

# Discrétisation de l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser revisitée

Yves PRÉAUX et Abdel-Ouahab BOUDRAA

IRENav (EA3634), Ecole Navale/Arts-Métiers ParisTech, BCRM Brest, CC 600, 29240 Brest Cedex 9, France

(yves.preaux,boudra)@ecole-navale.fr

**Résumé** – L'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser permet la poursuite des modulations AM et FM des signaux non-stationnaires à bande étroite. Défini par une équation différentielle du second ordre, la discrétisation de cet opérateur instantané repose dans sa mise en oeuvre uniquement sur une suite discrète de valeurs indicées par des entiers naturels, sans faire apparaître directement la fréquence d'échantillonnage du signal. Cela entraîne qu'une partie de l'information du signal n'est pas exploitée par l'opérateur. L'objectif de ce article est de revisiter la discrétisation de l'opérateur et les algorithmes associés, en tenant compte du pas  $h$  de discrétisation. Nous illustrons et montrons l'apport de la prise en compte du pas  $h$ , permettant de faire l'équivalent d'une analyse multi-résolution, sur la démodulation d'un signal AM-FM en environnement bruité.

**Abstract** – Teager-Kaiser energy operator is effective for tracking AM and FM informations in narrow-band non-stationary signals. Based on second order differential equation, discretization of this instantaneous operator is only based on a series of sample values, without directly including the signal sampling rate. This leads to a part of the signal information not being captured by the operator. The aim of this paper is to revisit the discretization of the operator and the associated algorithms, taking into account the  $h$  discretization step. We illustrate and show the interest of taking into account the  $h$  step, equivalent to a multi-resolution analysis, on the demodulation of a noisy AM-FM signal.

## 1 Introduction

L'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser (TK), noté  ${}^c\Psi$ , a été introduit par Teager [1] et ses propriétés ont été explorées par Kaiser [2]. Appliqué à un signal réel  $x(t)$ ,  ${}^c\Psi$  est défini par

$${}^c\Psi x(t) = \left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^2 - x(t) \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (1)$$

où la variable  $t$  désigne le temps. La sortie  ${}^c\Psi x(t)$  est interprétée comme l'énergie instantanée pour générer le signal  $x(t)$ . Cet opérateur et ses extensions ont prouvé leur intérêt pour la démodulation d'une large classe de signaux AM-FM, en particulier pour le traitement de la parole et des images [3],[4],[5]. Soit  $x(t)$  un signal AM-FM à bande étroite

$$x(t) = a(t) \cos(\phi(t)) \quad (2)$$

la sortie de l'opérateur  ${}^c\Psi x(t)$  conduit à l'approximation [4]:

$${}^c\Psi x(t) \approx a^2(t) \dot{\phi}^2(t) \quad (3)$$

$$\omega(t) \approx \sqrt{\frac{{}^c\Psi \dot{x}(t)}{{}^c\Psi x(t)}}, \quad a(t) \approx \frac{{}^c\Psi x(t)}{\sqrt{{}^c\Psi \dot{x}(t)}} \quad (4)$$

Les équations de (4) forment l'algorithme de démodulation ESA (Energy Separation Algorithm), qui montrent l'intérêt de  ${}^c\Psi$  pour la poursuite des modulations AM et FM des signaux [4].

Pour un signal réel discret  $x(nT_e) \equiv x(n)$ ,  ${}^c\Psi$  s'écrit [2]:

$${}^d\Psi x_n = x_n^2 - x_{n-1} \cdot x_{n+1} \quad (5)$$

où  $T_e$  est le pas d'échantillonnage. La relation (5) montre le caractère instantané de  ${}^d\Psi$ , où trois échantillons seulement

suffisent à estimer l'énergie à chaque instant discrétisé.

L'expression de  ${}^d\Psi$  repose sur une suite discrète de valeurs  $(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . De part sa simplicité, la relation (5) est la plus utilisée, mais ne fait pas apparaître la fréquence d'échantillonnage,  $F_e = 1/T_e$ . Les travaux de la littérature ne font pas intervenir directement le lien entre la suite  $(x_n)$  et la suite temporelle  $(t_n)$  des échantillons dans la mise en oeuvre de  ${}^d\Psi$  [3]. Cela entraîne qu'une partie de l'information du signal n'est pas exploitée par  ${}^d\Psi$ , et ne permet pas la comparaison directe de signaux échantillonnés à des fréquences différentes. De plus les travaux de la littérature portant sur  ${}^c\Psi$  se limitent à des discrétisations avec un pas  $h = 1$ . Cet article a pour objectif de revisiter cette discrétisation et les algorithmes associés. Nous introduisons l'opérateur,  ${}^h\Psi$ , prenant en compte ce pas  $h$  de discrétisation, permettant ainsi d'avoir la capacité de disposer de versions du signal échantillonnées à différentes résolutions, pour mieux exploiter l'information véhiculée par le signal. Ceci est possible en sélectionnant un pas multiple du pas initial. Ainsi, nous introduisons deux opérateurs, notés  $\Delta_{pq}$  et  $\mathbf{R}_{pq}$ , et ce en ré-échantillonnant le signal.  $\Delta_{pq}$  s'appuie sur la différence entre deux ré-échantillonnages d'un même signal, et  $\mathbf{R}_{pq}$  s'appuie sur le rapport de ces ré-échantillonnages. La construction de ces opérateurs permet de tirer parti des variations de la sortie de  ${}^h\Psi x_n$  induites par la prise en compte du pas  $h$ .

## 2 Prise en compte du pas

Soit un pas de discrétisation  $h$ , pour un temps  $t$  quelconque, en notant  $x_{n-1} = x(t-h)$ ,  $x_n = x(t)$  et  $x_{n+1} = x(t+h)$ , on a

$$\frac{dx(t)}{dt} \simeq \frac{x_n - x_{n-1}}{h}, \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} \simeq \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{h^2} \quad (6)$$

d'où, en développant

$${}^h\Psi x_n \simeq \frac{x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1}}{h^2} = \frac{1}{h^2} d\Psi x_n \quad (7)$$

La variation de la sortie de l'opérateur en fonction du pas  $h$  est une source d'information.

## 2.1 Opérateurs $\Delta_{pq}$ et $\mathbf{R}_{pq}$

Les nouveaux opérateurs  $\Delta_{pq}$  et  $\mathbf{R}_{pq}$  sont construits à partir de  ${}^h\Psi x_n$ , et sont définis, pour  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  par

$$\Delta_{pq} = p^2 \times ({}^{ph})\Psi - q^2 \times ({}^{qh})\Psi \text{ et } \mathbf{R}_{pq} = \frac{({}^{ph})\Psi}{({}^{qh})\Psi} \quad (8)$$

Soit le signal harmonique  $x(t) = a \cos(\omega t)$ . En appliquant  ${}^h\Psi$  à  $x(t)$  discrétisé avec les pas  $ph$  et  $qh$ , on a :

$$\begin{aligned} ({}^{ph})\Psi x_n &= \frac{1}{(ph)^2} (a \cos(\omega t_n))^2 \\ &- \frac{1}{(ph)^2} (a \cos(\omega(t_n + ph)))(a \cos(\omega(t_n - ph))) \\ &= \frac{a^2}{(ph)^2} \sin^2(ph\omega) \end{aligned} \quad (9)$$

$$({}^{qh})\Psi x_n = \frac{a^2}{(qh)^2} \sin^2(qh\omega) \quad (10)$$

On en déduit une expression, indépendante de  $n$ , de  $\mathbf{R}_{pq}x_n$  :

$$\mathbf{R}_{pq}x_n = \left( \frac{q}{p} \times \frac{\sin(ph\omega)}{\sin(qh\omega)} \right)^2 \quad (11)$$

Comme  $\frac{p^2 \times ({}^{ph})\Psi x_n}{\sin^2(ph\omega)} = \frac{a^2}{h^2}$  ne dépend pas de  $p$ , on a

$$\begin{aligned} h^2 \Delta_{pq} x_n &= (ph)^2 \times ({}^{ph})\Psi x_n - (qh)^2 \times ({}^{qh})\Psi x_n \\ &= \frac{a^2}{2} (\cos(2qh\omega) - \cos(2ph\omega)) \end{aligned} \quad (12)$$

D'où, finalement :

$$\Delta_{pq} x_n = \frac{a^2}{2h^2} (\cos(2qh\omega) - \cos(2ph\omega)) \quad (13)$$

## 2.2 Comportement de $\Delta_{pq}$ dans du bruit

Soit un signal bruité  $x(t) = s(t) + b(t)$  où  $b(t)$  est un bruit centré et  $s(t)$  un signal déterministe. Supposons que  $s(t)$  et  $b(t)$  sont indépendants. Appliquons  ${}^h\Psi$  à  $x(t)$  discrétisé avec le pas  $ph$  (Eq. 7):

$$\begin{aligned} ({}^{ph})\Psi x_n &= ({}^{ph})\Psi (s + b)_n \\ &= \frac{1}{(ph)^2} [(s_n + b_n)^2 - (s_{n-1} + b_{n-1})(s_{n+1} + b_{n+1})] \\ &= ({}^{ph})\Psi s_n + ({}^{ph})\Psi b_n - (R_p(s, b))_n \end{aligned} \quad (14)$$

$$(R_p(s, b))_n = \frac{1}{(ph)^2} (2s_n b_n + s_{n-1} b_{n+1} + s_{n+1} b_{n-1}) \quad (15)$$

En considérant l'espérance de ces quantités, on a donc

$$\mathbb{E}({}^{ph}\Psi x) = \mathbb{E}({}^{ph}\Psi s) + \mathbb{E}({}^{ph}\Psi b) - \mathbb{E}(R_p(s, b)) \quad (16)$$

or,  $b(t)$  étant indépendant de  $s(t)$ , on a

$$\begin{aligned} p^2 h^2 \mathbb{E}(R_p(s, b)) &= 2\mathbb{E}(s)\mathbb{E}(b) + \mathbb{E}(s)\mathbb{E}(b) + \mathbb{E}(s)\mathbb{E}(b) \\ &= 4\mathbb{E}(s)\mathbb{E}(b). \end{aligned} \quad (17)$$

Comme  $\mathbb{E}(b) = 0$ , on a  $\mathbb{E}(R_p(s, b)) = 0$ , d'où la relation :

$$\mathbb{E}({}^{ph}\Psi x) = \mathbb{E}({}^{ph}\Psi s) + \mathbb{E}({}^{ph}\Psi b). \quad (18)$$

Dès lors que chaque réalisation de  $b(t)$  est indépendante des autres, puisque  ${}^{ph}\Psi b_n = \frac{1}{(ph)^2} (b_n^2 - b_{n-ph}b_{n+ph})$ , on a

$$\mathbb{E}({}^{ph}\Psi b) = \frac{1}{(ph)^2} [\mathbb{E}(b^2) - (\mathbb{E}(b))^2] = \frac{1}{(ph)^2} \mathbb{E}(b^2) \quad (19)$$

Donc  $\mathbb{E}({}^{ph}\Psi b)$  et  $\mathbb{E}({}^{qh}\Psi b)$  sont liés par la relation

$$\mathbb{E}({}^{qh}\Psi b) = \frac{p^2}{q^2} \mathbb{E}({}^{ph}\Psi b). \quad (20)$$

Pour  $\Delta_{pq} = p^2 {}^{ph}\Psi - q^2 {}^{qh}\Psi$ , on a donc

$$\mathbb{E}(\Delta_{pq} x) = p^2 \mathbb{E}({}^{ph}\Psi x) - q^2 \mathbb{E}({}^{qh}\Psi x) = \mathbb{E}(\Delta_{pq} s) \quad (21)$$

Par conséquent, l'espérance mathématique de la sortie de  $\Delta_{pq}$  n'est donc pas modifiée par le bruit  $b(t)$ . Nous exploitons plus loin cette propriété pour la démodulation d'un signal AM-FM par l'opérateur  ${}^h\mathbf{T}$ .

## 2.3 Démodulation d'un signal par $\mathbf{R}_{21}$

### Proposition

Pour tout  $n \in \{2, 3, \dots, N\}$  :

$$\mathbf{R}_{21} x_n = \cos^2(h\omega), \quad \omega_n = \frac{1}{h} \arccos(\sqrt{\mathbf{R}_{21} x_n}) \quad (22)$$

$$a_n = \frac{h}{|\sin(h\omega)|} \sqrt{{}^h\Psi x_n} = \frac{2h}{|\sin(2h\omega)|} \sqrt{{}^{2h}\Psi x_n} \quad (23)$$

### Preuve

$$\mathbf{R}_{21} x_n = \frac{{}^{2h}\Psi x_n}{{}^h\Psi x_n} = \left( \frac{1}{2} \times \frac{\sin(2h\omega)}{\sin(h\omega)} \right)^2 = \cos^2(h\omega) \quad (24)$$

On a alors

$$\cos(\omega h) = \sqrt{\mathbf{R}_{21} x_n}, \quad (25)$$

ce qui permet d'obtenir (22). On en déduit alors que

$$a^2 = \frac{h^2}{\sin^2(h\omega)} {}^h\Psi x_n = \frac{4h^2}{\sin^2(2h\omega)} {}^{2h}\Psi x_n, \quad (26)$$

d'où la relation (23). Pour éviter les termes négatifs sous la racine dans la relation (22), on peut utiliser la relation

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

On démodule alors  $x(t)$  par l'opérateur  $\mathbf{R}_{21}$  comme suit:

$$\omega_n = \pm \frac{1}{2h} [\arccos(2\mathbf{R}_{21} x_n - 1) + 2k\pi] \quad k \in \mathbb{Z} \quad (27)$$

## 2.4 Opérateur ${}^h\mathbf{T}$

Comme  $\Delta_{pq}$  permet une caractérisation du signal statistiquement indépendante du bruit, nous démodulons le signal en utilisant uniquement l'opérateur  $\Delta_{pq}$ . En effectuant le rapport de deux opérateurs de ce type ( $\Delta_{pq}$  et  $\Delta_{p'q'}$ ), nous allons éliminer  $a$  et obtenir  $\omega$ . Une fois  $\omega$  connu,  $a$  s'obtiendra facilement.

Soit le signal harmonique  $x(t) = a \cos(\omega t)$ . On a

$$\Delta_{21}x_n = 4 \cdot ({}^{2h})\Psi x_n - {}^h\Psi x_n = \frac{a^2}{h^2} (\sin^2(2h\omega) - \sin^2(h\omega))$$

$$\Delta_{31}x_n = 9 \cdot ({}^{3h})\Psi x_n - {}^h\Psi x_n = \frac{a^2}{h^2} (\sin^2(3h\omega) - \sin^2(h\omega))$$

Soit  ${}^h\mathbf{T}$  l'opérateur défini par

$${}^h\mathbf{T} = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{21}}, \quad (28)$$

On obtient l'expression suivante, indépendante de  $a$  :

$${}^h\mathbf{T}x_n = \frac{\Delta_{31}x_n}{\Delta_{21}x_n} = \frac{\sin^2(3h\omega) - \sin^2(h\omega)}{\sin^2(2h\omega) - \sin^2(h\omega)} \quad (29)$$

En utilisant des simplifications trigonométriques on obtient

$${}^h\mathbf{T}x_n = \frac{(3 - 4 \sin^2(h\omega))^2 - 1}{3 - 4 \sin^2(h\omega)} = u - \frac{1}{u} \quad (30)$$

avec  $u = 3 - 4 \sin^2(h\omega) = 1 + 2 \cos(2h\omega)$ ,  $u$  doit vérifier

$$u^2 - {}^h\mathbf{T}x_n u - 1 = 0 \quad (31)$$

qui admet deux solutions réelles

$$u = \frac{{}^h\mathbf{T}x_n \pm \sqrt{({}^h\mathbf{T}x_n)^2 + 4}}{2} \quad (32)$$

et on obtient  $\cos(2h\omega) = \frac{u-1}{2}$ . Pour lever l'ambiguïté dans la résolution de cette équation, une solution est donnée par

$$\omega_n = \frac{1}{2h} \arccos\left(\frac{u_n - 1}{2}\right), \quad u_n = \frac{{}^h\mathbf{T}x_n + \sqrt{({}^h\mathbf{T}x_n)^2 + 4}}{2} \quad (33)$$

## 2.5 Algorithme ${}^h\mathbf{DESA}$

La fréquence instantanée (FI) et l'amplitude instantanée (AI) du signal sont obtenus par l'algorithmes ESA dans le cas continu et de DESA (Discrete ESA) dans le cas discret.

### 2.5.1 Opérateur ${}^h\mathbf{D}$

Les algorithmes DESA s'appuient sur la propriété  $\frac{{}^c\Psi \dot{x}(t)}{{}^c\Psi x(t)} = \mathbf{C}^{\text{te}} = \omega^2$  pour  $x(t)$  harmonique. Intéressons au cas discret en tenant compte du pas  $h$ . Pour  $x_n = a \cos(\omega t)$ ,  $x_{n-1} = a \cos(\omega(t-h))$  et  $x_{n+p} = a \cos(\omega(t+ph))$ , on définit la suite  $(y)_n$  par  $y_n = x_n - x_{n-1}$ . On a alors

$$h^2 \cdot {}^h\Psi y_n = h^2 \cdot {}^h\Psi x_n + h^2 \cdot {}^h\Psi x_{n-1} + (x_{n+1}x_{n-2} - x_n x_{n-1}) \quad (34)$$

Puisque  ${}^h\Psi x_n = {}^h\Psi x_{n-1} = \mathbf{C}^{\text{te}}$ , on obtient

$${}^h\Psi y_n = 2 \cdot {}^h\Psi x_n + \frac{1}{h^2} (x_{n+1}x_{n-2} - x_n x_{n-1}). \quad (35)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} x_{n+1}x_{n-2} - x_n x_{n-1} &= \frac{a^2}{2} [\cos(3\omega h) - \cos(\omega h)] \\ &= -2h^2 \cdot {}^h\Psi x_n \cos(\omega h) \end{aligned} \quad (36)$$

En combinant (34) et (35), on obtient donc

$${}^h\Psi y_n = 2 {}^h\Psi x_n - 2 {}^h\Psi x_n \cos(\omega h) \quad (37)$$

soit encore

$$\cos(\omega h) = 1 - \frac{{}^h\Psi y_n}{2 {}^h\Psi x_n} \quad (38)$$

Ce qui permet d'en déduire comme solution

$$\omega_n = \frac{1}{h} \arccos({}^h\mathbf{A}x_n) \quad (39)$$

avec

$${}^h\mathbf{A}x_n = 1 - \frac{{}^h\Psi y_n}{2 {}^h\Psi x_n} \quad \text{où } y_n = x_n - x_{n-1}. \quad (40)$$

Notons que pour  ${}^h\mathbf{A}$  les indices sont asymétriques. On définit l'opérateur  ${}^h\mathbf{D}$  qui repose sur une symétrisation des indices:

$${}^h\mathbf{D}x_n = 1 - \frac{{}^h\Psi y_n + {}^h\Psi y_{n+1}}{4 {}^h\Psi x_n} \quad \text{où } y_n = x_n - x_{n-1} \quad (41)$$

La démodulation du signal  $x(t)$  discrétisé est donnée par

$$\omega_n = \frac{1}{h} \arccos({}^h\mathbf{D}x_n), \quad a_n = h \cdot \sqrt{\frac{{}^h\Psi x_n}{1 - ({}^h\mathbf{D}x_n)^2}} \quad (42)$$

Pour  $h = 1$ ,  ${}^1\mathbf{D}$  correspond à l'ESA classique basé sur  ${}^d\Psi$ .

### 2.5.2 Démodulation des signaux AM-FM

Nous avons présenté la démodulation, par les opérateurs  ${}^h\Psi$ ,  $\mathbf{R}_{21}$  et  ${}^h\mathbf{T}$  dans le cas d'un signal  $s(t) = a \cos(\omega t)$ . Dans le cas d'un signal AM-FM,  $s(t) = a(t) \cos(\Phi(t))$ , de même que pour  ${}^d\Psi$ , la démodulation repose sur l'approximation  ${}^h\Psi x(t) \simeq a^2(t) \sin_c^2(h\dot{\Phi}(t))$ . Cette approximation est valide si  $\ddot{\phi}(t) \ll 2\dot{\phi}^2(t)$  et  ${}^h\Psi a(t) \ll a^2(t)\dot{\Phi}^2(t)$ . Alors que dans le cas harmonique, l'amplitude et la fréquence du signal sont constantes, dans le cas AM-FM, ces quantités sont des fonction du temps. Reprenons le cas du mélange additif de la sous-section (2.2). Comme indiqué par la relation (21) la sortie des opérateurs  $\Delta_{pq}$  est statistiquement indépendante du bruit, ce qui permet une bonne estimation de la FI. Appliquons l'opérateur  $\Delta_{21}$  à  $x(t)$  discrétisé. On a alors,

$$\begin{aligned} \Delta_{21}x_n &= 4 \cdot ({}^{2h})\Psi x_n - {}^h\Psi x_n \\ &\simeq \frac{a_n^2}{h^2} [\sin^2(2h\dot{\Phi}(t)) - \sin^2(h\dot{\Phi}(t))] \end{aligned} \quad (43)$$

En remplaçant  $\omega_n$  de la relation (33) par  $\dot{\Phi}_n$  on obtient

$$\dot{\Phi}_n \simeq \frac{1}{2h} \arccos\left(\frac{u_n - 1}{2}\right) \quad (44)$$

d'où

$$a_n \simeq h \sqrt{\frac{4 \cdot ({}^{2h})\Psi x_n - {}^h\Psi x_n}{\sin^2(2h\dot{\Phi}_n) - \sin^2(h\dot{\Phi}_n)}} \quad (45)$$

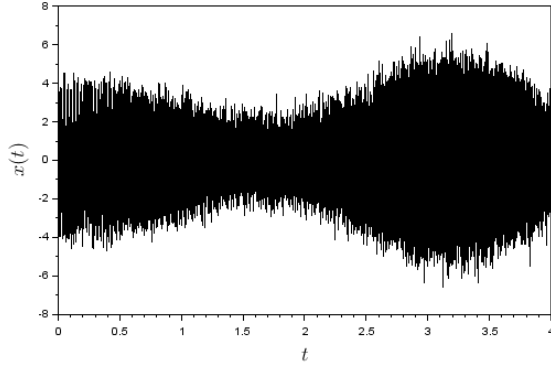


FIG. 1: Signal AM-FM  $s(t)$  entaché du bruit  $b(t)$  de RSB=15dB.

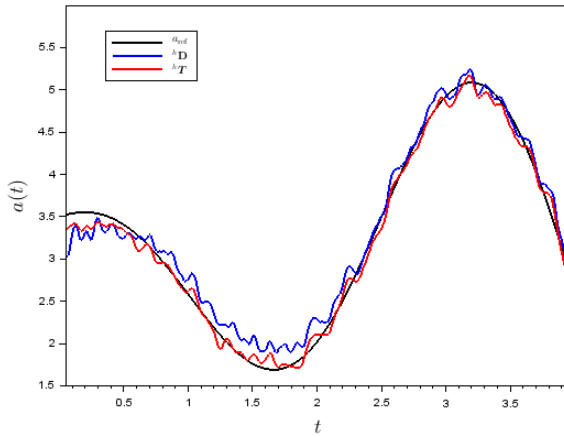


FIG. 2: AI  $a(t)$  de  $s(t)$  et AIs de  $x(t)$  calculées par  ${}^h\mathbf{T}$  et  ${}^1\mathbf{D}$ .

### 3 Résultats

Nous illustrons la démodulation basée sur l'opérateur  ${}^h\mathbf{T}$  sur le signal AM-FM  $s(t) = a(t) \cos(\Phi(t))$  avec  $a(t) = \frac{t+1}{2} \cos(2t) + 3$  et  $\Phi(t) = 200t\sqrt{5t+4} + 0.8 \cos(5t)$ , et entaché d'un bruit blanc  $b(t)$  de RSB=15dB (Fig. 1). La FI est  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\Phi}(t)$ . Les résultats de démodulation  ${}^h\mathbf{T}$  (indiqués en rouge) sont comparés à ceux  ${}^1\mathbf{D}$  qui n'est autre que le DESA classique basé sur  ${}^d\Psi$  (indiqués en bleu). L'algorithme de démodulation  ${}^h\mathbf{T}$  est donné par les relations (44) et (45). Les lois de référence d'amplitude  $a_{ref}(t)$  et de fréquence  $f_{ref}(t)$  sont indiquées en noire sur les courbes (2) et (3). Les résultats reportés dans les figures (2) et (3) montrent que les estimations des modulations  $a(t)$  et  $f(t)$  par  ${}^h\mathbf{T}$  sont meilleures que celles de  ${}^1\mathbf{D}$ , et en particulier celles de la FI en terme de précision comparée à  $f_{ref}(t)$ . Les performances de  ${}^h\mathbf{T}$  montrent l'intérêt de la nouvelle discrétisation basée sur le pas  $h$ , et le fait d'exploiter l'opérateur TK avec deux résolutions  $h$  et  $2h$ , comme indiqué par la relation (45). A cela s'ajoute la propriété donnée par la relation (21) illustrant que la sortie de  $\Delta_{pq}$  est statistiquement indépendante du bruit.

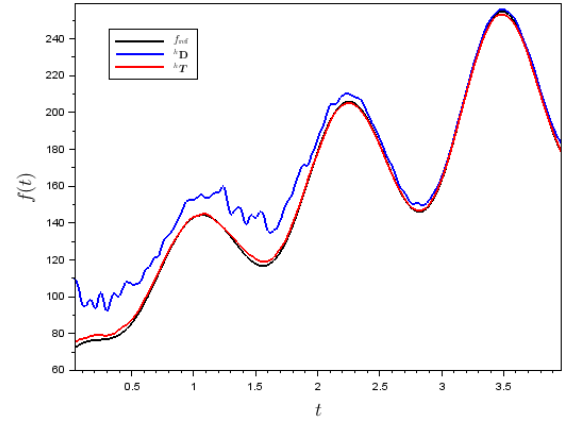


FIG. 3: FI  $a(t)$  de  $s(t)$  et FIs de  $x(t)$  calculées par  ${}^h\mathbf{T}$  et  ${}^1\mathbf{D}$ .

### 4 Conclusion

Nous avons revisité l'opérateur de TK classique,  ${}^d\Psi$ , en introduisant un nouvel opérateur  ${}^h\Psi$  qui, en prenant en compte le pas de discrétisation  $h$ , contrairement à  ${}^d\Psi$  d'exploiter plus d'informations sur le signal d'entrée via le pas  $h$ . Il permet également d'introduire de nouveaux opérateurs qui, en exploitant l'information provenant de la fréquence d'échantillonnage, conduisent à une démodulation plus précise de l'AI et la FI. En particulier, nous avons introduit l'opérateur  ${}^h\mathbf{T}$  qui permet d'éliminer, statistiquement, l'influence d'un bruit d'espérance nulle et conduit à une démodulation plus précise des AI et FI du signal que celle du DESA classique. Par ailleurs les résultats présentés, même préliminaires, montrent l'intérêt d'exploiter l'opérateur avec deux résolutions  $h$  et  $2h$ . Une large classe de signaux simulés et réels sont nécessaires pour confirmer les performances de la nouvelle discrétisation de l'opérateur TK, en particulier pour des RSB négatifs. Une direction de recherche consisterait à approfondir l'analyse multi-résolution de l'opérateur et la comparer à celle de la transformée ondelettes.

### References

- [1] H. Teager, S. Teager, "Evidence for nonlinear production mechanisms in the vocal tract," *Speech Production, Speech Modeling, NATO Advanced Study Inst.*, pp. 241-261, 1990.
- [2] J.F. Kaiser, "On a simple algorithm to calculate the 'energy' of a signal," *ICASSP*, pp. 381-384, 1990.
- [3] A.O. Boudraa and F. Salzenstein, "Teager-Kaiser energy methods for signal and image analysis: A review," *Digital Sig. Proc.*, vol. 78, pp. 338-375, 2018.
- [4] P. Maragos, J.F. Kaiser, T.F. Quatieri, "On amplitude and frequency demodulation using energy operators," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 41, no. 4, pp. 1532-1550, 1993.
- [5] A.C. Bovik, P. Maragos, and T.F. Quatieri, "AM-FM energy detection and separation in noise using multiband energy operators," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 41, pp. 3245-3265, 1993.