

# « Approximate Message Passing » et solutions de grands systèmes dynamiques écologiques de Lotka-Volterra

Walid HACHEM, Jamal NAJIM

Univ Gustave Eiffel, CNRS, LIGM, F-77454 Marne-la-Vallée, France

walid.hachem, jamal.najim@unif-eiffel.fr

**Résumé** – Les systèmes dynamiques d’interaction écologique mettant en jeu  $n$  espèces vivantes sont couramment décrits par une équation différentielle, stochastique ou non, dite de Lotka-Volterra (L.-V.). Dans cette équation, l’objet important est la matrice aléatoire  $n \times n$  des interactions alimentaires entre les espèces au sein de l’écosystème étudié. L’existence et la pré compacité de la solution d’une équation de L.-V. dépend étroitement d’un certain paramètre spectral associé à cette matrice. Dans cet article, nous étudions la convergence de ce paramètre dans le régime des grandes dimensions. Nous obtenons des résultats partiels grâce à la technique d’« Approximate Message Passing » issue de la physique statistique, rendue rigoureuse par Montanari et ses collègues et largement utilisée en traitement du signal et en apprentissage.

**Abstract** – The ecological food chains where  $n$  species interact within an ecosystem are frequently described through a so-called Lotka-Volterra (L.-V.) ordinary or stochastic differential equation. The main object within this equation is the random  $n \times n$  matrix that encodes the food interactions among the  $n$  species. The existence and precompactness of the solution of the L.-V. equation depends on a certain spectral parameter related with this matrix. In this paper, we study this parameter in the large dimensional regime. We obtain partial results with the help of the so-called Approximate Message Passing technique, which came out from the field of statistical physics, was made rigorous by Montanari and his colleagues, and is nowadays widely used in signal processing and learning theory.

## 1 Présentation du problème

Nous nous intéressons dans cet article au comportement dynamique d’un système d’interaction écologique mettant en jeu  $n$  espèces vivantes. En écrivant  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ , un tel système est représenté par la fonction du temps  $N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^n$  où l’élément  $i$  de  $N(t)$  représente le nombre d’individus de l’espèce  $i$  à l’instant  $t$  ou la biomasse de cette espèce après normalisation appropriée. Un modèle standard utilisé pour décrire l’évolution de cet écosystème repose sur l’équation différentielle ordinaire (EDO) vectorielle dite de Lotka-Volterra (L.-V.). Cette équation s’écrit [5]

$$\dot{N}(t) = N(t) \odot (\mathbf{1}_n - N(t) + XN(t)) + \lambda \mathbf{1}_n \quad (1)$$

où  $\odot$  est le produit de Hadamard,  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est dite la matrice des interactions entre les espèces et  $\lambda \geq 0$  est un facteur d’immigration vers l’écosystème étudié. La structure de la matrice  $X$  rend compte de phénomènes écologiques divers tels la compétition pour les ressources, la coopération entre les espèces, la prédation, le parasitage, etc.

Selon la manière dont on passe de l’échelle microscopique des interactions individuelles à l’échelle macroscopique représentée par  $N(t)$ , ou parfois selon la nature des bruits qui peuvent entacher les observations, on peut remplacer l’équation (1) par l’équation différentielle stochastique (EDS)

$$dN(t) = N(t) \odot (\mathbf{1}_n - N(t) + XN(t)) + \lambda \mathbf{1}_n + \sigma(N(t)) \odot dB(t) \quad (2)$$

où  $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction appliquée terme à terme au

vecteur  $N(t)$  et  $B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un mouvement brownien standard de dimension  $n$ . Nous considérons que la diffusion  $\sigma(\cdot)$  est une fonction Lipschitz qui s’annule en zéro. Nous pouvons aussi prendre  $\sigma(x) = \sqrt{x}$  [2].

L’objet de cet article est d’étudier les conditions d’existence, d’unicité et de pré compacité des solutions des équations (1) et (2) dans le régime des grandes dimensions. Etant donné une matrice symétrique  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , nous posons pour ceci

$$\lambda_{\max}^+(H) \triangleq \max_{u \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{R}_+^n} u^* H u$$

où  $\mathbb{S}^{n-1}$  est la sphère-unité de  $\mathbb{R}^n$ . Il est clair que cet objet existe en tant que maximum d’une fonction continue sur un compact de  $\mathbb{R}^n$  et que

$$\lambda_{\max}^+(H) \leq \lambda_{\max}(H) \triangleq \max_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} u^* H u. \quad (3)$$

La proposition suivante fournit une condition d’existence et d’unicité des solutions des équations (1) et (2) [7] :

**Proposition 1.** *Supposons que*

$$\lambda_{\max}^+(X + X^\top) < 2. \quad (4)$$

Alors :

- Pour toute valeur initiale dans  $\mathbb{R}_+^n$ , l’EDO (1) possède une solution unique sur  $\mathbb{R}_+$  et cette solution est incluse dans un compact de  $\mathbb{R}_+^n$ ,
- Pour toute valeur initiale dans  $\mathbb{R}_+^n$ , l’EDS (2) possède une unique solution forte  $N(t)$  sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus, cette solution satisfait  $\sup_t \mathbb{E} \|N(t)\| < \infty$ .

Si les conclusions de cette proposition sont vérifiées, nous dirons que notre système écologique est « bien défini ».

Cette proposition nous ramène à l'étude de la condition (4).

Dans ce contexte, il est en général difficile de disposer d'une estimation précise de la matrice des interactions  $X$ , sans parler de l'évaluation du critère (4). En écologie théorique, on pallie souvent ces difficultés en considérant que le nombre d'espèces  $n$  qui coexistent au sein d'un écosystème est en pratique élevé (mathématiquement,  $n \rightarrow \infty$ ) et en recourant à un modèle *aléatoire* pour la matrice  $X$ . L'article de May [8] qui a promu cette idée a ainsi constitué un jalon dans l'étude des grands écosystèmes.

Nous suivons ici cette approche. Afin de construire notre modèle statistique pour la matrice  $X$ , nous partons de l'observation naturelle selon laquelle une espèce n'interagit pas avec toutes les autres, et de ce fait, bon nombre d'éléments de la matrice  $X$  sont nuls. De plus, les amplitudes des interactions d'une espèce avec les autres ne sont pas en général identiques. Afin de prendre en compte ces phénomènes, nous considérons le modèle d'une matrice  $X$  à éléments indépendants mais de variances non nécessairement identiques [1]. Cette matrice sera de plus indépendante du brownien dans le cas de l'EDS. La proposition 1 nous dit que le système sera bien défini sur un ensemble de probabilité 1 si  $\limsup_n \lambda_{\max}^+(W) < \sqrt{2}$  p.s. où  $W \triangleq (X + X^\top)/\sqrt{2}$  (le facteur  $\sqrt{2}$  est lié à une normalisation standard pour ce type de matrices). Remarquons que dans le cas de l'EDS, l'espérance dans l'énoncé de la proposition 1 devient une espérance conditionnelle par rapport à  $W$ .

La littérature sur les grandes matrices aléatoires est riche de résultats sur la valeur propre extrême  $\lambda_{\max}$  d'une matrice aléatoire symétrique. Les résultats sur  $\lambda_{\max}^+$  sont comparativement beaucoup moins fournis. Une exception notable consiste en l'article [9] de Montanari et Richard qui calculent  $\lambda_{\max}^+(G)$  dans le cas où  $G$  est une grande matrice dans l'ensemble gaussien orthogonal (GOE), *i.e.*,  $G \stackrel{\mathcal{L}}{=} W$  quand  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est à éléments indépendants de loi  $\mathcal{N}(0, 1/n)$ . L'approche de ces auteurs est basée sur la technique de l'« Approximate Message Passing » (AMP). Cette dernière trouve ses sources historiques dans les approches de « belief propagation » utilisées en physique statistique et en théorie des communications, ou alors dans la méthode des répliques.

Compte tenu de ces éléments, notre travail se résume comme suit : adapter les techniques d'AMP pour évaluer le comportement de  $\lambda_{\max}^+(W)$  dans le cas où  $X$  est une matrice à éléments gaussiens indépendants sujets à un profil de variances.

## 2 Hypothèses et résultats

Selon notre modèle général pour la matrice des interactions  $X = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , les variables aléatoires  $x_{ij}$  sont des gaussiennes centrées indépendantes telles que  $\mathbb{E}x_{ij}^2 = \sigma_{ij}^2/n$  où  $V = [\sigma_{ij}^2] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$  est la matrice renfermant le profil de variance. Dans le cas où notre système dynamique est décrit par l'EDS (2), nous supposons que  $X$  et le brownien  $B$  sont indé-

pendants comme nous l'avons dit plus haut.

Afin de pouvoir utiliser l'AMP, il est nécessaire dans l'état actuel des connaissances sur cette technique de doter ce champ de variance d'une structure par blocs. Soit  $M_l > 0$  et  $M_c > 0$  deux entiers indépendants de  $n$  et soit  $\phi_l : [n] \rightarrow [M_l]$  et  $\phi_c : [n] \rightarrow [M_c]$  deux fonctions entières où  $[n] = \{1, \dots, n\}$ . Soit  $[\sigma_{k,\ell}^2]_{k,\ell=1}^{M_l, M_c}$  une matrice à éléments non négatifs dans  $\mathbb{R}^{M_l \times M_c}$ . Alors, nous posons  $\sigma_{ij}^2 = \sigma_{\phi_l(i), \phi_c(j)}^2$ . Remarquons que la dénomination « par blocs » est quelque peu inexacte car ces derniers n'apparaissent qu'après application de permutations sur les lignes et les colonnes de  $X$ . Ce modèle est proche du modèle développé dans [6] dans un autre contexte.

L'exemple le plus simple d'un tel modèle de profil de variance est le suivant : prenons  $M_l = M_c = L$  pour un entier  $L > 0$  et considérons que  $n$  est de la forme  $n = KL$  où  $K \rightarrow \infty$ . Pour  $i \in [n]$ , nous posons  $\phi_l(i) = \phi_c(i) = \lfloor (i-1)/K \rfloor + 1$ . Selon ce modèle, la matrice du profil de variance  $V$  consiste en  $L^2$  blocs carrés de taille  $K \times K$ , au sein duquel le bloc  $(m_l, m_c)$  coïncide avec la matrice  $\sigma_{m_l, m_c}^2 \mathbf{1}_K \mathbf{1}_K^\top$ . Nous appellerons ce modèle le modèle « régulier de type  $(L, K)$  ».

Avant d'aller plus loin, remarquons que les résultats de cet article peuvent s'adapter sans grande difficulté au cas courant où le champ de variance est de la forme  $\sigma_{ij}^2 = \kappa(i/n, j/n)$  et où  $\kappa : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction continue. Dans le régime des grandes dimensions, il est en effet possible d'approximer ce modèle par le modèle par blocs avec une précision arbitraire sur la norme spectrale de la matrice des interactions.

Comme la matrice qui nous intéresse est  $W = [w_{ij}] = (X + X^\top)/\sqrt{2}$ , nous devons maintenant expliciter la structure de son profil de variance. Remarquons d'abord que les variances des éléments de  $W$  satisfont  $\mathbb{E}w_{ij}^2 = s_{ij}/n$  si  $i \neq j$  et  $\mathbb{E}w_{ii}^2 = 2s_{ii}/n$  où

$$s_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^2 + \sigma_{ji}^2}{2} = \frac{\sigma_{\phi_l(i), \phi_c(j)}^2 + \sigma_{\phi_l(j), \phi_c(i)}^2}{2}.$$

Soit  $S = [s_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$  la matrice symétrique qui représente le profil de variance de la matrice symétrique  $W$ . Nous cherchons à identifier les blocs de  $S$ . Soit l'ensemble

$$\mathcal{V} = \{(\phi_l(i), \phi_c(i)) : i \in [n]\},$$

et soit  $M = |\mathcal{V}|$ . Remarquons que  $M \leq M_l M_c$ . Soit  $\psi$  une bijection quelconque de  $\mathcal{V}$  dans  $[M]$ . Par exemple,  $\psi$  représente l'ordre lexicographique sur  $\mathcal{V}$ . Notons  $\psi^{-1} = (\psi_l^{-1}, \psi_c^{-1})$  la réciproque  $\psi^{-1}$  de cette fonction (ainsi, pour  $\psi(a, b) = m$ , nous aurons  $a = \psi_l^{-1}(m)$  et  $b = \psi_c^{-1}(m)$ ). Introduisons la fonction  $\varphi : [n] \rightarrow [M]$ ,  $i \mapsto \varphi(i) = \psi((\phi_l(i), \phi_c(i)))$ . A l'aide de ces notations, introduisons la matrice à éléments non négatifs  $V = [v_{k,\ell}]_{k,\ell=1}^M \in \mathbb{R}_+^{M \times M}$  où

$$v_{k,\ell} = \sigma_{\psi_l^{-1}(k), \psi_c^{-1}(\ell)}^2$$

et soit  $S = [s_{k,\ell}] \in \mathbb{R}_+^{M \times M}$  la matrice symétrique définie par l'équation

$$S = \frac{V + V^\top}{2} = \left[ \frac{v_{k,\ell} + v_{\ell,k}}{2} \right]_{k,\ell=1}^M.$$

Le profil de variance de  $W$  est alors décrit par l'équation

$$s_{ij} = s_{\varphi(i), \varphi(j)}.$$

Nous posons maintenant nos hypothèses. La première porte sur les cardinaux des ensembles  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_M \subset [M]$  définis par  $\mathcal{C}_m = \varphi^{-1}(\{m\})$  :

**Hypothèse 1.** *Il existe un  $M$ -uplet  $(\gamma_1, \dots, \gamma_M)$  dans le simplexe unité de  $\mathbb{R}^M$  tel que  $\gamma_m > 0$  et*

$$\frac{|\mathcal{C}_m|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma_m$$

pour tout  $m \in [M]$ .

Ainsi, l'ensemble des indices  $i$  pour lesquels  $(\phi_l(i), \phi_c(i))$  prend une valeur arbitraire admissible possède un cardinal d'ordre  $\mathcal{O}(n)$ . Une conséquence de cette hypothèse est que pour tout  $\ell \in [M_l]$  (resp.  $\ell \in [M_c]$ ), nous avons  $|\phi_l^{-1}(\{\ell\})| = \mathcal{O}(n)$  (respectivement  $|\phi_c^{-1}(\{\ell\})| = \mathcal{O}(n)$ ), mais l'hypothèse 1 est un peu plus forte que ces assertions.

**Exemple 1** (Hypothèse 1 dans le cas régulier). *Pour un profil régulier de type  $(L, K)$ , il est clair que  $M = L$ ,  $\mathcal{V} = \{(1, 1), \dots, (M, M)\}$  et nous pouvons prendre  $\psi(m, m) = m$  et  $\varphi(i) = \phi_l(i) = \phi_c(i)$ . De plus,*

$$\mathbf{V} = [\sigma_{m,\ell}^2]_{m,\ell=1}^M$$

L'hypothèse 1 est satisfaite trivialement avec  $\gamma_1 = \dots = \gamma_M = 1/M$ .

Notre deuxième hypothèse sur le profil de variance est la suivante :

**Hypothèse 2.** *Le graphe non dirigé sous-jacent à la matrice  $S$  n'est pas biparti.*

Rappelons qu'un graphe non dirigé de matrice d'adjacence la matrice symétrique  $H$  est dit biparti si à une conjugaison par une permutation près,  $H$  est de la forme

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \times \\ \times & 0 \end{bmatrix},$$

où les blocs « 0 » sont des blocs carrés.

Selon l'hypothèse 2, on ne peut pas répartir les espèces en deux groupes de taille  $\mathcal{O}(n)$  chacun et tels que les espèces au sein de chaque groupe n'interagissent qu'avec les espèces de l'autre groupe.

Soit  $\rho \triangleq \|\Gamma^{1/2} \mathbf{S} \Gamma^{1/2}\|$  où  $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_M)$ . Introduisons les deux réels positifs

$$\underline{\lambda} \triangleq \sqrt{2\rho} \quad \text{et} \quad \bar{\lambda} \triangleq \sqrt{2} \max_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}_+^M, \|\mathbf{d}\|_1=1} \sum_{m \in [M]} \sqrt{d_m \gamma_m [\mathbf{S} \mathbf{d}]_m}$$

où on écrit  $\mathbf{d} = [d_1, \dots, d_M]^\top$ . Si nous choisissons  $\mathbf{d} = \Gamma^{1/2} \mathbf{b}$  où  $\mathbf{b}$  est le vecteur propre de Perron-Frobenius de la matrice  $\Gamma^{1/2} \mathbf{S} \Gamma^{1/2}$  ajusté pour que  $\|\mathbf{d}\|_1 = 1$ , alors nous obtenons  $\sum_m \sqrt{d_m \gamma_m [\mathbf{S} \mathbf{d}]_m} = \sum_m \sqrt{d_m \gamma_m^{1/2} [\Gamma^{1/2} \mathbf{S} \Gamma^{1/2} \mathbf{b}]_m} = \sqrt{\rho} \sum_m d_m = \sqrt{\rho}$ . Par conséquent,  $\underline{\lambda} \leq \bar{\lambda}$ .

Le résultat de cet article est le suivant :

**Théorème 1.** *Sous les hypothèses 1 et 2, avec la probabilité 1,*

$$\liminf_n \lambda_{\max}^+(W) \geq \underline{\lambda} \quad \text{et} \quad \limsup_n \lambda_{\max}^+(W) \leq \bar{\lambda}.$$

Ainsi, le système écologique est bien défini pour tous  $n$  grands si  $\bar{\lambda} < \sqrt{2}$ .

Rappelons que le cas où  $W$  est une matrice GOE correspond à  $M = 1$  et  $\mathbf{S} = 1$ . Dans ce cas, il est facile de constater que  $\underline{\lambda} = \bar{\lambda} = \sqrt{2}$ , et nous obtenons le corollaire suivant qui a déjà été établi dans [9].

**Corollaire 1.** *Si  $W$  est une matrice tirée de l'ensemble GOE, alors  $\lambda_{\max}^+(W) \xrightarrow{p.s.} \sqrt{2}$ .*

Il peut être utile ici de revenir à l'inégalité (3) et de rappeler le résultat bien connu en théorie des matrices aléatoires que dans le cas GOE,  $\lambda_{\max}(W) \xrightarrow{p.s.} 2$ , le bord du support de la loi dite du demi cercle.

### 3 Eléments de preuve du théorème 1

La borne supérieure sur  $\lambda_{\max}^+(W)$  peut être établie à l'aide de l'inégalité de Sudakov-Fenrique sur les processus gaussiens. Il suffit pour cela d'adapter les calculs menés dans la preuve du [10, Th. 4.1] au cas du calcul de  $\lambda_{\max}^+$  au lieu de celui de la norme spectrale.

La borne inférieure réclame plus de travail. L'idée ici est de construire une suite de vecteurs  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{R}_+^n$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_k^\top W a_k = \underline{\lambda} \quad (5)$$

où limps est la limite presque sûre. Il s'avère qu'une telle suite peut être construite grâce à la technique AMP que nous présentons maintenant d'une manière très succincte.

Supposons pour commencer que la matrice  $W$  soit remplacée par une matrice  $G$  prise dans l'ensemble GOE. Dans ce cas, une récursion AMP engendre une suite de vecteurs  $(y_k)$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui s'écrit [3]

$$y_{k+1} = G h(y_k) - \overline{h'(y_k)} h(y_{k-1}) \quad (6)$$

où  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est Lipschitz, et en écrivant  $y = [y(1), \dots, y(n)]^\top$ , nous posons

$$h(y) = \begin{bmatrix} h(y(1)) \\ \vdots \\ h(y(n)) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overline{h'(y)} = \frac{1}{n} \sum_{i \in [n]} h'(y(i))$$

(remarquons que la dérivée  $h'$  est définie presque partout). Pour un entier  $k > 0$  fixé, soit

$$\mu_n^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i \in [n]} \delta_{y_1(i), \dots, y_k(i)}$$

la mesure de probabilité aléatoire sur  $\mathbb{R}^k$  définie comme étant la distribution empirique conjointe des éléments des vecteurs  $y_1, \dots, y_k$ . Selon le résultat fondamental de [3], la suite de mesures  $(\mu_n^{(k)})_n$  converge étroitement pour  $n \rightarrow \infty$  vers une mesure de probabilité gaussienne centrée sur  $\mathbb{R}^k$ , la matrice de

covariance de laquelle pouvant être construite récursivement en le paramètre  $k$ . Les équations récursives obtenues à l'aide de cette construction portent le nom d'équations de « Density Evolution » (DE).

Deux éléments importants rendent possible l'établissement de cette convergence : le caractère GOE de la matrice  $G$  qui possède des propriétés d'invariance par rotation bien connues et la présence du terme de « correction »  $-\overline{h'(y_k)h(y_{k-1})}$ , dit terme d'« Onsager », issu du domaine de la physique statistique. Ces résultats de convergence sont rendus rigoureux dans [3] grâce entre autres à une idée de Bolthausen.

**Remarque 1.** *Pour être exhaustif, il peut être utile de remarquer ici que la fonction  $h$  dans (6) peut être rendue dépendante de  $k$  et peut recevoir un paramètre statistique en général non observable. Ce faisant, l'approche AMP permet de résoudre nombre de problèmes d'estimation statistique qui débordent largement la question du calcul de  $\lambda_{\max}^+$ . Ces questions sortent du cadre de cet article.*

Posons maintenant  $h(x) = x \vee 0$ , et soit  $a_k = h(y_k) / \|h(y_k)\| \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{R}^n$ . A partir de la récursion (6), nous obtenons

$$\langle a_k, Ga_k \rangle = \frac{\langle h(y_k), y_{k+1} \rangle}{\|h(y_k)\|^2} + \overline{h'(y_k)} \frac{\langle h(y_k), h(y_{k-1}) \rangle}{\|h(y_k)\|^2}. \quad (7)$$

Grâce à la convergence des mesures  $\mu_n^{(k)}$  et à l'analyse des équations de DE, la convergence en  $n$  puis en  $k$  des deux termes du membre de droite de cette équation peut être contrôlée, permettant *in fine* de montrer que

$$\lim_k \lim_n \langle a_k, Ga_k \rangle = \sqrt{2},$$

qui est le cas particulier de (5) correspondant au modèle GOE.

Comme nous venons de le dire, la nature GOE de la matrice  $W$  dans (6) joue un rôle fondamental dans l'établissement de la convergence et l'obtention des équations DE. Il est bien connu que ces propriétés d'invariance sont perdues quand  $W$  est une matrice à profil de variance. Il se trouve que cette difficulté peut être résolue en maintenant la matrice  $G \sim \text{GOE}$  dans (6) mais en remplaçant la fonction vectorielle  $h(y)$  dans cette équation par une fonction à valeurs dans les matrices  $\mathbb{R}^{n \times M}$ , choisie de façon « encoder » le champ de variances par blocs. Cette approche a été développée par Javanmard et Montanari dans [6].

En utilisant cette approche, il s'avère possible d'obtenir une équation analogue à (7) et de traiter les analogues des termes de son membre de droite à l'aide des nouvelles équations de DE. Ces calculs non réalisés dans [6] conduisent à la convergence (5) et partant, au théorème 1 qui fait l'objet de ce travail.

## 4 Perspectives : Lotka-Volterra et AMP

Le théorème 1 ne fournit qu'un résultat partiel sur le comportement asymptotique de  $\lambda_{\max}^+(W)$ , puisqu'en général,  $\underline{\lambda} < \overline{\lambda}$ . Notre premier objectif est de tenter de prouver que le comportement asymptotique de  $\lambda_{\max}^+(W)$  est celui prédit par l'AMP,

autrement dit, la borne supérieure fournie par l'inégalité de Fenrique-Sudakov est lâche, et

$$\lambda_{\max}^+(W) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \sqrt{2\rho}.$$

Par ailleurs, dans la plupart des réseaux écologiques concrets, une espèce n'interagit en général qu'avec un nombre limité d'espèces. De ce fait, la matrice des interactions est une matrice creuse [4]. Dans un travail en cours, nous adaptons la technique d'AMP à cette situation.

Une autre voie de recherche consiste à étudier  $\lambda_{\max}^+(W)$  dans le cas où la matrice  $X$  possède un terme de moyenne diagonal ou de rang faible. De tels modèles ont souvent été considérés en écologie théorique [1].

Enfin, une question importante dans l'analyse des EDO de L.-V. (1) est d'évaluer la proportion d'espèces survivantes aux points d'équilibre de cette EDO, ainsi que la fonction de répartition des survivants en l'absence de facteur d'immigration. Il nous semble possible de résoudre ces problèmes par des techniques d'AMP.

## Références

- [1] S. Allesina and S. Tang. The stability-complexity relationship at age 40 : a random matrix perspective. *Population Ecology*, 57(1) :63–75, 2015.
- [2] V. Bansaye and S. Méléard. *Stochastic models for structured populations*. Springer, 2015.
- [3] M. Bayati and A. Montanari. The dynamics of message passing on dense graphs, with applications to compressed sensing. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 57(2) :764–785, 2011.
- [4] D.M. Busiello, S. Suweis, J. Hidalgo, and A. Maritan. Explorability and the origin of network sparsity in living systems. *Scientific reports*, 7(1) :1–8, 2017.
- [5] J. Hofbauer, K. Sigmund, et al. *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge University Press, 1998.
- [6] A. Javanmard and A. Montanari. State evolution for general approximate message passing algorithms, with applications to spatial coupling. *Inf. Inference*, 2(2) :115–144, 2013.
- [7] X. Li, D. Jiang, and X. Mao. Population dynamical behavior of Lotka-Volterra system under regime switching. *J. Comput. Appl. Math.*, 232(2) :427–448, 2009.
- [8] R.M. May. Will a large complex system be stable? *Nature*, 238(5364) :413–414, 1972.
- [9] A. Montanari and E. Richard. Non-negative principal component analysis : message passing algorithms and sharp asymptotics. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 62(3) :1458–1484, 2016.
- [10] R. van Handel. On the spectral norm of Gaussian random matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 369(11) :8161–8178, 2017.