

Correction de dérive pour l'interférométrie de Mach-Zehnder

Simon BARTHELMÉ¹, Florent CHATELAIN¹, Clément CASCALES¹, Cyril HERRIER²

¹Université Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, GIPSA-lab, 38000 Grenoble, France

²Aryballe Technologies, 38000 Grenoble, France

nom.prenom@grenoble-inp.fr

Résumé – Les interféromètres de Mach-Zehnder (IMZ) peuvent être utilisés pour mesurer les changements d'indice optique d'une surface. Cela permet de construire par exemple des capteurs chimiques, qui mesurent des changements de la composition chimique d'une surface à travers des changements l'indice optique. Pour ce genre d'applications, il est important que l'IMZ soit correctement calibré. Or, des dérives instrumentales peuvent causer des pertes de calibration, et par là-même biaiser l'interprétation des données. Dans cet article nous proposons une méthode simple de correction en ligne de certains types de dérive instrumentale affectant les IMZ. Notre analyse fait émerger des liens intéressants avec le suivi des courants triphasés, ainsi qu'avec des techniques de factorisation de matrices. Nous appliquons nos résultats à un capteur chimique de type nez artificiel développé par la société Aryballe.

Abstract – Mach-Zehnder interferometers (MZI) can be used to measure the optical index changes of a surface. This allows to build for example chemical sensors, which measure changes in the chemical composition. For these applications, the MZI must be correctly calibrated. However, instrumental drifts can cause calibration losses which bias the interpretation of the data. In this paper, we propose a simple method for on-line correction of certain types of instrumental drift affecting MZIs. Our analysis reveals interesting links with three-phase current monitoring, as well as with matrix factorization techniques. We apply our results to a chemical sensor of the artificial nose developed by Aryballe.

Les interféromètres dits de Mach-Zehnder (IMZ) représentent un type d'interférométrie flexible et couramment utilisé dans de nombreux domaines, en particulier pour les capteurs chimiques qui mesurent les changements de l'indice de réfraction sur une surface fonctionnalisée [5]. Les IMZ présentent l'avantage d'être facilement miniaturisables, et peuvent même être gravés directement sur puce de silicium [7]. Comme tous les instruments et capteurs physiques, les IMZ sont sujets à la dérive instrumentale, ce qui nécessite une recalibration régulière. Dans cet article, nous décrivons des algorithmes permettant une correction de la dérive sans calibration¹. Nous présentons tout d'abord l'instrument et ses principes physiques, puis deux classes de méthodes de correction. L'une est basée sur un optimisation alternée, l'autre repose sur l'ajustement d'une ellipse aux données. Nous décrivons en dernière partie une application à un capteur chimique de type "nez électronique".

1 Principe de l'Interféromètre

Le principe simplifié d'un interféromètre par division d'amplitude comme celui de type Mach-Zehnder (IMZ) est illustré en fig. 1. Un laser est divisé en deux faisceaux qui suivent leur propre chemin indépendamment avant d'être recombinés. Une voie a le rôle de témoin, l'autre le rôle de test. Des différences

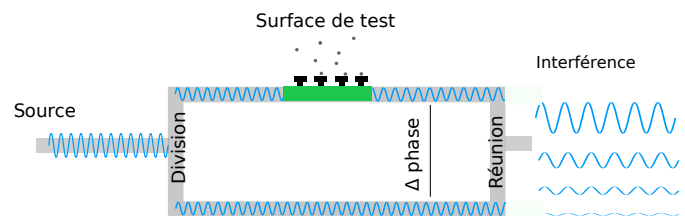


FIGURE 1: Principe simplifié d'un IMZ utilisé comme capteur chimique. Une onde monochromatique (source laser) est divisée en deux faisceaux, standard et test. Le faisceau test passe à travers une surface fonctionnalisée (en vert) qui capture des molécules dans le milieu ambiant (points gris). La présence de molécules à la surface modifie son indice de réfraction, et par conséquent la phase du faisceau de test par rapport au standard. A la réunion des deux, ce déphasage se manifeste par une interférence constructive ou destructive. L'intensité de cette interférence est alors mesurable par un capteur CCD en sortie.

d'indice de réfraction dans la voie test (par rapport à la voie témoin) ont pour effet de déphaser le faisceau lumineux test, ce qui est mis en évidence par la présence d'une interférence entre les deux faisceaux une fois ceux-ci réunis. Dans une application de l'IMZ aux capteurs chimiques, des molécules se déposant à la surface de la zone test ont pour effet de changer l'indice de réfraction, ce qui a pour effet mesurable de créer un retard θ entre les phases des deux faisceaux. Nous nous intéressons ici à l'IMZ proposé par [4], qui dispose de trois sorties ("canaux"), mais le principe est similaire².

Ce travail a été partiellement financé par MIAI à l'Univ. Grenoble Alpes (ANR-19-P3IA-000) et par un contrat de recherche avec Aryballe

1. Pour une procédure avec calibration, voir [4]

2. Notons que l'IMZ est classiquement réalisé avec deux canaux de sortie qui arrivent en quadrature [8]. Dans le cas d'un système idéal, ceci permet de s'affranchir des paramètres de nuisance comme la puissance du laser et

Les trois canaux considérés dans notre IMZ introduisent des déphasages supplémentaires notés ϕ_1, ϕ_2 , et ϕ_3 respectivement, nécessaires afin de pouvoir identifier sans ambiguïté sur le cercle trigonométrique le déphasage θ de la voie test. La physique de l'instrument suggère le modèle d'observation simple suivant pour les sorties des capteurs CCD associés aux trois canaux. En notant y_1, y_2, y_3 les flux mesurés, i.e. l'intensité de l'onde à la sortie de chaque canal $i = 1, 2, 3$, il vient :

$$y_i = g_i(1 + \cos(\phi_i + \theta)) + a_i + \epsilon_i, \quad (1)$$

où $g_i > 0$ dépend à la fois de la puissance de la source laser et du gain du capteur CCD, $1 + \cos(\phi_i + \theta)$ est le facteur d'interférence constructive ou destructive, $a_i > 0$ est un biais lié par exemple à une lumière résiduelle dans l'instrument, et, ϵ_i est un bruit centré que l'on supposera indépendant et identiquement distribué entre les canaux.

Le paramètre d'intérêt dans le modèle (1) est le déphasage θ introduit par les capteurs chimiques. Les autres paramètres sont des paramètres de nuisance, que nous notons collectivement $\nu = (\mathbf{a}, \mathbf{g}, \phi)$. Nous verrons dans le paragraphe suivant θ est facile à estimer lorsque ν correspond aux valeurs nominales.

Il est important de remarquer que le vecteur des observations sur les trois canaux $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^t$ décrit une trajectoire paramétrée par θ qui est centrée le long d'une ellipse. On peut vérifier que cette ellipse est définie dans un plan affine caractérisé par le vecteur normal suivant :

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\sin(\phi_2 - \phi_3)}{g_1}, \frac{\sin(\phi_3 - \phi_1)}{g_2}, \frac{\sin(\phi_1 - \phi_2)}{g_3} \right)^t, \quad (2)$$

$$\text{tel que } E[\langle \mathbf{y}, \mathbf{n} \rangle] = 3 \text{ pour tout } \theta \in [0, 2\pi]. \quad (3)$$

Une expression analytique explicite des directions et longueurs des axes de l'ellipse en fonction des paramètres du déséquilibre, ici les amplitudes g_1, g_2, g_3 et les déphasages relatifs ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , est par exemple donnée dans [2] dans le contexte de signaux électriques triphasés.

2 Principes d'estimation du déphasage

Dans le cas d'un IMZ idéal, les paramètres de nuisance se simplifient ainsi :

Biais connus : $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, les décalages sur la puissance mesurée sur chaque canal sont connus et peuvent alors être supposés nuls sans perte de généralité,

Équilibre des puissances : $g_1 = g_2 = g_3 \equiv g \in \mathbb{R}$: les canaux sont parfaitement équilibrés en puissance,

Équilibre des phases : $\phi_1 = 0, \phi_2 = \frac{2\pi}{3}, \phi_3 = -\frac{2\pi}{3}$, les déphasages relatifs entre les trois canaux sont connus et parfaitement équilibrés sur le cercle trigonométrique.

Sous ces hypothèses, le problème de l'estimation de la phase θ est similaire à celui d'un système triphasé en électrotechnique. Les deux premières composantes de la transformation de Clarke :

$$c_1 \equiv \frac{2}{3} \left(y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \right), \quad c_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} (y_3 - y_2), \quad (4)$$

d'accéder directement à la fonction de déphasage $\cos^2(\frac{\theta}{2})$.

sont, en moyenne, en quadrature :

$$E[c_1] = g \cos \theta, \quad E[c_2] = g \sin \theta,$$

si bien qu'un estimateur naturel du paramètre de phase θ (modulo 2π) est $\hat{\theta} = \text{atan2}(c_2, c_1)$, où $\text{atan2}(b, a)$ est l'angle formé par les vecteurs $(1, 0)^t$ et $(a, b)^t$.

2.1 Problème de la dérive instrumentale

Pour des capteurs devant fonctionner longtemps en autonomie, il est inévitable qu'une dérive instrumentale intervienne par rapport à l'état nominal, ici le cas idéal présenté ci-avant. Estimer les paramètres de cette ellipse permet de remonter aux coefficients de nuisance et de les compenser pour obtenir une estimation consistante de θ .

Les méthodes classiques d'analyse de données utilisées en électrotechnique comme la décomposition en valeurs singulières [2] reposent cependant sur deux propriétés spécifiques : 1) l'ellipse est centrée à l'origine, son centre est donc connu, et 2) les observations se distribuent de manière quasi-uniforme tout autour de la trajectoire elliptique, le nombre d'acquisitions et de tours d'ellipses effectués sur la fenêtre d'observation étant en général très grand.

Dans le cas des capteurs chimiques IMZ, le problème diffère sur ces deux points : 1) en raison du facteur $1 + \cos(\phi_i + \theta)$ dans (1), le centre de l'ellipse dépend des amplitudes g_1, g_2, g_3 et est donc inconnu même dans le cas idéal. Et 2) l'IMZ est dimensionné pour effectuer dans les cas d'utilisation typique une fraction de tour d'ellipse et l'hypothèse de distribution uniforme tout autour de l'ellipse est alors irréaliste.

3 Méthodologie proposée

Notre objectif ici est de décrire une procédure qui vise à suivre en ligne l'évolution des paramètres de nuisance ν de manière à garder une estimation consistante du déphasage θ_k sans recalibration "manuelle" du système.

Notre hypothèse principale est que ν évolue lentement par rapport à θ , et ces paramètres de nuisance peuvent être supposés constant sur une fenêtre d'observation. Cela nous permet de considérer que le modèle (1) est valide sur une plage de temps assez longue pour que θ ait le temps d'évoluer suffisamment (idéalement, de couvrir l'intervalle $[0, 2\pi]$) pour obtenir une estimation précise de la trajectoire elliptique et donc des paramètres de nuisance. Sur une telle fenêtre de n observations $\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_n$, l'objectif consiste à estimer conjointement ν et $\theta_1 \dots \theta_n$.

3.1 Méthode linéaire : ajustement de l'ellipse

Afin d'estimer l'ellipse de la trajectoire, une première étape consiste à estimer le plan affine dans lequel elle est définie. D'après (1) et (2), le vecteur \mathbf{n} peut être directement obtenu, à un coefficient de proportionnalité arbitraire près, comme l'estimateur au sens des moindres carrés

$$\hat{\mathbf{n}} = \arg \min_{\mathbf{n}} \|\mathbf{u} - \mathbf{Y}\mathbf{n}\|^2 = \mathbf{Y}^\dagger \mathbf{u},$$

où $\mathbf{u} = (1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur constant lié au décalage du plan affine fixé à 1 par convention, $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n]^t \in \mathbb{R}^{n \times 3}$ est la matrice des données, et \mathbf{Y}^\dagger sa pseudo-inverse. Il est maintenant possible de projeter les observations $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ dans le plan ainsi estimé, et l'on note $(z_1, z_2)^t \in \mathbb{R}^2$ la projection obtenue dans une base orthonormale (arbitraire) de ce plan. Dans ce plan, l'ellipse est définie sous sa forme quadratique :

$$az_1^2 + bz_1z_2 + cz_2^2 + dz_1 + ez_2 = 1. \quad (5)$$

Cette représentation a le grand avantage d'être linéaire par rapport aux paramètres $\boldsymbol{\beta} = (a, b, c, d, e)^t \in \mathbb{R}^5$ de l'ellipse à estimer. Ces paramètres permettent finalement de remonter aux paramètres géométriques de l'ellipse (directions des axes et longueurs, centre) comme per exemple détaillé dans [3], et ainsi aux paramètres de nuisance $\boldsymbol{\nu}$ et au déphasage θ . Néanmoins ce problème d'estimation est connue pour être peu stable dès lors qu'on ne dispose pas de suffisamment de données. C'est par exemple le cas si une trop petite fraction d'arc de l'ellipse est décrite au cours de la fenêtre d'observation. Dans ce cas, une méthode de moindres carrés régularisée permet de privilégier des solutions physiquement admissibles. Le problème d'estimation peut être formulé comme

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\alpha) = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} \|\mathbf{u} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}\|^2 + \alpha \|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^*\|^2,$$

où $\boldsymbol{\beta}^*$ est une solution *a priori*, e.g. les paramètres de l'ellipse dans le cas nominal de la partie 2 ou encore une solution obtenue à partir de l'estimation du vecteur normal $\hat{\mathbf{n}}$ et de son expression (2). La matrice $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times 5}$ se déduit enfin des observations projetées, chaque ligne étant obtenue par l'expansion polynomiale à l'ordre deux associée à la forme quadratique (5). Un paramètre crucial pour l'estimation est le paramètre de régularisation $\alpha > 0$. Une approche originale développée dans ce contexte consiste à choisir la valeur de α pour laquelle les contraintes du modèle physique (1) sont le mieux satisfaites. Si l'on suppose que les biais sont connus (ce qui revient à supposer qu'il n'y a pas eu de dérive sur ces paramètres depuis l'étape de calibration ou leur dernière estimation), on peut alors poser $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ quitte à les retrancher aux mesures de puissance. Dans ce cas le centre de l'ellipse correspond aux paramètres de gain (g_1, g_2, g_3) dans \mathbb{R}^3 et l'on peut ainsi sélectionner la meilleur valeur de α au sens de ce critère³.

3.2 Minimisation alternée

Lorsque les biais ne peuvent plus être supposés connus, la régularisation introduite dans la méthode linéaire précédente n'est plus possible. Nous proposons (a) un changement de l'espace de représentation qui "bi-linéarise" le problème et (b) une minimisation alternée entre $\boldsymbol{\nu}$ et θ . Nous verrons que le grand avantage de la minimisation alternée est que chaque itération prend une forme particulièrement simple. Par ailleurs l'estimation linéaire précédente permet d'obtenir une initialisation pertinente de l'algorithme.

3. Le lecteur intéressé peut consulter le dépôt git https://github.com/fchatelain/calibration_MZI_triphasés pour plus de détails sur cette approche et les simulations associées.

La première étape consiste à reformuler (1) de manière à faire apparaître un problème de factorisation de matrice et de retrouver l'équation de l'ellipse. Rappelons tout d'abord que

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \quad (6)$$

En injectant cette égalité dans (1), on peut réécrire la fonction de régression comme :

$$f_i(\boldsymbol{\nu}, \theta) = g_i(1 + \cos(\phi_i) \cos(\theta) - \sin(\phi_i) \sin(\theta)) + a_i \quad (7)$$

En collectant f_1, f_2, f_3 dans un vecteur \mathbf{f} , on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\boldsymbol{\nu}, \theta) &= \begin{pmatrix} g_1 + a_1 & g_1 \cos(\phi_1) & -g_1 \sin(\phi_1) \\ g_2 + a_2 & g_2 \cos(\phi_2) & -g_2 \sin(\phi_2) \\ g_3 + a_3 & g_3 \cos(\phi_3) & -g_3 \sin(\phi_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{M}(\boldsymbol{\nu})\mathbf{x}(\theta) \end{aligned} \quad (8)$$

où $\mathbf{M}(\boldsymbol{\nu})$ ne dépend que des paramètres de nuisance, tandis que $\mathbf{x}(\theta)$ ne dépend que de la différence de phase. Les observations \mathbf{Y} peuvent être modélisées sous forme matricielle :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\nu})\mathbf{X}(\theta) + \epsilon. \quad (9)$$

Le problème d'estimation peut ainsi s'écrire comme un problème de factorisation de matrice. Les relations $\boldsymbol{\nu} \rightarrow \mathbf{M}(\boldsymbol{\nu})$ et $\theta \rightarrow \mathbf{X}(\theta)$ sont bijectives et facilement inversibles sur leur domaine. On peut donc minimiser

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \mathbf{X} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{M}\mathbf{X}\|^2 \quad (10)$$

où $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$ exprime la contrainte (non-convexe) sur les colonnes de \mathbf{X} donnée par (8), à savoir que chaque colonne s'écrit $(1, a, b)^t$ où $a^2 + b^2 = 1$ ⁴. La stratégie naturelle de minimisation alternée pour ce problème consiste à estimer \mathbf{M} avec \mathbf{X} fixe,

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{X}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{M}\mathbf{X}\|^2 = \mathbf{Y}\mathbf{X}^\dagger \quad (11)$$

où \mathbf{X}^\dagger est le pseudo-inverse de \mathbf{X} , et d'alternier avec une minimisation sur \mathbf{X} :

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{M}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{X} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{M}\mathbf{X}\|^2 \quad (12)$$

La minimisation sur \mathcal{X} n'étant pas faisable analytiquement, nous proposons d'utiliser une stratégie de projection de la solution non contrainte, i.e.

$$\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{M}) = \operatorname{Proj}_{\mathcal{X}}(\operatorname{argmin}_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3 \times n}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{M}\mathbf{X}\|^2) = \operatorname{Proj}_{\mathcal{X}}(\mathbf{M}^\dagger \mathbf{Y}) \quad (13)$$

où l'opérateur de projection sur \mathcal{X} effectue colonne-par-colonne la transformation suivante :

$$(a, b, c)^t \rightarrow \left(1, \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}\right)^t \quad (14)$$

4. On néglige ici pour simplifier la contrainte de positivité de la première colonne de \mathbf{M}

Projeter la solution non-contraite est une stratégie simple mais qui peut empêcher la convergence. Elle peut être remplacée facilement par une règle plus robuste (mais plus lente) qui consiste à projeter plutôt des pas de gradient, ou bien une recherche linéaire (*line search*) [6]. L'algorithme que nous proposons ici consiste donc à alterner les étapes suivantes à partir d'une initialisation $M^{(0)}$. On alterne

1. $X^{(t)} = \tilde{X}(M^{(t)})$
2. $M^{(t+1)} = M^*(X^{(t)})$

jusqu'à convergence, et l'on obtient $\theta_1, \dots, \theta_n$ par :

$$\theta_t = \text{atan2}(Y_{3,t}, Y_{2,t}), \quad (15)$$

et ν peut être obtenu à partir de M de manière similaire. Notons que la solution linéaire présentée précédemment est un bon choix pour initialiser l'algorithme afin de converger vers une solution pertinente.

4 Application et résultats

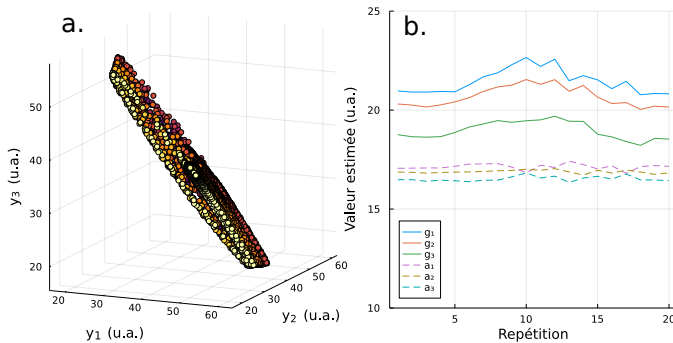


FIGURE 2: a. Sortie brute d'un IMZ de l'instrument d'Aryballe. Chaque point représente la sortie des trois canaux en un instant k , qui sont fonction de la différence de phase θ_k entre les deux branches de l'IMZ. Les points sont colorés différemment en fonction du temps (index de la répétition, allant de 1 à 20). Selon (8), les données doivent être distribuées le long d'une ellipse dans \mathbb{R}^3 . Cela est vrai sur des intervalles courts, mais la dérive change la forme de l'ellipse. b. Estimation des paramètres de calibration correspond aux données de la figure de gauche. Pour chaque répétition, les paramètres de nuisance sont estimés avec la méthode itérée. Les paramètres g et a sont représentés ici en fonction du numéro de répétition. Une dérive significative sur g est amorcée à partir de la 5e répétition, et qui dévie de la valeur nominale dès la première répétition. Néanmoins, cela n'impacte que peu l'estimation de la phase (données non montrées).

4.1 Estimation dans le cas idéal

Nous avons appliqué nos méthodes à des données issues d'un instrument développé par Aryballe (Grenoble) [1]. Il s'agit d'un "nez artificiel", composé d'un ensemble de 64 capteurs chimiques, dont l'objectif est de pouvoir détecter et reconnaître une gamme importante de composés organiques volatils (COV) grâce à la diversité des réponses des capteurs.

Dans l'expérience que nous analysons ici, nous avons utilisé les COV suivants : R-carvone et Octanol en différentes proportions (100%-0%, 20%-80%, 50%-50%, 80%-20%, 0%-100%). A chaque cycle expérimental, les 5 mélanges sont injectés successivement dans l'instrument, suivie d'une injection

d'air à titre de contrôle. L'expérience compte au total 20 cycles, répartis sur 3h40. Chaque cycle dure au total 110 secondes.

Les 64 capteurs qui forment l'instrument peuvent être vus comme 64 IMZ indépendants, susceptibles de dériver chacun de manière idiosyncratique. Nous analysons les 64 capteurs séparément, et appliquons une analyse par bloc où chaque bloc est formé d'un cycle (dit "répétition") complet de COVs (il y a donc 20 blocs).

Une partie des résultats est présentée sur la fig. 2. Pour ce jeu de données, même si une dérive est détectée sur l'ensemble des capteurs, elle n'affecte que peu l'estimation de la phase (autour de 10 degrés d'arc de différence pour les capteurs les plus affectés).

5 Conclusion

Les dérives dans l'interférométrie de Mach-Zehnder sont susceptibles d'être corrigées en ligne, ce qui permet (potentiellement) d'étendre la durée d'usage autonome des systèmes embarqués intégrant cette technologie. Le niveau de difficulté de la correction dépend essentiellement de deux facteurs : le niveau de bruit, et la vitesse d'évolution de la dérive par rapport à la "vitesse angulaire" moyenne du déphasage. Plus la vitesse angulaire est rapide, plus on peut se permettre d'utiliser des méthodes simples et peu coûteuses. Les différentes méthodes que nous proposons ici permettent de couvrir une gamme assez large de niveaux de difficulté.

Références

- [1] S. Brenet, A. John-Herpin, F.-X. Gallat, B. Musnier, A. Buhot, C. Herrier, T. Rousselle, T. Livache, and Y. Hou. Highly-selective optoelectronic nose based on surface plasmon resonance imaging for sensing volatile organic compounds. *Analytical chemistry*, 90(16) :9879–9887, 2018.
- [2] V. Choqueuse, P. Granjon, A. Belouchrani, F. Auger, and M. Benbouzid. Monitoring of three-phase signals based on singular-value decomposition. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 10(6) :6156–6166, 2019.
- [3] W. Gander, G. H. Golub, and R. Strelbel. Least-squares fitting of circles and ellipses. *BIT Numerical Mathematics*, 34(4) :558–578, Dec 1994.
- [4] R. Halir, L. Vivien, X. Le Roux, D.-X. Xu, and P. Cheben. Direct and sensitive phase readout for integrated waveguide sensors. *IEEE Photonics Journal*, 5(4) :6800906–6800906, 2013.
- [5] C. McDonagh, C. S. Burke, and B. D. MacCraith. Optical chemical sensors. *Chemical reviews*, 108(2) :400–422, 2008.
- [6] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical optimization*. Springer, 1999.
- [7] B. Sepúlveda, J. S. Del Rio, M. Moreno, F.J. Blanco, K. Mayora, C. Domínguez, and L. M. Lechuga. Optical biosensor microsystems based on the integration of highly sensitive mach-zehnder interferometer devices. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 8(7) :S561, 2006.
- [8] K. P. Zetie, S. F. Adams, and R. M. Tocknell. How does a mach-zehnder interferometer work? *Physics Education*, 35(1) :46–48, jan 2000.