

Ligne de partage des eaux stochastique par ordres de permutation

Olivier Lézoray

Normandie Univ, UNICAEN, ENSICAEN, CNRS, GREYC, 14000 Caen, France

olivier.lezoray@unicaen.fr

Résumé – La ligne de partage des eaux stochastique est une approche morphologique de la segmentation qui répète l’application d’une LPE à partir de séries de marqueurs aléatoires uniformes pour construire une fonction de densité de probabilité. Nous proposons une approche alternative qui repose sur plusieurs ordres de permutation obtenus par des chemins Hamiltoniens sur graphe. Contrairement à la LPE stochastique classique, notre approche permet de prendre en compte n’importe quelles caractéristiques associées aux pixels.

Abstract – The stochastic watershed is a morphological approach to segmentation that repeats the application of a seeded watershed from series of uniform random markers to construct a probability density function. We propose an alternative approach that relies on several permutation orderings obtained by Hamiltonian path on graphs. In contrast to the classical stochastic watershed, our approach enables to take into account any features associated to pixels.

1 Introduction

En segmentation d’images, la ligne de partage des eaux (LPE) est une méthode de morphologie mathématique (MM) très populaire. Partant des minima du gradient, la LPE effectue une croissance de régions sur une image de gradient. La LPE est sensible au bruit et produit une forte sur-segmentation [1]. Angulo et Jeulin ont proposé une solution à ce problème par la LPE stochastique [2]. Ils considèrent, au lieu du gradient, une fonction qui réduit les minima à l’intérieur des objets et rehausse les contours. La LPE est alors répétée avec comme germes des marqueurs aléatoires uniformes. Les contours obtenus par les segmentations sont ensuite combinés pour construire une fonction de densité de probabilité (pdf). Elle a la propriété intéressante de converger vers la probabilité que les germes tombent des deux côtés de chaque contour. Dans cet article nous proposons une approche alternative. Dans [2], chaque simulation est effectuée par des germes aléatoires sur une image de gradient [3] qui ne tient compte que de différences de couleur qui ne permet pas de considérer des caractéristiques de pixel de plus haut niveau, tel que des patches. Nous présentons une approche pour construire une pdf qui peut considérer n’importe quelle caractéristique décrivant un pixel. Notre approche repose sur plusieurs ordres de permutation obtenus par des chemins Hamiltoniens sur graphe [4]. Dans la section 2, nous présentons comment construire de tels chemins Hamiltoniens stochastiques et construire une pdf. Dans la section 3, nous présentons quelques résultats et comparaisons. La dernière section conclut.

2 Ligne de partage des eaux stochastique par ordres de permutation

2.1 Notations

Nous considérons le domaine Ω de l’image comme un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ dont les noeuds $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_m\}$ sont les pixels et les arêtes $e_{ij} = (v_i, v_j)$ les connectent. Les images sont alors

représentées comme des signaux sur graphes [5] qui associent un vecteur aux noeuds : $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$. À chaque noeud est associé un vecteur $\mathbf{v}_i = f(v_i)$, et on définit $\mathcal{T} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ avec la notation $\mathcal{T}[i] = \mathbf{v}_i$. Le graphe \mathcal{G} utilisé pour représenter une image peut être : i) Un graphe de B -adjacence (noté \mathcal{G}_B) où chaque noeud v_i est connecté à ceux contenus dans un carré de taille $(2B + 1) \times (2B + 1)$ autour de v_i . Un graphe grille en 8-adjacence sera noté \mathcal{G}_1 . ii) Un graphe des K -plus proches voisins (noté \mathcal{G}_*^K) où chaque noeud v_i est connecté à ses K plus proches voisins (en terme de distance spectrale) parmi l’ensemble de tous les noeuds. Le premier type de graphe considère uniquement la proximité spatiale pour connecter les noeuds alors que le second considère uniquement la proximité spectrale.

2.2 Treillis complets

La construction classique des opérateurs algébriques morphologiques repose sur des treillis complets [6]. Un treillis complet (\mathcal{T}, \leq) est un ensemble non vide équipé d’une relation d’ordre total, tel que chaque sous-ensemble non vide \mathcal{P} de \mathcal{T} a une borne inférieure $\wedge \mathcal{P}$ et une borne supérieure $\vee \mathcal{P}$. Si la MM est bien définie pour les fonctions scalaires, il n’existe pas d’extension générale admise sur les vecteurs puisqu’il n’existe pas d’ordre naturel des vecteurs. Si de nombreuses approches ont été proposées pour les images couleur [7], très peu traitent des patches. Dans cet article, nous définissons la relation d’ordre entre les vecteurs d’un ensemble \mathcal{T} en utilisant les h -ordres [8]. Cela correspond à définir une transformation surjective h de \mathcal{T} vers \mathcal{L} où \mathcal{L} est un treillis complet équipé de l’ordre total conditionnel [8]. Nous désignons par \leq_h l’ordre h donné par $h : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{L}$ et $\mathbf{v} \rightarrow h(\mathbf{v}), \forall (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}, \mathbf{v}_i \leq_h \mathbf{v}_j \Leftrightarrow h(\mathbf{v}_i) \leq h(\mathbf{v}_j)$. Il n’est alors plus nécessaire que \mathcal{T} soit un treillis complet, puisque l’ordre de \mathcal{T} peut être induit sur \mathcal{L} au moyen de h . Lorsque h est bijective, cela correspond à définir une courbe de remplissage d’espace et nous utiliserons cette propriété dans la suite.

2.3 Chemin Hamiltonien stochastique

Pour construire un treillis complet sur \mathcal{T} , nous construisons une courbe de remplissage d'espace sur un graphe \mathcal{G} associé à l'image. Cela correspond à la construction d'un chemin hamiltonien sur l'image : un chemin qui passe par tous les sommets du graphe et qui traverse chaque sommet une seule fois. Cela revient à définir une permutation triée $\mathcal{P} = \mathbf{PT}$ des vecteurs de \mathcal{T} avec \mathbf{P} une matrice de permutation de taille $m \times m$. Soit σ une permutation de l'ensemble d'index $\mathcal{J} = \{1, \dots, m\}$. Si $\sigma(i) = j$, alors $\mathbf{P}_{ij} = 1$ et 0 sinon. La permutation induite est $\mathcal{P} = \mathbf{PT} = \{\mathbf{v}_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma^{-1}(m)}\}$ où $(\sigma^{-1} \circ \sigma)$ est l'identité. Toute permutation n'est pas intéressante, et nous recherchons une permutation lisse. Le caractère lisse d'un ensemble ordonné est exprimé par la variation totale de ses éléments

$$\|\mathcal{T}\|_{TV} = \sum_{i=1}^{m-1} \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i+1}\|.$$

La permutation optimale peut alors être obtenue en minimisant $\mathbf{P}^* = \arg \min_{\mathbf{P}} \|\mathbf{PT}\|_{TV}$. Ce problème d'optimisation fournit une permutation telle que le chemin Hamiltonien correspondant est le plus court et équivaut à la résolution du problème du voyageur de commerce. Ce problème peut être résolu à l'aide d'une version randomisée d'une heuristique de plus proches voisins présentée dans [9]. Cet algorithme part d'un sommet choisi aléatoirement, trouve les deux sommets voisins inexplorés les plus proches et choisit l'un d'eux au hasard. Ces deux choix aléatoires rendent stochastique la permutation obtenue. Après la construction de la permutation, nous définissons le h -ordre à partir de la permutation par $h(\mathbf{v}_i) = \sigma(i)$. Partant d'un signal sur graphe $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}$, une nouvelle représentation est obtenue sous la forme d'une paire $(\mathcal{I}, \mathcal{P})$ avec $\mathcal{I}(v_i) = \sigma(i)$. \mathcal{P} est l'ensemble des \mathbf{v}_i triés (une palette) et \mathcal{I} une image d'index. La Figure 1 présente la construction d'un chemin Hamiltonien sur un graphe grille en 8-adjacence \mathcal{G}_1 et la représentation associée. Le signal original sur graphe f peut être directement reconstruit puisque $f(v_i) = \mathcal{P}[\mathcal{I}(v_i)] = \mathcal{T}[i] = \mathbf{v}_i$. Il peut être

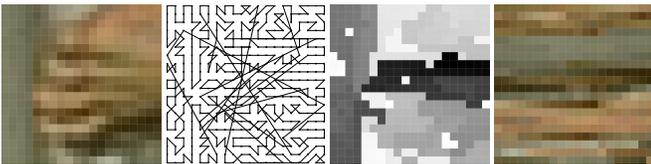


FIGURE 1 – De gauche à droite : image originale, un chemin Hamiltonien construit sur le graphe \mathcal{G}_1 , les index et palette associées.

intéressant de construire des graphes qui exploitent proximités spatiale et spectrale pour inférer l'ensemble des arêtes. Pour les graphes \mathcal{G}_*^K , c'est même essentiel puisque leur construction ne permet pas de garantir que le graphe est connecté et l'exploration peut se retrouver bloquée. L'algorithme introduit dans [9] identifie ces cas lorsque aucun sommet n'est disponible pour continuer le chemin. La recherche du plus proche voisin est alors effectuée sur tous les sommets non explorés. Ces cas peuvent être facilement vus comme les arêtes "sautantes"

dans le chemin construit illustré sur la figure 1(b). Dans la suite, nous considérerons les graphes $\mathcal{G}_{20} \cup \mathcal{G}_*^{21}$ qui combinent proximité spatiale et spectrale. La construction du graphe \mathcal{G}_*^{21} peut par exemple considérer des distances entre des patches $\mathbf{p}_i^w = (f(x_i + t), \forall t \in [-w/2, w/2]^2)^T$ de taille $w \times w$ au lieu des vecteurs couleur \mathbf{v}_i .

2.4 Construction de la pdf

Comme l'algorithme de [9] part d'un noeud tiré aléatoirement, un ordre de permutation stochastique différent est obtenu pour chaque exécution de l'algorithme. Nous pouvons en tirer parti pour proposer une formulation alternative à la LPE stochastique. Cette dernière génère M segmentations à partir de N germes aléatoires pour construire une pdf utilisant un estimateur de Parzen pour les combiner. Cette pdf est ensuite combinée avec le gradient initial produire un gradient probabiliste utilisable pour la segmentation. Dans notre cas, l'aspect stochastique viendra de la génération de plusieurs ordres de permutation à partir de différents sommets de départ. Nous construisons M ordres de permutation stochastiques qui fournissent M représentations $(\mathcal{I}_i, \mathcal{P}_i)$ avec $i \in [1, M]$. La figure 2 présente plusieurs index et permutations différents obtenus. Comme on peut le voir, les index et palettes construits peuvent être très différent en raison de la nature stochastique des chemins Hamiltoniens construits. Par conséquent, les minima extraits des images d'index \mathcal{I}_i ne seront pas situés à la même position dans toutes les images d'index et nous pouvons obtenir différentes segmentations à partir de ces minima. Dans notre cas les germes ne sont pas générés aléatoirement mais sont les minima des images d'index générés à partir d'ordres de permutation stochastiques. La figure 2 présente les minima obtenus et les LPE pour chacun des index obtenus avec le gradient de Di Zenzo [3]. Pour une image f , on désigne par $LPE_i(f) = LPE(\mathcal{I}_i, \nabla f)$ la LPE obtenue à partir des minima $m(\mathcal{I}_i)$ du i -ième ordre stochastique \mathcal{I}_i sur le gradient ∇f . Ensuite, comme dans [2], la pdf est calculée avec la méthode de Parzen :

$$\text{pdf}(f) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^M G(LPE_i(f)),$$

avec G un noyau Gaussien de variance σ^2 ($\sigma = 2$ dans notre cas). Cette pdf est finalement combinée avec le gradient de Di Zenzo initial pour produire un gradient probabiliste : $\overline{\nabla} f = \frac{\text{pdf}(f) + \nabla f}{2}$. Cela permet de renforcer les contours des gradients à forte probabilité. La première ligne de la figure 2 montre le gradient probabiliste obtenu. Celui-ci a été obtenu avec 11 ordres de permutations stochastiques différents combinés, même si seulement 3 sont montrés dans la figure. Comme on peut le voir, le gradient probabiliste contient beaucoup plus d'informations que le gradient classique de Di Zenzo. Ici la distance utilisée pour générer les différents ordres stochastiques est basée uniquement sur les vecteurs de couleur des sommets $\mathbf{v}_i = f(v_i)$. Nous pouvons utiliser à la place d'autres caractéristiques telles que des patches \mathbf{p}_i^w de taille $w \times w$ ou des tenseurs de structure \mathbf{t}_i de taille 2×2 . Cela permet directement d'avoir une LPE stochastique basé sur les caractéristiques, ce qui n'est pas possible avec la formulation originale de [2].

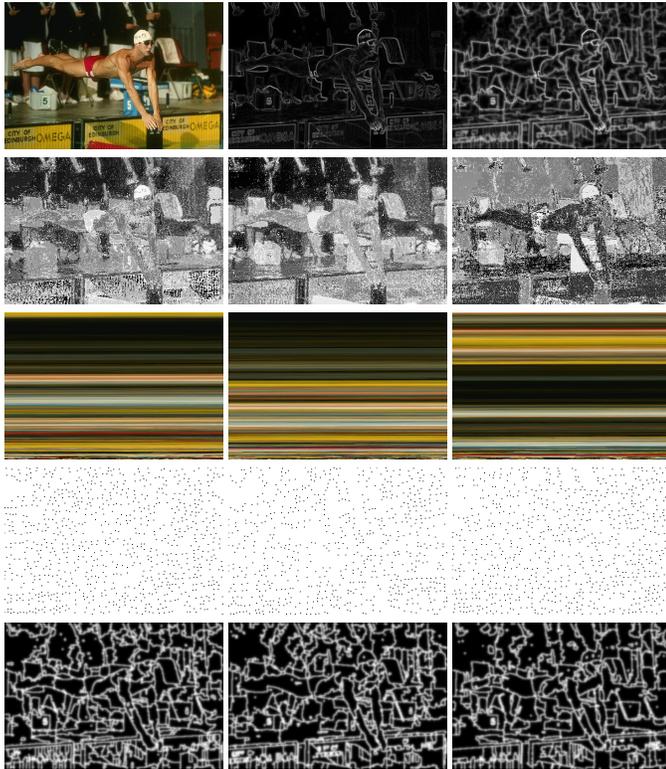


FIGURE 2 – Première ligne : image initiale f , gradient de Di Zenzo ∇f , gradient probabiliste ∇f . Deuxième ligne : index stochastiques \mathcal{I}_i . Troisième ligne : palettes stochastiques \mathcal{P}_i . Quatrième ligne : minima $m(\mathcal{I}_i)$ des index \mathcal{I}_i . Cinquième ligne : $LPE_i(f)$ à partir des minima $m(\mathcal{I}_i)$ sur le gradient ∇f .

3 Résultats

Dans cette section, nous étudions l'intérêt de notre proposition par rapport à la LPE stochastique originale [2]. Nous étudions également l'intérêt d'utiliser des patchs ou des tenseurs de structure au lieu de couleurs dans la construction des ordres de permutation. Nous réalisons nos expérimentations sur des images de la Tapisserie de Bayeux¹. Sur de telles images, les experts historiens ont besoin de délimiter interactivement certains personnages. Par conséquent, une segmentation précise est nécessaire mais en utilisant un étiquetage simple des germes d'objet/arrière-plan par point-clic pour faciliter l'utilisation par des utilisateurs finaux. Les personnages sont visuellement faciles à identifier mais le nombre réduit de couleurs, la finesse de la broderie ainsi que les différences de texture du tissu de lin peuvent rendre la segmentation difficile. La figure 2 présente quelques résultats sur quatre parties distinctes de la tapisserie. Pour obtenir la segmentation, une LPE est effectuée sur le gradient probabiliste avec les germes de l'utilisateur pour notre approche et [2]. Pour avoir une comparaison équitable, pour le calcul de $\text{pdf}(f)$ nous considérons le même nombre de réalisations aléatoires (11) et générons 200 germes aléatoires. Contrairement à [2], nous n'ajoutons aucun pré-traitement de

l'image. Pour chaque image à segmenter, la figure 3 présente les résultats obtenus. Comme on peut le constater, le gradient probabiliste obtenu à partir de [2] (nommé CSW) comporte peu de régions dans des zones homogènes mais certains contours visuellement importants n'ont pas une probabilité élevée. Ce n'est pas le cas du gradient probabiliste obtenu à partir de notre approche (nommée SPOW). Dans les résultats de segmentation, les carrés bleus identifient les fortes erreurs de segmentation. Les résultats obtenus avec les vecteurs de couleurs pour SPOW sont toujours meilleurs que pour CSW. On peut voir que pour les erreurs observées, cela est dû au fait de ne pas avoir des contours de fortes probabilités. L'utilisation de patchs 7×7 peut encore améliorer la segmentation. Cependant, l'utilisation de très grands patchs de taille 15×15 fournit un résultat proche du CSW prouvant que si les patchs peuvent être intéressants, la taille des motifs d'intérêt est très importante. Enfin avec les tenseurs de structure, le gradient probabiliste est très fin, mais cela tend à sur-détecter les structures dans les zones texturées. En conclusion, pour ce type d'images, l'utilisation de notre proposition SPOW avec des patchs 7×7 donne les meilleurs résultats et cela montre l'intérêt de notre proposition.

4 Conclusion

Nous avons proposé une formulation alternative à la LPE stochastique. Des chemins Hamiltoniens stochastiques sont construits et une nouvelle représentation d'une image sous la forme d'une palette et d'une image d'index est obtenue. Les minima sont extraits de cette dernière et utilisés pour effectuer plusieurs LPE et obtenir un gradient probabiliste. L'avantage de l'approche proposée repose sur sa capacité à incorporer n'importe quelle caractéristique pour représenter les pixels pour le calcul de la pdf.

Références

- [1] F. Meyer and S. Beucher, "Morphological segmentation," *J VIS COMMUN IMAGE R*, vol. 1, no. 1, pp. 21–46, 1990.
- [2] J. Angulo and D. Jeulin, "Stochastic watershed segmentation," in *ISMM*, 2007, pp. 265–276.
- [3] S. D. Zeno, "A note on the gradient of a multi-image," *COMPUT VIS IMAGE UND*, vol. 33, no. 1, pp. 116–125, 1986.
- [4] O. Lézoray, "Stochastic permutation ordering watershed," in *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, 2021, pp. 726–730.
- [5] O. Lézoray and L. Grady, *Image Processing and Analysis with Graphs : Theory and Practice*, ser. Digital Imaging and Computer Vision. CRC Press / Taylor and Francis, 2012.
- [6] C. Ronse, "Why mathematical morphology needs complete lattices," *SIGNAL PROCESS*, vol. 21, no. 2, pp. 129–154, 1990.
- [7] E. Aptoula and S. Lefèvre, "A comparative study on multivariate mathematical morphology," *Pattern Recognition*, vol. 40, no. 11, pp. 2914–2929, 2007.
- [8] J. Goutsias, H. Heijmans, and K. Sivakumar, "Morphological operators for image sequences," *COMPUT VIS IMAGE UND*, vol. 62, no. 3, pp. 326–346, 1995.
- [9] I. Ram, M. Elad, and I. Cohen, "Image processing using smooth ordering of its patches," *IEEE T IMAGE PROCESS*, vol. 22, no. 7, pp. 2764–2774, 2013.

¹. Panorama de la Tapisserie de Bayeux, Image GREYC (UMR UNICAEN/ENSICAEN/CNRS), CERTIC (UNICAEN) de la campagne photographique 2017 de La Fabrique de patrimoines en Normandie, 2017-2018.

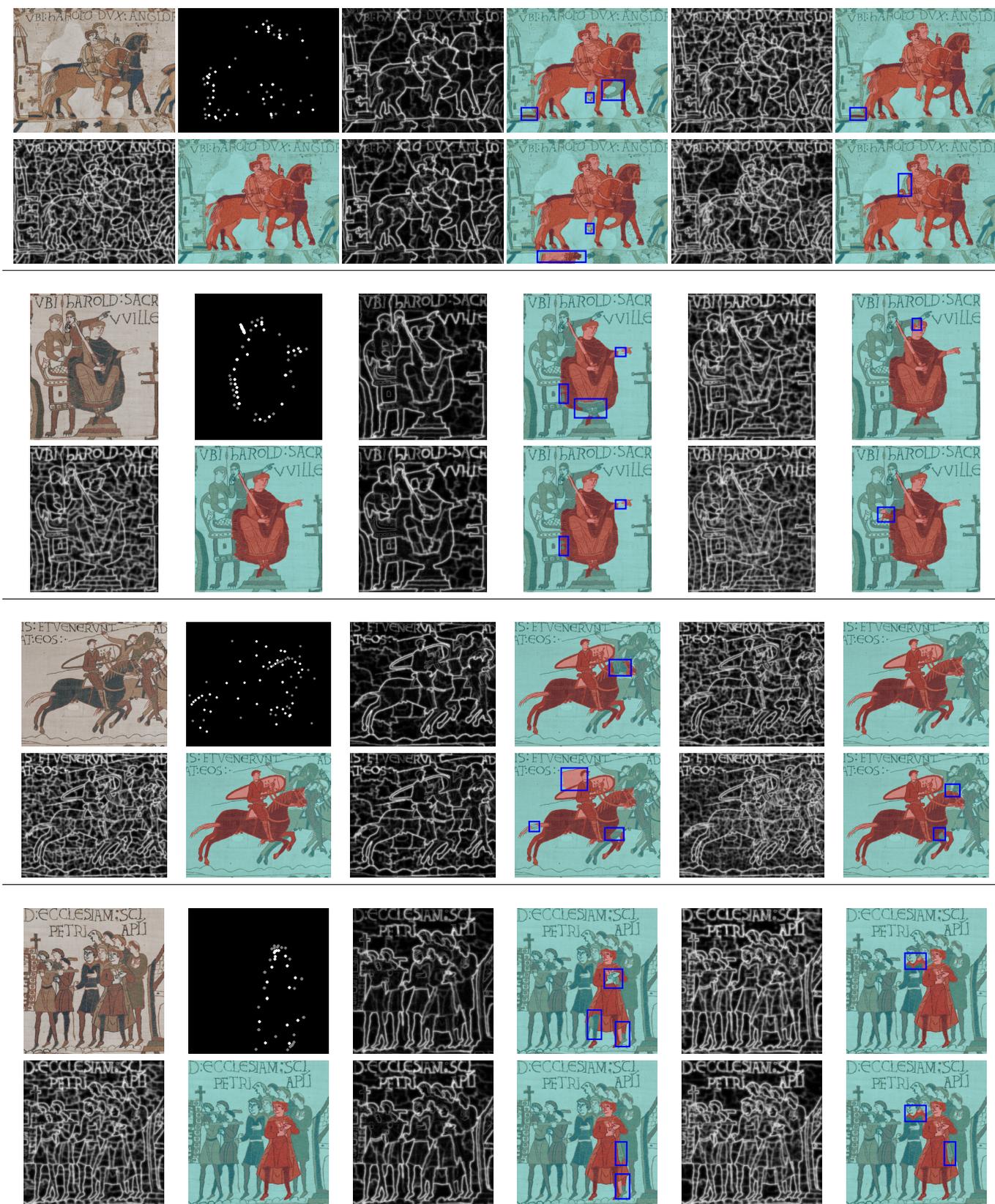


FIGURE 3 – Résultats de segmentation avec pour chaque image, sur deux lignes, de gauche à droite : l'image originale f , les germes de l'utilisateur, les gradient probabilistes ∇f et les segmentations avec la LPE stochastique et notre approche avec des couleurs v_i , des patches 7×7 , des patches 15×15 patches, et des tenseurs de structure t_i .