

Reconstruction de phase polarimétrique*

Julien FLAMANT¹, Konstantin USEVICH¹, Marianne CLAUSEL², David BRIE¹

¹Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000 Nancy, France

²Université de Lorraine, CNRS, Institut Elie Cartan de Lorraine, F-54000 Nancy, France

{julien.flamant, konstantin.usevich, marianne.clausel, david.brie}@univ-lorraine.fr

Résumé – Cet article introduit un nouveau modèle pour la *reconstruction de phase polarimétrique* qui permet la prise en compte de l’information de polarisation dans les problèmes de reconstruction de la phase en optique. Nous fournissons une caractérisation complète des propriétés d’unicité de ce nouveau modèle en exploitant les équivalences avec un problème de factorisation de polynômes. Deux catégories de méthodes de reconstruction, algébriques et itératives, sont proposées. Leur pertinence est illustrée sur une expérience de reconstruction en contexte bruité.

Abstract – This work introduces a novel Fourier phase retrieval model, called polarimetric phase retrieval that enables a systematic use of polarization information in Fourier phase retrieval problems. We provide a thorough characterization of uniqueness properties of this new model by unraveling equivalencies with a peculiar polynomial factorization problem. Two different but complementary categories of reconstruction methods are introduced, algebraic and iterative ones, whose relevance is illustrated on a noisy reconstruction experiment.

1 Introduction

Le problème de reconstruction de phase (*phase retrieval*) apparaît dans de nombreux domaines de l’imagerie allant de la cristallographie à l’astronomie, en passant par les nouvelles méthodes d’imagerie sans lentille [1]. Il vise à reconstruire un signal à partir du module de sa transformée de Fourier. Ce problème difficile a suscité de nombreux travaux depuis les années 1950, et un intérêt croissant de la part des communautés traitement du signal et mathématiques appliquées [2]. Toutefois, le problème de reconstruction de phase dans sa forme actuelle ne permet pas la prise en compte systématique de la polarisation, représentative de la nature vectorielle de la lumière. Elle joue pourtant un rôle clé dans de nombreuses applications de l’imagerie, car elle permet de révéler des caractéristiques inaccessibles à l’imagerie conventionnelle, telles que l’anisotropie. Dans ce but, cet article introduit un nouveau problème, appelé *reconstruction de phase polarimétrique*, qui généralise le problème de reconstruction de phase classique au cas des signaux polarisés. Formellement, il s’agit de reconstruire le champ électromagnétique bivarié à partir de l’énergie de projections polarimétriques de sa transformée de Fourier. Nous fournissons une caractérisation complète des propriétés d’unicité du problème : il en ressort que l’unicité de la solution peut être garantie pour presque tout signal bivarié. Ce résultat contraste ainsi avec le cas de la reconstruction de phase de Fourier univariée classique, qui n’admet pas de solution unique en général [3]. Enfin, différentes approches pour la résolution pratique du problème sont présentées et évaluées numériquement.

2 Modèle et équivalences

Reconstruction de phase polarimétrique Considérons un signal bivarié discret $\mathbf{x}[n] = (x_1[n], x_2[n]) \in \mathbb{C}^2$ défini pour $n = 0, 1, \dots, N-1$. Soit $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N \times 2}$ sa représentation matricielle obtenue par empilement de lignes. On définit le problème de reconstruction de phase polarimétrique (PPR, *polarimetric phase retrieval*) comme le problème de reconstruction du signal bivarié $\{\mathbf{x}[n]\}_{n=0,1,\dots,N-1}$ à partir de MP mesures scalaires quadratiques dans le domaine de Fourier. Formellement :

reconstruire $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N \times 2}$

$$\begin{aligned} &\text{à partir de } MP \text{ mesures } y_{m,p} = |\mathbf{a}_m^H \mathbf{X} \mathbf{b}_p|^2 \quad (\text{PPR}) \\ &m = 0, 1, \dots, M-1, \quad p = 0, 1, \dots, P-1 \end{aligned}$$

où $\mathbf{a}_m \in \mathbb{C}^N$ est le vecteur de Fourier discret à la fréquence $\frac{2\pi m}{M}$, i.e. $a_m[n] = \exp(j \frac{2\pi m}{M} n)$, et les $\mathbf{b}_p \in \mathbb{C}^2$ dénotent des vecteurs de projection arbitraires tels que $\|\mathbf{b}_p\|_2 = 1$.

Sur le plan physique, le problème PPR s’interprète comme le problème de reconstruction du champ électromagnétique transverse (bivarié) – fonction du temps ou de l’espace – à partir de mesures d’intensité réalisées dans l’espace *réciroque* (de Fourier). En particulier, les mesures $y_{m,p}$ décrivent la physique de l’acquisition en imagerie sans lentille¹, où seules des mesures d’intensité peuvent être réalisées : les vecteurs de Fourier \mathbf{a}_m modélisent la diffraction de Fraunhofer, tandis que les \mathbf{b}_p représentent les différents polariseurs nécessaires à la mesure de la polarisation.

Il est important de noter que le schéma de mesure définissant PPR est ici *déterministe*. Ce choix, d’une part, reflète la

*Ce travail a été soutenu par le projet de recherche exploratoire OPENING 2019-2021 financé par le GDR ISIS et le CNRS.

1. aussi appelée *coherent diffraction imaging* ou *CDI* en anglais.

physique de l'acquisition polarimétrique, où un choix de polariseurs \mathbf{b}_p est effectué préalablement. D'autre part, ce cadre induit une analyse théorique très différente de la plupart des approches développées dans la littérature [4, 5], qui reposent sur l'introduction d'une part d'aléatoire (ex. vecteurs \mathbf{a}_m gaussiens i.i.d., masques binaires aléatoires [6]) pour formuler différentes garanties mathématiques telles que la stabilité. En pratique, l'étude des propriétés d'unicité de **PPR** repose ici sur un jeu d'équivalences et une reformulation polynomiale du problème original, décrites ci-après et détaillées dans [7].

Reconstruction de phase bivariée Soit $\mathfrak{X}[m] = (\mathbf{a}_m^H \mathbf{X})^\top \in \mathbb{C}^2$ le vecteur de transformée de Fourier discrète du signal $\{\mathbf{x}[n]\}$ à la fréquence indexée par $m = 0, 1, \dots, M-1$. On définit pour tout m la matrice spectrale $\mathfrak{F}[m] \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ telle que :

$$\mathfrak{F}[m] \triangleq \mathfrak{X}[m] \mathfrak{X}[m]^H = \begin{bmatrix} |\mathfrak{X}_1[m]|^2 & \mathfrak{X}_1[m] \overline{\mathfrak{X}_2[m]} \\ \mathfrak{X}_2[m] \overline{\mathfrak{X}_1[m]} & |\mathfrak{X}_2[m]|^2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Cette matrice hermitienne mesure, à chaque fréquence, les intensités de chaque composante $x_1[n]$ et $x_2[n]$ du signal bivarié $\mathbf{x}[n]$ ainsi que leur phases relatives. On définit alors le problème de *reconstruction de phase bivariée*, dénoté **BPR** comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{reconstruire } \mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N \times 2} \\ & \text{à partir de } M \text{ mesures } \mathfrak{F}[m] \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad (\text{BPR}) \\ & m = 0, 1, \dots, M-1. \end{aligned}$$

Notons que le problème **BPR** peut être vu comme une reformulation bivariée de certains schémas de mesure proposés dans la littérature [8, 9]. Le théorème ci-dessous montre l'équivalence des problèmes **PPR** et **BPR** sous des conditions très générales.

Théorème 1 ([7]). *Si l'ensemble $\{\mathbf{b}_p \mathbf{b}_p^H\}_{p=0,1,\dots,P-1}$ définit une famille génératrice de l'espace des matrices hermitiennes de taille 2×2 , alors \mathbf{X} est solution du problème **PPR** ssi il est solution de **BPR**.*

Cette condition est aisément vérifiée dès lors que $P \geq 4$; par exemple pour $P = 4$, avec les vecteurs $\mathbf{b}_0 = [1 \ 0]^\top$, $\mathbf{b}_1 = [0 \ 1]^\top$, $\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 1]^\top$, $\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ j]^\top$. Le théorème 1 est fondamental pour notre étude : il permet à la fois d'établir les propriétés d'unicité et de formuler une stratégie de reconstruction du problème original **PPR** à partir de sa formulation équivalente **BPR**. On supposera donc les conditions du théorème 1 vérifiées dans toute la suite.

3 Propriétés d'unicité

Les propriétés d'unicité de la solution de **PPR** sont établies via le problème équivalent **BPR**. On suppose de plus $M \geq 2N-1$, i.e. un suréchantillonnage d'un facteur 2 dans le domaine de Fourier : cette hypothèse standard [2] dans les problèmes de reconstruction de phase de Fourier garantit la reconstruction des fonctions d'autocorrélation à partir des mesures.

Ambiguïtés triviales Le problème **BPR** présente trois grandes ambiguïtés irrésolvables, i.e. des transformations $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ qui laissent les mesures $\mathfrak{F}[m]$ inchangées :

- *décalage en temps* : soit $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $\mathbf{x}'[n] = \mathbf{x}[n - n_0]$. Alors $\mathfrak{F}'[m] = \mathfrak{F}[m]$ pour tout m .
- *phase globale* : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{x}'[n] = \exp(j\alpha)\mathbf{x}[n]$ for every n . Alors $\mathfrak{F}'[m] = \mathfrak{F}[m]$ pour tout m .
- *réflexion conjuguée* : considérons à présent $\mathbf{x}'[n] = \overline{\mathbf{x}[-n]}$. Cette transformation est une ambiguïté triviale si et seulement si $\mathfrak{F}[m] = \mathfrak{F}[m]^\top$ pour tout m . En termes physiques, cela correspond au cas où le signal \mathbf{x} est *linéairement polarisé*.

Ces ambiguïtés sont inévitables car intrinsèquement liées à la nature des observations dans **PPR** et **BPR**. Par suite, on dit qu'une solution de **BPR** (et donc de **PPR**) est unique si et seulement si les seules ambiguïtés de reconstruction sont les ambiguïtés triviales énoncées ci-dessus.

Reformulation polynomiale L'étude des propriétés d'unicité de **BPR** repose sur l'exploitation d'une représentation polynomiale associée au problème original. Soit $X_1(z)$ et $X_2(z)$ les polynômes en $z \in \mathbb{C}$ associés à $x_1[n]$ et $x_2[n]$ tels que

$$X_1(z) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] z^n, \quad X_2(z) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] z^n. \quad (2)$$

On définit également les polynômes $\tilde{X}_i(z) = z^{N-1} \overline{X_i(\bar{z}^{-1})}$ pour $i = 1, 2$. Il est alors possible de montrer [7] que **BPR** se ramène au problème de factorisation de polynômes suivant :

retrouver $X_1(z), X_2(z)$

$$\text{à partir de } \begin{cases} X_1(z) \tilde{X}_1(z), & X_1(z) \tilde{X}_2(z), \\ X_2(z) \tilde{X}_1(z), & X_2(z) \tilde{X}_2(z) \end{cases} \quad (3)$$

La formulation (3) est équivalente à **BPR** dans le cadre des hypothèses formulées en début de section.

Caractérisation des solutions La représentation polynomiale (3) permet une caractérisation complète de l'ensemble des solutions du problème **BPR** (et par extension de **PPR**).

Théorème 2. *Supposons que $X_1(z)$ et $X_2(z)$ ont D racines en commun (en comptant les multiplicités) telles que*

$$X_1(z) = Q(z)R_1(z), \quad X_2(z) = Q(z)R_2(z) \quad (4)$$

où $Q(z)$ est un polynôme monique de degré D et $R_1(z), R_2(z)$ sont les restes polynomiaux de $X_1(z)$ et $X_2(z)$ supposés premiers entre eux. Alors, toute solution de **BPR** peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \lambda_1 R_1(z) \prod_{i=1}^D (z - \beta_i) \\ X_2(z) &= \lambda_2 R_2(z) \prod_{i=1}^D (z - \beta_i) \end{aligned} \quad (5)$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sont des constantes explicites et où chaque β_i est choisi parmi les paires de racines $(\gamma_i, \bar{\gamma}_i^{-1})$ de $Q(z)\tilde{Q}(z)$.

La preuve complète de ce théorème est donnée dans [7]. En particulier, le théorème 2 indique le nombre exact de solutions de BPR, à savoir :

$$\# \text{ solutions de BPR} = \prod_{i=1, |\gamma_i| \neq 1}^{N_D} (m_i + 1) \quad (6)$$

où N_D est le nombre de paires de racines distinctes $(\gamma_i, \bar{\gamma}_i)$ et où m_i est leur multiplicité. Ce résultat montre que le nombre de solutions de PPR est borné supérieurement par 2^D , donnant une condition suffisante d'unicité très simple :

Corollaire 1. *Si les polynômes $X_1(z)$ et $X_2(z)$ sont premiers entre eux, alors le problème PPR admet une solution unique.*

On retrouve ainsi un résultat connu dans la littérature [8, 9]. C'est une propriété fondamentale de BPR : étant donné que l'ensemble des polynômes $X_1(z), X_2(z)$ ayant au moins une racine en commun est de mesure nulle, le problème BPR admet une unique solution pour presque tout les signaux.

4 Méthodes de reconstruction

On supposera dans la suite que le problème PPR admet une unique solution. On cherche à présent à reconstruire le signal (dans sa forme matricielle) $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N \times 2}$ à partir de mesures bruitées, que l'on supposera suivre un modèle additif gaussien

$$y_{m,p} = |\mathbf{a}_m^H \mathbf{X} \mathbf{b}_p|^2 + n_{m,p}, \quad n_{m,p} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (7)$$

où σ^2 est la variance du bruit. Le problème de reconstruction de phase polarimétrique se formule donc naturellement comme le problème d'optimisation non-convexe suivant :

$$\arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N \times 2}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{P-1} (y_{m,p} - |\mathbf{a}_m^H \mathbf{X} \mathbf{b}_p|^2)^2. \quad (8)$$

Nous proposons deux catégories d'approches différentes mais complémentaires : la première, algébrique, est propre à PPR et la représentation polynomiale associée à BPR. La seconde est plus classique, basée sur le développement d'algorithmes itératifs pour la résolution de (8).

Algorithmes de GCD polynomiaux approchés L'approche se décompose en deux étapes. Dans un premier temps, il s'agit de reconstruire les 4 polynômes $X_i(z)\tilde{X}_j(z), i, j = 1, 2$ à partir des mesures bruitées (7). De manière équivalente, il s'agit de reconstruire, à chaque fréquence m , la matrice spectrale $\mathfrak{F}[m]$ à partir de P projections scalaires. En pratique cela correspond à la résolution d'un problème de moindres carrés, détaillé dans [7]. La deuxième étape vise à estimer $X_1(z)$ et $X_2(z)$ à partir des polynômes de mesure estimés à l'étape 1. Pour cela, on utilise le fait que, dans le cas où $X_1(z)$ et $X_2(z)$ sont premiers entre eux, $X_1(z) = \gcd(X_1(z)\tilde{X}_1(z), X_1(z)\tilde{X}_2(z))$ et $X_2(z) = \gcd(X_2(z)\tilde{X}_1(z), X_2(z)\tilde{X}_2(z))$. Le calcul de plus grand diviseur commun (gcd) entre polynômes estimés (ou bruités) se pose alors comme un calcul d'approximation de gcd

[10]. Cette approche repose sur les matrices sous-résultante de Sylvester. Pour deux polynômes complexes p et q de même degré d , la matrice sous-résultante de Sylvester d'ordre m est une matrice de taille $(m + d + 1) \times 2(m + 1)$ telle que

$$\mathcal{S}_m(p, q) = \begin{bmatrix} p_0 & & & q_0 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ p_d & & p_0 & q_d & & q_0 \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & p_d & & q_d \end{bmatrix} \quad (9)$$

Il peut être montré [10] que les noyaux à gauche et à droite contiennent respectivement l'information liée à $\gcd(p, q)$ et à ses co-facteurs. Ainsi, il est possible d'obtenir les coefficients des polynômes $X_1(z)$ et $X_2(z)$ par un simple calcul de SVD. La procédure complète assortie de deux algorithmes pratiques – *leftKer Sylvester* et *rightKer Sylvester* – est détaillée dans [7].

Wirtinger Flow Ce premier algorithme itératif s'inspire de l'approche décrite par [11] pour la résolution du problème de reconstruction de phase standard. Dans notre cas, l'idée est de chercher à minimiser directement le coût non-convexe (8) par une descente de gradient complexe à l'aide des dérivées de Wirtinger. Formellement, si l'on note $F(\cdot)$ la fonction coût dans (8), l'itération k s'écrit

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \eta_k \nabla_{\bar{\mathbf{X}}} F(\mathbf{X}^{(k)}), \quad (10)$$

où $\nabla_{\bar{\mathbf{X}}} F$ est le gradient complexe, qui peut être calculé explicitement dans notre cas. De plus, à chaque itération le pas η_k optimal peut être obtenu sans surcoût – voir [7, §5.2] pour les détails. Cette méthode a l'avantage d'une complexité en $\mathcal{O}(N)$ par itération mais nécessite une initialisation judicieuse afin d'éviter la convergence vers un minimal local voire un point selle. Dans ce travail, nous considérons une initialisation algébrique basée sur *rightKer Sylvester*, peu coûteuse et dont la supériorité vis-à-vis de l'initialisation spectrale classique [11] est établie numériquement dans [7] pour le cadre du schéma de mesure déterministe de PPR.

Relaxation SDP Il s'agit de construire, à partir du problème original (8), un nouveau problème d'optimisation – convexe cette fois-ci – appelée *relaxation semidéfinie positive (SDP)*. C'est une procédure bien connue dans les problèmes de reconstruction de phase, introduite par [4, 12] et connue sous le nom de *PhaseLift*. Dans le cas de PPR, la dérivation d'une telle relaxation est rendue plus difficile en raison de la forme des mesures – le signal à reconstruire \mathbf{X} est matriciel, et est *sandwiché* à gauche et à droite par les vecteurs \mathbf{a}_m et \mathbf{b}_p , respectivement. Toutefois, on peut obtenir une relaxation SDP du problème (8) en considérant le signal vectorisé $\text{vec } \mathbf{X} \triangleq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^{2N}$: ainsi, on peut réécrire les mesures de PPR comme des fonctions linéaires de la matrice SDP de rang 1 $\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^H \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$:

$$y_{m,p} = |\mathbf{a}_m^H \mathbf{X} \mathbf{b}_p|^2 = \text{Tr} \left[\mathbf{C}_{m,p} \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^H \right] \quad (11)$$

où $\mathbf{C}_{m,p} = \mathbf{c}_{m,p} \mathbf{c}_{m,p}^H$ avec $\mathbf{c}_{m,p} = \bar{\mathbf{b}}_p \otimes \mathbf{a}_m$ et \otimes le produit de Kronecker entre deux vecteurs. Le problème PPR se réécrit de manière équivalente comme le problème de faisabilité suivant

trouver $\mathbf{\Xi} \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$

$$\text{tel que } \mathbf{y}_{m,p} = \text{Tr } \mathbf{C}_{m,p} \mathbf{\Xi}, \quad \mathbf{\Xi} \succeq 0, \quad \text{rank } \mathbf{\Xi} = 1 \quad (12)$$

$$m = 0, \dots, M-1, p = 0, \dots, P-1$$

En supprimant la contrainte (non-convexe) de rang 1 dans (12), on obtient la relaxation SDP du problème PPR. En pratique, la résolution de la relaxation SDP peut se faire à l'aide de bibliothèques standard (telles que `cvxopt`). La fonction objectif à minimiser peut être adaptée de manière simple pour tenir compte de mesures bruitées, en utilisant un coût quadratique pénalisé par la trace de la solution de manière à favoriser les solutions de rang faible [12].

5 Validation expérimentale

Nous présentons des premiers résultats numériques permettant de valider les performances pratiques des différentes méthodes de reconstruction décrites à la section précédente. On s'intéresse notamment à la robustesse au bruit suivant le schéma gaussien additif (7). La qualité de la reconstruction est évaluée par l'erreur quadratique moyenne (MSE), définie comme suit :

$$\text{MSE} = \arg \min_{\phi \in [0, 2\pi]} \|\hat{\mathbf{X}} e^{j\phi} - \mathbf{X}\|_2^2 \quad (13)$$

La minimisation sur l'angle ϕ permet de lever l'ambiguïté (triviale) liée à un facteur de phase global. Le rapport signal à bruit (SNR) est défini par l'expression

$$\text{SNR} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{P-1} |\mathbf{a}_m^H \mathbf{X} \mathbf{b}_p|^4 / (MP\sigma^2). \quad (14)$$

On génère un signal aléatoire gaussien bivarié de longueur $N = 32$ normalisé $\|\mathbf{X}\|_2 = 1$, et on simule $M = 2N - 1$ et $P = 4$ observations du modèle (7). Pour chaque valeur de SNR, 100 expériences sont réalisées pour moyenner les résultats.

La figure 5 présente l'évolution du MSE en fonction du SNR. On observe deux phénomènes : à bas SNR (≤ 30 dB), la méthode SDP offre de meilleures performances que les autres approches (gcd et Wirtinger Flow). On retrouve ainsi des résultats connus sur la robustesse au bruit des méthodes SDP (voir par exemple [12]). En revanche, à fort SNR, les méthodes basées sur le calcul de gcd présentent des performances de reconstruction comparables, mais bénéficiant d'un temps de calcul fortement réduit (de l'ordre d'un facteur 100 au minimum). Enfin, notons les excellentes performances de l'approche Wirtinger-Flow décrite dans [7], qui, par la combinaison d'une initialisation au coût négligeable via *rightKerSylvester* et des itérations rapides (10) atteint asymptotiquement la borne de Cramér-Rao du problème PPR. Ces différents résultats nous apparaissent particulièrement prometteurs, et permettent d'envisager de nombreux développements théoriques, méthodologiques et applicatifs autour du problème de reconstruction de phase polarimétrique PPR, mais aussi autour d'extensions au cas de reconstruction de phase de signaux multivariés.

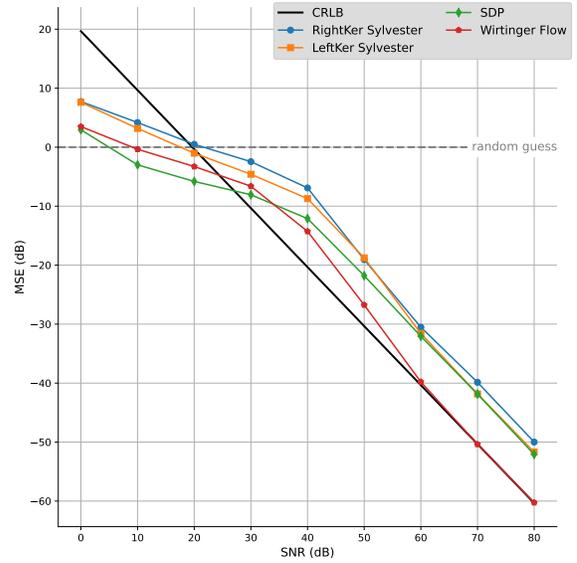


FIGURE 1 – Evolution du MSE en fonction du SNR

Références

- [1] Y. Shechtman, Y. C. Eldar, O. Cohen, H. N. Chapman, J. Miao, and M. Segev, "Phase Retrieval with Application to Optical Imaging : A contemporary overview," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 32, no. 3, pp. 87–109, May 2015.
- [2] T. Bendory, R. Beinert, and Y. C. Eldar, "Fourier Phase Retrieval : Uniqueness and Algorithms," in *Compressed Sensing and its Applications*, H. Boche, G. Caire, R. Calderbank, M. März, G. Kutyniok, and R. Muthar, Eds. Springer International Publishing, 2017, pp. 55–91.
- [3] R. Beinert and G. Plonka, "Ambiguities in one-dimensional discrete phase retrieval from fourier magnitudes," *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 21, no. 6, pp. 1169–1198, 2015.
- [4] E. J. Candès, Y. C. Eldar, T. Strohmer, and V. Voroninski, "Phase retrieval via matrix completion," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 6, no. 1, pp. 199–225, 2013.
- [5] R. Balan, P. Casazza, and D. Edidin, "On signal reconstruction without phase," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 20, no. 3, pp. 345–356, May 2006.
- [6] E. J. Candès, X. Li, and M. Soltanolkotabi, "Phase retrieval from coded diffraction patterns," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 39, no. 2, pp. 277–299, Sep. 2015.
- [7] J. Flamant, K. Usevich, M. Clausel, and D. Brie, "Polarimetric phase retrieval : uniqueness and algorithms," 2022, pré-publication. [Online]. Available : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03613352v1>
- [8] K. Jaganathan and B. Hassibi, "Reconstruction of Signals From Their Autocorrelation and Cross-Correlation Vectors, With Applications to Phase Retrieval and Blind Channel Estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 67, no. 11, pp. 2937–2946, Jun. 2019.
- [9] O. Raz, N. Dudovich, and B. Nadler, "Vectorial Phase Retrieval of 1-D Signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 61, no. 7, pp. 1632–1643, Apr. 2013.
- [10] K. Usevich and I. Markovsky, "Variable projection methods for approximate (greatest) common divisor computations," *Theoretical Computer Science*, vol. 681, pp. 176–198, Jun. 2017.
- [11] E. Candès, X. Li, and M. Soltanolkotabi, "Phase Retrieval via Wirtinger Flow : Theory and Algorithms," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, no. 4, pp. 1985–2007, Apr. 2015.
- [12] E. J. Candès, T. Strohmer, and V. Voroninski, "Phaselift : Exact and stable signal recovery from magnitude measurements via convex programming," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 66, no. 8, pp. 1241–1274, 2013.