\theta\left(X(e)\right)\\ &X,Y\mapsto\left\langle\Theta(X),Y\right\rangle\end{aligned} \quad (16)$$

Souriau a alors défini une densité de Gibbs covariante sous l'action du groupe :

$$p_{Gibbs}(\xi)=e^{\Phi(\beta)-\langle U(\xi),\beta\rangle}=\frac{e^{-\langle U(\xi),\beta\rangle}}{\int_M e^{-\langle U(\xi),\beta\rangle}d\lambda_\omega} \quad (17)$$

$$Q=\frac{\partial\Phi(\beta)}{\partial\beta}=\frac{\int_M U(\xi)e^{-\langle U(\xi),\beta\rangle}d\lambda_\omega}{\int_M e^{-\langle U(\xi),\beta\rangle}d\lambda_\omega}=\int_M U(\xi)p(\xi)d\lambda_\omega \quad (18)$$

Nous pouvons exprimer la densité de Gibbs par rapport à Q en inversant la relation $Q=\frac{\partial\Phi(\beta)}{\partial\beta}=\Theta(\beta)$, puis $p_{Gibbs,Q}(\xi)=e^{\Phi(\beta)-\langle U(\xi),\Theta^{-1}(Q)\rangle}$ avec $\beta=\Theta^{-1}(Q)$.

2 Densité Gaussienne pour le groupe de Lie *SU(1,1)* et le disque de Poincaré

Nous introduirons l'application moment de Souriau pour le groupe *SU(1,1)/U(1)* qui agit transitivement sur le disque unitaire de Poincaré. Considérant le groupe de Lie

$$SU(1,1)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ b^* & a^*\end{pmatrix}/\,a,b\in\mathbb{C},\ |a|^2-|b|^2=1\right\} \quad (19)$$

et son algèbre de Lie donnée par les éléments :

$$su(1,1)=\left\{\begin{pmatrix}ir & \eta\\ \eta^* & -ir\end{pmatrix}/\,r\in\mathbb{R},\eta\in\mathbb{C}\right\} \quad (20)$$

Une base pour cette algèbre de Lie $su(1,1)$ est $(u_1,u_2,u_3)\in\mathfrak{g}$ avec :

$$u_1=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ u_2=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ and } u_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \quad (21)$$

avec $[u_1,u_3]=-u_2,[u_1,u_2]=u_3,[u_2,u_3]=-u_1$.

Le plongement de Harish-Chandra est donné par $\varphi(gx_0)=\zeta=ba^{*-1}$. A partir de $|a|^2-|b|^2=1$, on a $|\zeta|<1$. Inversement, pour tout $|\zeta|<1$, en prenant tout $a\in\mathbb{C}$ tel que $|a|=\left(1-|a|^2\right)^{-1/2}$ et en mettant $b=\zeta a^*$, on obtient $g\in G$ pour lequel $\varphi(gx_0)=\zeta$. Le domaine $D=\varphi(M)$ est le disque unité $D=\left\{\zeta\in\mathbb{C}/|\zeta|<1\right\}$. Le sous-groupe compact est engendré par u_1, tandis que u_2

et u_3 génèrent un sous-groupe hyperbolique. L'espace dual de l'algèbre de Lie est donné par :

$$su(1,1)^* = \left\{ \begin{pmatrix} z & x+iy \\ -x+iy & -z \end{pmatrix} / \, x,y,z \in \mathbb{R} \right\} \tag{22}$$

avec la base $\left(u_1^*, u_2^*, u_3^*\right) \in \mathfrak{g}^*$:

$$u_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; u_2^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ and } u_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Considérons le $D = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z| < 1 \right\}$ disque unitaire ouvert de Poincaré. Pour chaque $\rho > 0$, le couple $\left(D, \omega_\rho\right)$ est une variété homogène symplectique avec $\omega_\rho = 2i\rho \dfrac{dz \wedge dz^*}{\left(1-|z|^2\right)^2}$, où ω_ρ est invariant sous l'action :

$$\begin{aligned} & SU(1,1) \times D \to D \\ & (g,z) \mapsto g.z = \frac{az+b}{b^* z + a^*} \end{aligned} \tag{24}$$

Cette action est transitive et est globalement et fortement hamiltonienne. Ses générateurs sont les champs vectoriels hamiltoniens associés aux fonctions :

$$J_1 = \rho \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}, \; J_2 = \frac{\rho}{i} \frac{z-z^*}{1-|z|^2}, \; J_3 = -\rho \frac{z+z^*}{1-|z|^2} \tag{25}$$

L'application moment associée $J : D \to su^*(1,1)$ définie par $J(z).u_i = J_i(z,z^*)$, de D vers l'orbite coadjointe dans $su^*(1,1)$. Ensuite, nous pouvons écrire l'application moment sous la forme d'un élément de matrice de $su^*(1,1)$ [2] :

$$J(z) = J_1 u_1^* + J_2 u_2^* + J_3 u_3^* = \rho \begin{pmatrix} \dfrac{1+|z|^2}{1-|z|^2} & -2\dfrac{z^*}{1-|z|^2} \\ 2\dfrac{z}{1-|z|^2} & -\dfrac{1+|z|^2}{1-|z|^2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}^* \tag{26}$$

L'application moment J est un difféomorphisme de D sur une feuille de l'hyperboloïde à deux nappes dans $su^*(1,1)$, déterminé par l'équation suivante $J_1^2 - J_2^2 - J_3^2 = \rho^2$, $J_1 \geq \rho$ avec $J_1 u_1^* + J_2 u_2^* + J_3 u_3^* \in su^*(1,1)$ On note O_ρ^+ l 'orbite coadjointe $Ad^*_{SU(1,1)}$ de $SU(1,1)$, donnée par la nappe supérieure de l'hyperboloïde à deux nappes donné par l'équation précédente. La méthode des orbites de Kostant-Kirillov-Souriau associe à chacune de ces orbites coadjointes une représentation de la suite discrète de $SU(1,1)$, pourvu que ρ soit un demi entier supérieur ou égal à 1 ($\rho = \frac{k}{2}, k \in N$ and $\rho \geq 1$). L'idée principale de Souriau était de définir les états de Gibbs pour des sous-groupes à un paramètre du groupe de Lie. Nous utiliserons la même approche, dans ce cas nous considérerons l'action du groupe de Lie $SU(1,1)$ sur la variété symplectique (M , ω) (disque unité de Poincaré) et son application moment J sont telles que l'ouvert $\Lambda_\beta = \left\{ \beta \in \mathfrak{g} / \int_D e^{-\langle J(z),\beta \rangle} d\lambda(z) < +\infty \right\}$ n'est pas vide. Cette condition n'est pas toujours satisfaite lorsque *(M, ω)* est un fibré cotangent, mais bien sûr elle l'est lorsqu'il s'agit d'une variété compacte. L'idée de Souriau est de considérer un sous-groupe à un paramètre de $SU(1,1)$. Paramétrer des éléments de $SU(1,1)$ à travers son algèbre de Lie. Au voisinage de l'élément d'identité, les éléments de $g \in SU(1,1)$ s'écrivent comme l'exponentielle d'un élément β de son algèbre de Lie :

$$g = \exp(\varepsilon\beta) \text{ with } \beta \in \mathfrak{g} \tag{27}$$

La condition $g^+ M g = M$ for $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ peut être développée pour $\varepsilon << 1$ et est équivalente à $\beta^+ M + M\beta = 0$, ce qui implique alors $\beta = \begin{pmatrix} ir & \eta \\ \eta^* & -ir \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{C}$. Le calcul de l'application exponentielle via β donne :

$$g = \exp(\varepsilon\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon\beta)^k}{k!} = \begin{pmatrix} a_\varepsilon(\beta) & b_\varepsilon(\beta) \\ b_\varepsilon^*(\beta) & a_\varepsilon^*(\beta) \end{pmatrix} \tag{28}$$

Si l'on fait la remarque que l'on a la relation suivante $\beta^2 = \begin{pmatrix} ir & \eta \\ \eta^* & -ir \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ir & \eta \\ \eta^* & -ir \end{pmatrix} = \left(|\eta|^2 - r^2\right) I$, on développe l'application exponentielle :

$$\begin{aligned} & g = \exp(\varepsilon\beta) \text{ avec } R^2 = |\eta|^2 - r^2 \\ & g = \begin{pmatrix} \cosh(\varepsilon R) + ir \dfrac{\sinh(\varepsilon R)}{R} & \eta \dfrac{\sinh(\varepsilon R)}{R} \\ \eta^* \dfrac{\sinh(\varepsilon R)}{R} & \cosh(\varepsilon R) - ir \dfrac{\sinh(\varepsilon R)}{R} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{29}$$

On peut observer qu'une condition est $|\eta|^2 - r^2 > 0$ pour qu'alors le sous-ensemble à considérer soit donné par $\Lambda_\beta = \left\{ \beta = \begin{pmatrix} ir & \eta \\ \eta^* & -ir \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{C} / |\eta|^2 - r^2 > 0 \right\}$ tel que $\int_D e^{-\langle J(z),\beta \rangle} d\lambda(z) < +\infty$. Les états de Gibbs généralisés du groupe complet $SU(1,1)$ n'existent pas. Cependant, des états de Gibbs généralisés pour les sous-groupes à un paramètre $\exp(\alpha\beta)$, $\beta \in \Lambda_\beta$, du groupe $SU(1,1)$ existent. L'état de Gibbs généralisé associé à β reste invariant sous la restriction de l'action au sous-groupe à un paramètre de $SU(1,1)$ généré par $\exp(\varepsilon\beta)$. Pour aller plus loin, nous allons développer la densité de Souriau Gibbs à partir de la carte des moments de Souriau $J(z)$ et la température de Souriau $\beta \in \Lambda_\beta$. Si on note $b = \frac{1}{1-|z|^2}\begin{bmatrix} 1 \\ -z \end{bmatrix}$, on peut écrire la carte des moments :

$$J(z) == \rho\left(2Mbb^+ - Tr\left(Mbb^+\right)I\right) \text{ with } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

On peut alors écrire la densité de Gibbs covariante dans le disque unité donné par la carte des moments du groupe de Lie $SU(1,1)$ et la température géométrique dans son algèbre de Lie $\beta \in \Lambda_\beta$:

$$p_{Gibbs}(z) = \frac{e^{-\langle J(z),\beta\rangle}}{\int_D e^{-\langle J(z),\beta\rangle} d\lambda(z)} \text{ with } d\lambda(z) = 2i\rho\frac{dz \wedge dz^*}{\left(1-|z|^2\right)^2} \quad (31)$$

$$p_{Gibbs}(z) = \frac{e^{-\left\langle \rho\left(2\Im bb^+ - Tr\left(\Im bb^+\right)I\right),\beta\right\rangle}}{\int_D e^{-\langle J(z),\beta\rangle} d\lambda(z)} = \frac{e^{-\left\langle \rho\begin{pmatrix} \frac{1+|z|^2}{\left(1-|z|^2\right)} & \frac{-2z^*}{\left(1-|z|^2\right)} \\ \frac{2z}{\left(1-|z|^2\right)} & -\frac{1+|z|^2}{\left(1-|z|^2\right)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ir & \eta \\ \eta^* & -ir \end{pmatrix} \right\rangle}}{\int_D e^{-\langle J(z),\beta\rangle} d\lambda(z)} \quad (32)$$

Pour écrire la densité de Gibbs par rapport à ses moments statistiques, nous devons exprimer la densité par rapport à $Q = E[J(z)]$. Ensuite, il faut inverser la relation entre Q et β, pour remplacer cette dernière variable $\beta = \begin{pmatrix} ir & \eta \\ \eta^* & -ir \end{pmatrix}$ par $\beta = \Theta^{-1}(Q)$ où $Q = \frac{\partial\Phi(\beta)}{\partial\beta} = \Theta(\beta)$,

Lamoyenne de l'application moment est donnée par :

$$Q = E[J(z)] = E\left[\rho\begin{pmatrix} \frac{1+|w|^2}{\left(1-|w|^2\right)} & \frac{-2w^*}{\left(1-|w|^2\right)} \\ \frac{2w}{\left(1-|w|^2\right)} & -\frac{1+|w|^2}{\left(1-|w|^2\right)} \end{pmatrix}\right], w \in D \quad (33)$$

3 Densité Gaussienne pour le groupe de Lie *SU(N,N)* et le disque de Siegel

Pour traiter le calcul de la densité de Gibbs covariante pour $SD_n = \left\{Z \in Mat(n,\mathbb{C}) / I_n - ZZ^+ > 0\right\}$ le disque unité de Siegel, nous considérerons le groupe de Lie $SU(p,q)$

$$G = SU(n,n) \text{ et } K = S\left(U(n)\times U(n)\right)$$
$$K = \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} / A \in U(n), D \in U(n), \det(A)\det(D) = 1\right\} \quad (34)$$

Alors, l'application moment est donnée par

$$J(Z) = \rho n\begin{pmatrix} \left(I_n - ZZ^+\right)^{-1}\left(I_n + ZZ^+\right) & -2Z^+\left(I_n - ZZ^+\right)^{-1} \\ 2\left(I_n - ZZ^+\right)^{-1}Z & \left(I_n + ZZ^+\right)\left(I_n - ZZ^+\right)^{-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}^*$$

La densité de Souriau Gibbs est alors donnée avec $\beta, M \in \mathfrak{g}$ et $Z \in SD_n$ par :

$$p_{Gibbs}(Z) = \frac{e^{-\left\langle \rho n\begin{pmatrix} \left(I_n - ZZ^+\right)^{-1}\left(I_n + ZZ^+\right) & -2Z^+\left(I_n - ZZ^+\right)^{-1} \\ 2\left(I_n - ZZ^+\right)^{-1}Z & \left(I_n + ZZ^+\right)\left(I_n - ZZ^+\right)^{-1} \end{pmatrix}, \beta \right\rangle}}{\int_{SD_n} e^{-\langle J(Z),\beta\rangle} d\lambda(Z)} \quad (35)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \beta = \Theta^{-1}(Q) \in \mathfrak{g} \text{ et } Q = E[J(Z)] \\ Q = \frac{\partial\Phi(\beta)}{\partial\beta} = \Theta(\beta) \in \mathfrak{g}^* \end{cases}$$

La densité de Gauss des matrices SPD est alors donnée par $Z = (Y - I)(Y + I)^{-1}, Y \in Sym(n)^+$.

4 Références

[1] Barbaresco, F.; Gay-Balmaz, F. Lie Group Cohomology and (Multi)Symplectic Integrators: New Geometric Tools for Lie Group Machine Learning Based on Souriau Geometric Statistical Mechanics. Entropy 2020, 22, 498

[2] Barbaresco F. (2021) Gaussian Distributions on the Space of Symmetric Positive Definite Matrices from Souriau's Gibbs State for Siegel Domains by Coadjoint Orbit and Moment Map. In: Nielsen F., Barbaresco F. (eds) Geometric Science of Information. GSI 2021. Lecture Notes in Computer Science, vol 12829. Springer

[3] Marle, C.-M. Sur les états de Gibbs des systèmes mécaniques à symétries, JGSP 57,45-85, 2020

[4] Marle, C.-M. On Generalized Gibbs States of Mechanical Systems with Symmetries, arXiv: 2012.00582v2 [math.DG], 13 janvier 2021

[5] Marle, C.-M. Projection Stéréographique et Moments, Hal-02157930, Version 1; Juin 2019. Disponible en ligne : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02157930/ (Accès le : 31 mai 2020)

[6] Barbaresco F. (2019), Souriau Exponential Map Algorithm for Machine Learning on Matrix Lie Groups. In: Nielsen F., Barbaresco F. (eds) Geometric Science of Information. GSI 2019. Lecture Notes in Computer Science, vol 11712. Springer

[7] Satake I., Structures algébriques des domaines symétriques, Princeton University Press, 1980