

Allocation de puissance pour un système de communication par satellite à faisceaux multiples exploitant les effets non linéaires

Arthur LOUCHART¹, Philippe CIBLAT², Charly POUILLIAT³

¹IMT Nord Europe, Institut Mines-Télécom, Univ. Lille, Centre for Digital Systems
rue Guglielmo Marconi, 59650 Villeneuve-d'Ascq, France

²Télécom Paris, Institut Polytechnique de Paris
19 place Marguerite Perey, 94230 Palaiseau, France

³Toulouse INP – ENSEEIHT
2 rue Charles Camichel, 31000 Toulouse, France

arthur.louchart@imt-nord-europe.fr, philippe.ciblat@telecom-paris.fr,
charly.poulliat@enseeiht.fr

Résumé – Dans le contexte des communications montantes par satellite à faisceaux multiples, nous donnons une expression analytique du débit de données, dans le cas d'un récepteur exploitant les effets non linéaires liés à l'amplificateur de puissance. Nous proposons ensuite plusieurs problèmes d'allocations de puissance, tels que la maximisation de la somme des débits du système, en utilisant le cadre de la *programmation signomiale*. Nous montrons un gain significatif par rapport à l'allocation effectuée en utilisant uniquement l'interférence non linéaire.

Abstract – In the context of multibeam satellite uplink communications, we derive a closed-form expression for the data rate in case of receiver exploiting the nonlinear effects related to the high power amplifier. We then propose several power allocation problems, such as maximization of system sum rate, using the *signomial programming* framework. We show significant gain compared to the allocation done by considering nonlinear interference only.

1 Introduction

Les communications par satellite sont une option pour le routage du trafic de données entre deux points terrestres, afin de gérer son augmentation ou les zones d'ombres. C'est pourquoi la liaison retour/montante par satellite utilisant la bande de fréquence Ka présente un grand intérêt. Les utilisateurs terrestres transmettent des données au satellite, qui agit ensuite comme un relais et les envoie à une passerelle terrestre. Malheureusement, les amplificateurs de puissance (AP) à bord du satellite peuvent présenter une caractéristique non linéaire lorsqu'ils fonctionnent à proximité de leur régime de saturation. Ce scénario est possible lorsque la communication nécessite un rapport signal sur bruit suffisamment élevé. En outre, chaque satellite couvre différentes zones terrestres, appelées faisceaux, qui peuvent se chevaucher. Par conséquent, la performance du système satellitaire est affectée par l'AP non linéaire qui conduit à plusieurs types de distorsion, en particulier, la distorsion non linéaire inter-faisceaux.

L'objectif de cet article est double :

- Exprimer de manière analytique le débit de données dans le cas d'un récepteur exploitant la structure non linéaire du signal et dans un contexte multi-faisceaux. Notez que le cas du faisceau unique a été traité dans [1] et que le

cas d'un récepteur interprétant la non-linéarité comme du bruit additionnel a été traité dans [2].

- Optimiser les puissances de transmission des utilisateurs en fonction de plusieurs métriques : (a) maximisation de la somme pondérée des débits, (b) maximisation du minimum des débits, et (c) minimisation de la somme des puissances d'émission. Les solutions proposées sont valables quel que soit le mode de fonctionnement de l'AP.

2 Modèle du système

Nous supposons B faisceaux et M utilisateurs par faisceau. On considère la technique d'accès multiple par répartition en fréquence. L'utilisateur appartenant au faisceau $b \in \{1, \dots, B\}$ et utilisant la sous-bande $m \in \{1, \dots, M\}$, identifié de manière unique par le couple (b, m) , transmet une séquence de symboles $\{a_{b,m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, où n est le numéro de symbole. Soit $P_{b,m} := \mathbb{E} [|a_{b,m,n}|^2]$ et $R_{b,m}$ la puissance et le débit de données de cet utilisateur, respectivement. On note la matrice des puissances de transmission par $\mathbf{P} = (P_{b,m})_{1 \leq b \leq B, 1 \leq m \leq M}$.

Le signal en bande de base émis par l'utilisateur (b, m) est

$$x_{b,m}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{b,m,n} p_T(t - nT_s), \quad (1)$$

où $p_T(t)$ est un filtre en racine de cosinus surélevé, supposé identique pour tous les utilisateurs, et T_s est le temps symbole.

Chaque signal $x_{b,m}(t)$ est transposé autour de la fréquence f_m . La différence entre deux fréquences adjacentes est ΔF . Pour simplifier les calculs sans influencer le résultat final, nous ne prenons pas en compte les différences de phase des signaux. L'antenne du satellite associée au faisceau b reçoit la somme des M signaux transposés du faisceau considéré, ainsi que des interférences inter-faisceaux. Ce signal reçu est noté $x_a^{(b)}(t)$,

$$x_a^{(b)}(t) = \sum_{m=1}^M \sqrt{G_m^{(b)}} x_{b,m}(t) e^{2i\pi f_m t} + x_{\text{IB}}^{(b)}(t), \quad (2)$$

où $x_{\text{IB}}^{(b)}(t)$ est l'interférence inter-faisceau donnée par

$$x_{\text{IB}}^{(b)}(t) = \sum_{\substack{b'=1 \\ b' \neq b}}^B \sum_{m=1}^M \sqrt{G_m^{(b',b)}} x_{b',m}(t) e^{2i\pi f_m t}, \quad (3)$$

avec $G_m^{(b)}$ le gain du canal entre l'utilisateur (b, m) et l'antenne de réception b , et $G_m^{(b',b)}$ le gain du canal entre l'utilisateur (b', m) et l'antenne de réception b .

Soit $y_a^{(b)}(t)$ le signal analytique reçu par la passerelle venant de l'antenne b . À cause de l'AP présent dans le satellite, modélisé par un polynôme du troisième ordre, on obtient

$$y_a^{(b)}(t) = \gamma_1 x_a^{(b)}(t) + \gamma_3 x_a^{(b)}(t) \overline{x_a^{(b)}(t)} + w(t), \quad (4)$$

où $\overline{\cdot}$ représente la conjugaison complexe, et $w(t)$ est un bruit complexe AWGN de moyenne nulle. Les paramètres positifs γ_1 and γ_3 caractérisent les distorsions non linéaires de l'AP [3].

Considérons maintenant la réception de l'utilisateur (b, m) . Nous revenons alors en bande de base,

$$y_{b,m}(t) = y_a^{(b)}(t) e^{-2i\pi f_m t}, \quad (5)$$

puis nous appliquons le filtre adapté $p_R(t) := \overline{p_T(-t)}$,

$$z_{b,m}(t) = \int_{\mathbb{R}} p_R(\tau) y_{b,m}(t - \tau) d\tau. \quad (6)$$

En supposant une synchronisation parfaite entre les faisceaux, ce qui est réaliste puisqu'ils sont colocalisés au satellite, et après quelques calculs simples, nous obtenons

$$\begin{aligned} z_{b,m}(t) &= \gamma_1 \sum_{m'=1}^M \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \sqrt{G_{m'}^{(b)}} a_{b,m',n'} e^{2i\pi(f_{m'} - f_m)t} \\ &\quad \times h_1(t - n'T_s, m' - m) \\ &+ \gamma_1 \sum_{\substack{b'=1 \\ b' \neq b}}^B \sum_{m'=1}^M \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \sqrt{G_{m'}^{(b',b)}} a_{b',m',n'} e^{2i\pi(f_{m'} - f_m)t} \\ &\quad \times h_1(t - n'T_s, m' - m) \\ &+ \gamma_3 \sum_{b_1, b_2, b_3=1}^B \sum_{m_1, m_2, m_3=1}^M \sum_{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}} \sqrt{G_{m_1}^{(b_1,b)} G_{m_2}^{(b_2,b)} G_{m_3}^{(b_3,b)}} \\ &\quad \times a_{b_1, m_1, n_1} a_{b_2, m_2, n_2} \overline{a_{b_3, m_3, n_3}} e^{2i\pi(m_1 + m_2 - m_3 - m)\Delta F t} \\ &\quad \times h_3(t - n_1 T_s, t - n_2 T_s, t - n_3 T_s, m_1 + m_2 - m_3 - m) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} p_R(\tau) w(t - \tau) e^{-2i\pi f_m(t - \tau)} d\tau, \quad (7) \end{aligned}$$

avec les deux noyaux de Volterra suivants, respectivement du premier ordre et du troisième ordre,

$$h_1(t_1, \ell) = \int_{\mathbb{R}} p_T(t_1 - \tau) p_R(\tau) e^{-2i\pi \ell \Delta F \tau} d\tau,$$

$$h_3(t_1, t_2, t_3, \ell) = \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^3 [p_T(t_j - \tau)] p_R(\tau) e^{-2i\pi \ell \Delta F \tau} d\tau.$$

Enfin, le signal est échantillonné pour obtenir la séquence $z_{b,m,n} = z_{b,m}(nT_s)$. Ce terme se décompose en quatre parties,

$$z_{b,m,n} = z_{b,m,n}^{(L)} + z_{b,m,n}^{(I)} + z_{b,m,n}^{(NL)} + w_{b,m,n}, \quad (8)$$

avec $z_{b,m,n}^{(L)}$ la partie dépendant du symbole courant, $z_{b,m,n}^{(I)}$ la partie dépendant linéairement des symboles $\{a_{b,m,n}\}$ sauf le symbole courant, et $z_{b,m,n}^{(NL)}$ la partie non linéaire dépendant des symboles $\{a_{b,m,n}\}$.

Puisque $h_1(nT_s, m)$ est non nul uniquement pour $n = 0$ et $m = 0$ (orthogonalité en temps et en fréquence entre les utilisateurs), nous forçons $m' = m$ et $n' = n$ pour obtenir les parties linéaires suivantes,

$$z_{b,m,n}^{(L)} = \gamma_1 \sqrt{G_m^{(b)}} a_{b,m,n}, \quad (9)$$

$$z_{b,m,n}^{(I)} = \gamma_1 \sum_{\substack{b'=1 \\ b' \neq b}}^B \sqrt{G_m^{(b',b)}} a_{b',m,n}. \quad (10)$$

La partie non linéaire s'écrit de la manière suivante,

$$\begin{aligned} z_{b,m,n}^{(NL)} &= \gamma_3 \sum_{b_1, b_2, b_3=1}^B \sum_{m_1, m_2, m_3=1}^M \sum_{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}} \\ &\quad e^{2i\pi(m_1 + m_2 - m_3 - m)\Delta F n T_s} \sqrt{G_{m_1}^{(b_1,b)} G_{m_2}^{(b_2,b)} G_{m_3}^{(b_3,b)}} \\ &\quad \times a_{b_1, m_1, n_1} a_{b_2, m_2, n_2} \overline{a_{b_3, m_3, n_3}} \\ &\quad \times h_3(n_1 T_s, n_2 T_s, n_3 T_s, m_1 + m_2 - m_3 - m). \quad (11) \end{aligned}$$

Pour un récepteur exploitant les effets non linéaires et en supposant une distribution gaussienne des symboles et une gaussianité pour $z_{b,m,n}^{(I)}$ et $z_{b,m,n}^{(NL)}$ par le théorème central limite, le débit atteignable pour l'utilisateur (b, m) est donné par [4, 5]

$$R_{b,m} = \log_2(1 + Q_{b,m}). \quad (12)$$

Où $Q_{b,m} = A/B$,

$$A = \mathcal{P}_{b,m}^{(L)2} + 2\mathcal{P}_{b,m}^{(L)} \Re \left\{ \mathcal{P}_{b,m}^{(LNL)} \right\} + \left| \mathcal{P}_{b,m}^{(LNL)} \right|^2,$$

$$\begin{aligned} B &= \mathcal{P}_{b,m}^{(L)} \mathcal{P}_w + \mathcal{P}_{b,m}^{(L)} \mathcal{P}_{b,m}^{(I)} + \mathcal{P}_{b,m}^{(L)} \mathcal{P}_{b,m}^{(NL)} \\ &\quad + 2\mathcal{P}_{b,m}^{(L)} \Re \left\{ \mathcal{P}_{b,m}^{(INL)} \right\} - \left| \mathcal{P}_{b,m}^{(LNL)} \right|^2, \end{aligned}$$

avec $\mathcal{P}_{b,m}^{(L)} := \mathbb{E}[|z_{b,m,n}^{(L)}|^2]$, $\mathcal{P}_{b,m}^{(I)} := \mathbb{E}[|z_{b,m,n}^{(I)}|^2]$, $\mathcal{P}_{b,m}^{(NL)} := \mathbb{E}[|z_{b,m,n}^{(NL)}|^2]$ les puissances du signal utile, de l'interférence linéaire et de l'interférence non linéaire. Les termes $\mathcal{P}_{b,m}^{(LNL)} := \mathbb{E}[z_{b,m,n}^{(L)} \overline{z_{b,m,n}^{(NL)}}]$ et $\mathcal{P}_{b,m}^{(INL)} := \mathbb{E}[z_{b,m,n}^{(I)} \overline{z_{b,m,n}^{(NL)}}]$ sont les intercorrélations de la partie non linéaire avec la partie linéaire utile

et respectivement interférente. La puissance de l'AWGN est $\mathcal{P}_W := \mathbb{E}[|w_{b,m,n}|^2]$.

Maintenant, il reste à mettre en lumière les propriétés des termes présents dans (12). Les calculs des termes de puissances ont déjà été réalisés dans [2], où il s'avère que $\mathcal{P}_{b,m}^{(L)}$ est une fonction monomiale en \mathbf{P} , $\mathcal{P}_{b,m}^{(I)}$ et $\mathcal{P}_{b,m}^{(NL)}$ sont des fonctions posynomiales en \mathbf{P} . Les définitions des fonctions monomiales et posynomiales sont données dans [6]. Il reste cependant à déterminer les expressions des termes d'inter-corrélation. Par manque de place, nous nous contenterons d'énoncer les propriétés de ces deux termes, les calculs étant similaires à [2].

Résultat 1 Les termes d'inter-corrélation $\mathcal{P}_{b,m}^{(LNL)}$ et $\mathcal{P}_{b,m}^{(INL)}$ sont des fonctions posynomiales en \mathbf{P} .

3 Stratégies d'allocation de puissance

Pour le moment, nous disposons d'une expression analytique du débit de données dans le cas d'un récepteur exploitant les effets non linéaires, ainsi que des propriétés mathématiques des termes impliqués. Nous nous intéressons maintenant à trois problèmes d'optimisation. Pour tous les problèmes étudiés, les utilisateurs ont une contrainte de puissance de transmission maximale, qui s'exprime par la relation suivante,

$$0 \leq P_{b,m} \leq P_{\max} \quad \forall b, m. \quad (13)$$

3.1 Maximisation de la somme pondérée des débits

Dans cette section, le problème de maximisation de la somme pondérée des débits est formulé, où $\omega_{b,m} \geq 0$ est le poids de l'utilisateur (b, m) .

$$(\mathbf{P1}) : \max_{\mathbf{P}} \sum_{b=1}^B \sum_{m=1}^M \omega_{b,m} \log_2(1 + Q_{b,m}(\mathbf{P})) \text{ t.q. } (13).$$

En utilisant les propriétés de la fonction logarithme, nous obtenons le problème équivalent suivant.

$$(\mathbf{P2}) : \max_{\mathbf{P}} \prod_{b=1}^B \prod_{m=1}^M (1 + Q_{b,m}(\mathbf{P}))^{\omega_{b,m}} \text{ t.q. } (13).$$

La fonction objective n'est ni convexe ni de forme posynomial. Cependant, nous introduisons des variables supplémentaires $\mathbf{t} = (t_{b,m})_{b,m}$ strictement positives, afin que la fonction objective soit de la forme posynomiale.

$$(\mathbf{P3}) : \max_{\mathbf{P}, \mathbf{t}} \prod_{b=1}^B \prod_{m=1}^M t_{b,m}^{\omega_{b,m}} \text{ t.q. } (13),$$

$$1 + Q_{b,m}(\mathbf{P}) \geq t_{b,m} \quad \forall b, m. \quad (14)$$

Le problème obtenu est de la forme *programmation signomiale* (PS). La difficulté réside maintenant dans la contrainte (14), où nous avons un ratio d'une fonction posynomiale sur une fonction signomiale inférieur ou égal à un monome. Puisque le dénominateur est positif, nous pouvons réécrire cette contrainte

pour obtenir un ratio de fonction posynomiale inférieur ou égal à 1,

$$\frac{t_{b,m} (\mathcal{P}_{b,m}^{(NL)} + 2\mathcal{P}_{b,m}^{(INL)} + \mathcal{P}_{b,m}^{(I)} + \mathcal{P}_W)}{D_{b,m}(\mathbf{P}, \mathbf{t})} \leq 1, \quad \forall b, m, \quad (15)$$

où $D_{b,m}$ est une fonction posynomiale en (\mathbf{P}, \mathbf{t}) s'écrivant

$$D_{b,m}(\mathbf{P}, \mathbf{t}) = \mathcal{P}_{b,m}^{(L)} + \mathcal{P}_{b,m}^{(I)} + \mathcal{P}_{b,m}^{(NL)} + 2\mathcal{P}_{b,m}^{(INL)} + 2\mathcal{P}_{b,m}^{(LNL)} + t_{b,m} \mathcal{P}_{b,m}^{(L)-1} \mathcal{P}_{b,m}^{(LNL)2} + \mathcal{P}_W. \quad (16)$$

Le problème résultant est de la forme *programmation géométrique complémentaire* (PGC). Afin de résoudre ce type de problème, on utilise la méthode d'*approximation convexe successive* (ACS), où la fonction posynomiale $D_{b,m}(\mathbf{P}, \mathbf{t})$ est approximée par une fonction monomiale. Finalement, chaque itération requiert la résolution d'un problème de *programmation géométrique* (PG) [7]. La construction de l'approximation monomiale d'une fonction posynomiale en un point, satisfaisant les conditions permettant la convergence de l'ACS, est donnée par [7].

3.2 Maximisation du minimum des débits

Dans cette section, le problème de maximisation du minimum des débits des utilisateurs est formulé.

$$(\mathbf{P4}) : \max_{\mathbf{P}} \min_{b,m} \log_2(1 + Q_{b,m}(\mathbf{P})) \text{ t.q. } (13).$$

Le problème n'est pas de la forme PS à cause des fonctions minimum et logarithme. En utilisant la propriété de stricte croissance de la fonction logarithme et en introduisant une variable supplémentaire $t > 0$, nous obtenons le problème suivant.

$$(\mathbf{P5}) : \max_{\mathbf{P}, t} t \text{ t.q. } (13),$$

$$Q_{b,m}(\mathbf{P}) \geq t \quad \forall b, m. \quad (17)$$

Le problème obtenu est de la forme PS. Nous avons vu dans la partie précédente une méthode de résolution sous-optimale, à savoir la transformation en problème PGC puis l'application de la méthode ACS.

3.3 Minimisation de la somme des puissances

Dans cette section, le problème de minimisation de la somme des puissances est formulé.

$$(\mathbf{P6}) : \min_{\mathbf{P}} \sum_{b=1}^B \sum_{m=1}^M P_{b,m} \text{ t.q. } (13),$$

$$\log_2(1 + Q_{b,m}) \geq R_{b,m}^t, \quad \forall b, m, \quad (18)$$

où $R_{b,m}^t$ est le débit de données cible pour l'utilisateur (b, m) . Le problème n'est pas de la forme PS à cause de la contrainte (18). Cependant, on peut l'écrire de la manière suivante,

$$Q_{b,m}(\mathbf{P}) \geq 2^{R_{b,m}^t} - 1, \quad \forall b, m. \quad (19)$$

Le problème obtenu est de la forme PS. Nous avons vu dans la partie précédente une méthode de résolution sous-optimale, à savoir la transformation en problème PGC puis l'application de la méthode ACS.

4 Résultats numériques

Nous considérons la liaison montante d'un système de communication par satellite à faisceaux multiples, où chaque faisceau utilise la bande 27.5 - 29.5GHz. L'affectation des liens entre les utilisateurs et les sous-bandes est supposée déjà faite [8]. Nous fixons $B = 2$ faisceaux et $M = 6$ sous-bandes (donc 6 utilisateurs par faisceau). Les utilisateurs utilisent un filtre de mise en forme en racine de cosinus surélevé avec un facteur de décroissance de 0.25. La puissance maximale des utilisateurs terrestres est de $P_{\max} = 50\text{W}$. Les gains de canal sont calculés conformément à [8]. Les coefficients de distorsion de l'AP γ_1 et γ_3 sont respectivement de 1 et 0,05. De plus, nous ajoutons un pré-amplificateur à gain variable juste avant l'AP. Celui-ci permet de régler le régime de l'AP et change les gains de canal de manière uniforme pour le signal entrant de la même antenne. Pour simplifier, nous supposons que les gains des pré-amplificateurs sont identiques pour tous les AP. Le solveur numérique CVX est utilisée pour résoudre les problèmes PG [9].

Nous nous intéressons à quatre solutions d'allocation :

- P^{naive} , où tous les utilisateurs transmettent à la même puissance, et une recherche linéaire est effectuée pour trouver la solution optimisant la fonction objective,
- P^{li} , la solution du problème considérant seulement les interférences linéaires,
- P^{nli} , la solution du problème considérant seulement les interférences linéaires et non linéaires, où le terme d'intercorrélation n'est pas exploité,
- P^* , la solution proposée dans cette publication.

Sur la Fig. 1, nous traçons la somme des débits en fonction du gain du pré-amplificateur obtenue pour les allocations mentionnées ci-dessus. Le débit des utilisateurs est évalué avec (12). Nous fixons un poids unitaire pour tous les utilisateurs. Nous remarquons que la prise en compte des effets non linéaires dans le problème d'optimisation est pertinente, puisqu'elle augmente la somme des débits, et nous permet de garder la même performance quel que soit le régime d'amplification.

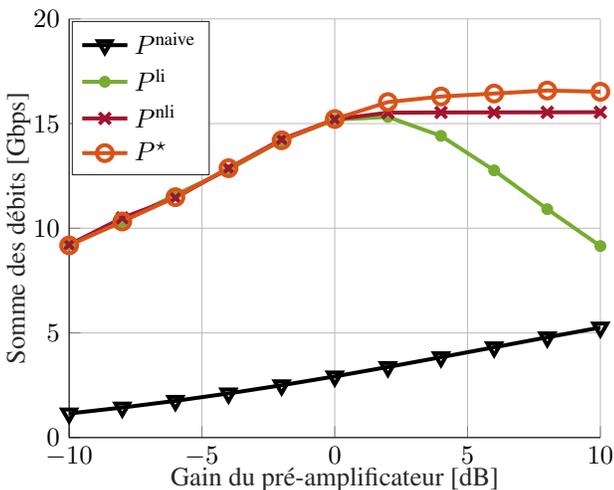


FIGURE 1 – Somme des débits vs. gain du pré-amplificateur.

5 Conclusion

Dans le cadre des communications par satellite, nous avons proposé trois stratégies d'allocation de puissance, qui prennent en compte les effets non linéaires provenant de l'amplificateur de puissance. Nous avons donné une méthode de résolution pour les problèmes non convexes formulés en programmation signomiale. Les résultats numériques ont montré que la prise en compte des distorsions non linéaires dans les problèmes d'optimisation apporte un gain. Pour nos travaux futurs, nous nous intéresserons à un scénario multi-opérateurs conduisant à des problèmes d'optimisation non convexes distribués.

Références

- [1] A. Louchart, P. Ciblat, and C. Poulliat, "Power allocation in Uplink Multiband Satellite System with Nonlinearity-Aware Receiver," in *IEEE International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC)*, Sep. 2021, pp. 201–205.
- [2] —, "Power Allocation for Multibeam Satellite Communications with Nonlinear Impairments," in *International ITG Workshop on Smart Antennas (WSA)*, Sophia Antipolis, France, Nov. 2021.
- [3] B. F. Beidas, "Intermodulation Distortion in Multicarrier Satellite Systems : Analysis and Turbo Volterra Equalization," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 59, no. 6, pp. 1580–1590, 2011.
- [4] R. A. Ince, B. L. Giordano, C. Kayser, G. A. Rousselet, J. Gross, and P. G. Schyns, "A statistical framework for neuroimaging data analysis based on mutual information estimated via a gaussian copula," *Human Brain Mapping*, vol. 38, no. 3, pp. 1541–1573, 2017.
- [5] O. T. Demir and E. Bjornson, "The Busgang Decomposition of Nonlinear Systems : Basic Theory and MIMO Extensions [Lecture Notes]," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 38, no. 1, pp. 131–136, 2021.
- [6] S. Boyd, S.-J. Kim, L. Vandenberghe, and A. Hassibi, "A Tutorial on Geometric Programming," *Optimization and Engineering*, vol. 8, pp. 67–127, May 2007.
- [7] M. Avriel and A. C. Williams, "Complementary geometric programming," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 19, no. 1, pp. 125–141, 1970.
- [8] E. Lagunas, S. Maleki, S. Chatzinotas, S. K. Sharma, and B. Ottersten, "Resource Allocation for Cognitive Satellite Communications With Incumbent Terrestrial Networks," *IEEE Transactions on Cognitive Communications and Networking*, vol. 1, no. 3, pp. 305–317, 2015.
- [9] M. Grant and S. Boyd, "CVX : Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.2," Mar. 2014.