

Détection séquentielle d'un changement transitoire avec un profil dynamique arbitraire

Fatima Ezzahra MANA, Blaise Kévin GUÉPIÉ, Igor NIKIFOROV

Université de Technologie de Troyes / Laboratoire Informatique et Société Numérique, 10004 Troyes, France

fatima_ezzahra.mana@utt.fr, blaise_kevin.guepie@utt.fr

igor.nikiforov@utt.fr

Résumé – De nombreux problèmes de détection séquentielle des anomalies dans des systèmes techniques et cyber-physiques complexes peuvent être réduits à la détection séquentielle fiable de changements transitoires. Contrairement à la détection séquentielle traditionnelle, où la durée du changement est infinie, la détection séquentielle des changements transitoires doit être effectuée avec un retard de détection prescrit L . Le but de cet article est de poursuivre l'étude de la détection des changements transitoires avec un profil variable. Les nouveaux résultats sont obtenus avec les contraintes imposées sur le profil de changement moins restrictives que dans les publications précédentes. Les nouvelles bornes supérieures des probabilités de détection manquée et de fausse alarme pour le test de la moyenne mobile finie (FMA) sont calculées. On considère, comme illustration des résultats généraux, la détection du changement transitoire avec un profil arbitraire dans la variance du signal aléatoire.

Abstract – Many problems of online anomaly detection in complex technical and cyber-physical systems can be reduced to the reliable sequential detection of transient changes. Unlike traditional sequential detection, where the duration of the post-change period is infinite, the sequential detection of transient changes must be performed with a prescribed duration L . The purpose of this paper is to continue the study of the transient change detection with an arbitrary dynamic profile. Some new results are obtained with less restrictive constraints imposed on the transient change profile than those in previous publications. The new upper bounds of the missed detection and false alarm probabilities for the finite moving average (FMA) test are calculated. The general results are illustrated with an arbitrary dynamic profile in the variance of the random signal.

1 Introduction

Certains systèmes critiques en termes de sécurité nécessitent des outils algorithmiques particuliers qui servent à détecter des changements anormaux transitoires (de durée finie) dans le fonctionnement normal du système. C'est un problème typique pour le contrôle d'intégrité des systèmes de navigation, pour la détection des signaux sismiques, acoustiques et pour la détection de pollution de l'air. Généralement, ces changements sont appelés «changements transitoires». Dans la plupart des cas, ces changements entraînent une grave dégradation de la sécurité/sûreté du système lorsqu'ils sont détectés avec un retard de détection supérieur au retard d'alerte requis et défini par des normes ou des standards.

Le modèle génératif du changement transitoire définit la distribution des observations indépendantes $y(n)$ comme suit :

$$y(n) \sim \begin{cases} F_0 & \text{si } 1 \leq n < \mu \\ F_{\gamma(n-\mu+1)} & \text{si } \mu \leq n \leq \mu + L - 1 \end{cases}, \quad (1)$$

où μ est l'instant du changement inconnu, F_0 est la distribution avant le changement et $F_{\gamma(1)}, \dots, F_{\gamma(L)}$ sont les distributions connues définissant un changement transitoire de durée L . L'ensemble des paramètres connus $(\gamma(1), \dots, \gamma(L))$ est le profil dynamique du changement transitoire. Donc, en opposition à la détection séquentielle traditionnelle [13] avec une durée infinie du changement, la période après un changement

transitoire est d'une durée L finie et souvent courte. Le modèle génératif (1) n'est pas défini pour les instants $n > \mu + L - 1$ car les détections avec un retard supérieur à L sont considérées comme manquées et cette période ne présente aucun intérêt.

Les méthodes existantes de détection des signaux transitoires peuvent être divisées en deux groupes : les méthodes bayésiennes (on suppose que l'instant du changement et/ou la durée du changement sont aléatoires) [12, 11, 14] et les méthodes non bayésiennes [1, 6, 7, 3]. Dans cet article, une méthode non bayésienne à base du test de la moyenne mobile finie (FMA) est présentée et étudiée. Le test FMA a été obtenu comme résultat d'optimisation du test séquentiel du rapport de vraisemblance [6, 7] en minimisant la probabilité de détection manquée dans une classe de tests avec la probabilité de fausse alarme bornée supérieurement. Dans les travaux [6, 7] les performances statistiques du test FMA sont calculées sous l'hypothèse que le profil dynamique $(\gamma(1), \dots, \gamma(L))$ respecte une contrainte réduisant le cas général à un cas particulier où les logarithmes des rapports de vraisemblance forment une suite des variables aléatoires associées. La théorie des variables aléatoires associées est développée dans [9, 4].

L'objectif et l'originalité de cet article est d'étudier les performances statistiques du test FMA pour la détection d'un changement transitoire arbitraire, c.-à-d., sans contrainte imposée sur le profil dynamique. L'hypothèse selon laquelle les

logarithmes des rapports de vraisemblance sont des variables aléatoires associées avant le changement est relâchée. De plus, une nouvelle borne supérieure de la pire probabilité de fausse alarme a été établie. En outre, la nouvelle méthode a été testée dans le cas Gaussien où le changement atteint la variance.

Le reste de cet article est organisé comme suit. Premièrement, le critère de détection du changement transitoire sera présenté dans la Section 2. Puis, la Section 3 présentera la méthode de détection utilisée ainsi que les résultats théoriques. Ensuite, les résultats théoriques seront comparés aux résultats de simulation Monte-Carlo dans la Section 4. Enfin, la Section 5 sera réservée pour la conclusion.

2 Le critère de détection

Les différents critères de la détection séquentielle traditionnelle [13] visent à minimiser le (pire) retard moyen de détection dans la classe des tests où le temps moyen avant une fausse alarme est borné inférieurement. L'objectif de la détection des changements transitoires est de pouvoir détecter un changement sans dépasser une certaine durée L .

Le critère d'optimalité de détection des changements transitoires a été défini dans [6, 7] comme suit. Soient une séquence de variables aléatoires indépendantes $\{y(n)\}_{n \geq 1}$, et μ l'instant du début de changement. On suppose que \mathcal{P}_μ (resp. \mathcal{P}_0) est la distribution conjointe des observations $y(1), \dots, y(\mu), y(\mu + 1), \dots$ lorsque $\mu < \infty$ (resp. $\mu = \infty$). De plus, soit \mathbb{P}_μ (resp. \mathbb{P}_0) la probabilité par rapport à la mesure \mathcal{P}_μ (resp. \mathcal{P}_0). Le critère d'optimalité est :

$$\inf_{T \in K_\alpha} \left\{ \overline{\mathbb{P}}_{\text{md}}(T) = \sup_{\mu \geq L} \mathbb{P}_\mu(T - \mu + 1 > L \mid T \geq \mu) \right\}, \quad (2)$$

parmi tous les temps d'arrêt $T \in K_\alpha$ qui satisfont la condition suivante :

$$K_\alpha = \left\{ T : \overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T; m_\alpha) = \sup_{l \geq L} \mathbb{P}_0(l \leq T < l + m_\alpha) \leq \alpha \right\}, \quad (3)$$

où $\overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T; m_\alpha)$ est la pire probabilité de fausse alarme pendant une période de référence m_α .

Ce critère est très différent des critères traditionnels de détection séquentielle. En effet, pour les applications critiques en termes de sécurité, si une détection se produit après le temps d'avertissement requis L , le système se dégrade et ne peut plus être restauré à son fonctionnement nominal. Pour tenir compte de cette situation, le critère (2) – (3) ci-dessus utilise la pire probabilité de détection manquée $\overline{\mathbb{P}}_{\text{md}}(T)$ au lieu du traditionnel pire retard moyen de détection.

3 La méthode de détection

3.1 Le test FMA

Le test CUSUM à fenêtre limitée de seuil variable a été proposé dans [6, 7] pour la détection des changements transitoires.

Le test FMA est le résultat d'optimisation de ce test en utilisant le critère (2) – (3). Le temps d'arrêt T_{FMA} du test FMA est donné comme suit :

$$T_{\text{FMA}}(h) = \inf \{ n \geq L : S_{n-L+1}^n \geq h \} \quad (4)$$

$$S_{n-L+1}^n = \sum_{i=n-L+1}^n \log \frac{f_{\gamma(L-n+i)}(y(i))}{f_0(y(i))}, \quad (5)$$

où, S_{n-L+1}^n est le logarithme du rapport de vraisemblance calculé pour la fenêtre $[n - L + 1, n]$, f_0 (resp. $f_{\gamma(L-n+i)}$) est la densité de probabilité avant le changement (resp. après le changement) et h est le seuil de décision.

3.2 Les propriétés statistiques du test FMA

Le critère (2) – (3) montre que les propriétés statistiques du test FMA sont définies par les pires probabilités de détection manquée $\overline{\mathbb{P}}_{\text{md}}(T_{\text{FMA}})$ et de fausse alarme $\overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T_{\text{FMA}}; m_\alpha)$ pendant une période de référence m_α . La question d'optimalité générale selon le critère (2) – (3) reste ouverte, mais la comparaison du test FMA avec d'autres candidats montre que le test FMA est le meilleur parmi les tests disponibles dans la littérature [6, 7, 14, 2] lorsque $\alpha \rightarrow 0^+$.

Les bornes supérieures pour la probabilité $\overline{\mathbb{P}}_{\text{md}}(T_{\text{FMA}})$ et pour la probabilité $\overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T_{\text{FMA}}; m_\alpha)$ et les détails des démonstrations sont disponibles dans [6, 7] :

$$\overline{\mathbb{P}}_{\text{md}}(T_{\text{FMA}}) \leq G(h) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{P}_\mu(S_{\mu}^{L+\mu-1} < h) \quad (6)$$

$$\overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T_{\text{FMA}}; m_\alpha) \leq 1 - [F(h)]^{m_\alpha}, \quad (7)$$

où $x \mapsto F(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{P}_0(S_{n-L+1}^n \leq x)$ est la fonction de distribution du logarithme du rapport de vraisemblance S_{n-L+1}^n sous la mesure probabiliste \mathcal{P}_0 .

La nouvelle borne pour $\overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T_{\text{FMA}}; m_\alpha)$ est présentée sous la forme du théorème suivant sans contrainte imposée sur le profil dynamique [10].

Théorème 1. *Soit le modèle génératif paramétrique du changement transitoire (1) et le critère (2) – (3). La borne supérieure pour $\overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T_{\text{FMA}}; m_\alpha)$ est :*

$$\overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T_{\text{FMA}}; m_\alpha) \leq \min \{ 1, m_\alpha (1 - F(h)) \}. \quad (8)$$

3.3 La détection du changement transitoire de la variance

Ici, on traite le cas d'un changement transitoire de la variance avec une moyenne nulle. Considérant le modèle génératif suivant :

$$y(n) \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0, \sigma_0^2) & \text{si } n < \mu \\ \mathcal{N}(0, \sigma_{n-\mu+1}^2) & \text{si } \mu \leq n \leq \mu + L - 1 \end{cases}, \quad (9)$$

où, $y(n)$ est l'observation à l'instant n , μ est l'instant du début du changement, σ_0^2 est la variance avant le changement

et $(\sigma_1^2, \dots, \sigma_L^2)$ est le profil dynamique du changement transitoire. Le rapport de vraisemblance dans l'équation (5) devient :

$$S_{n-L+1}^n = \sum_{i=n-L+1}^n \left[\log \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{L-n+i}} \right) + \frac{y^2(i)}{2} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_{L-n+i}^2} \right) \right]. \quad (10)$$

Ensuite, on peut récrire le test FMA de la façon suivante :

$$T_{\text{FMA}}(h) = \inf \left\{ n \geq L : \tilde{S}_{n-L+1}^n \geq \tilde{h} \right\}, \quad (11)$$

$$\tilde{S}_{n-L+1}^n = \sum_{i=n-L+1}^n \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_{L-n+i}^2} \right) y^2(i),$$

où $\tilde{h} = 2 \left(h - \sum_{i=1}^L \log \frac{\sigma_0}{\sigma_i} \right)$.

Finalement, on peut réécrire les fonctions $\tilde{h} \mapsto G(\tilde{h})$ et $\tilde{h} \mapsto F(\tilde{h})$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} G(\tilde{h}) &= \mathbb{P}_\mu \left[\sum_{i=\mu}^{L+\mu-1} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_{i-\mu+1}^2} \right) y^2(i) \leq \tilde{h} \right] \\ &= \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^L d_i^1 \xi_i^2 \leq \tilde{h} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} F(\tilde{h}) &= \mathbb{P}_0 \left[\sum_{i=1}^L \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_i^2} \right) y^2(i) \leq \tilde{h} \right] \\ &= \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^L d_i^0 \bar{\xi}_i^2 \leq \tilde{h} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

où $d_i^0 = 1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$, $d_i^1 = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2} - 1$ et ξ_i et $\bar{\xi}_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Pour calculer les bornes supérieures des $\bar{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T_{\text{FMA}}, m_\alpha)$ et $\bar{\mathbb{P}}_{\text{md}}(T_{\text{FMA}})$ il suffit de trouver les fonctions de distribution $\tilde{h} \mapsto G(\tilde{h})$ et $\tilde{h} \mapsto F(\tilde{h})$. Considérons le cas général d'un profil dynamique de «signe variable», c.-à-d., le rapport entre σ_i , $i = 1, \dots, L$, et σ_0 est quelconque. Supposons également que le vecteur $(\sigma_1, \dots, \sigma_L)$ peut être regroupé par permutation des coefficients et divisé en deux sous-vecteurs $(\sigma_{(1)}^+, \dots, \sigma_{(L_1)}^+)$ et $(\sigma_{(1)}^-, \dots, \sigma_{(L_2)}^-)$, où $L_1 + L_2 = L$. Le premier sous-vecteur représente la partie «positive» du profil dynamique car $\sigma_{(1)}^+ > \sigma_0, \dots, \sigma_{(L_1)}^+ > \sigma_0$ et le deuxième sous-vecteur représente la partie «négative» du profil dynamique car $\sigma_{(1)}^- < \sigma_0, \dots, \sigma_{(L_2)}^- < \sigma_0$. Donc, il faut calculer les distributions des sommes (12) et (13) définies comme suit :

$$G(\tilde{h}) = \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^{L_1} d_i^{1,+} \xi_i^2 - \sum_{i=1}^{L_2} -d_i^{1,-} \bar{\xi}_i^2 \leq \tilde{h} \right) \quad (14)$$

et

$$F(\tilde{h}) = \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^{L_1} d_i^{0,+} \xi_i^2 - \sum_{i=1}^{L_2} -d_i^{0,-} \bar{\xi}_i^2 \leq \tilde{h} \right), \quad (15)$$

où $d_i^{0,+}$, $d_i^{0,-}$, $d_i^{1,+}$ et $d_i^{1,-}$ correspondent aux coefficients d_i^0 et d_i^1 définies dans (12) – (13) pour les parties positive et négative. Premièrement, on calcule la distribution d'une forme quadratique définie positive de variables normales $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

La formule exacte est disponible seulement pour quelques cas particuliers. Une approximation assez précise est proposée par [5] :

$$\mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^L \tilde{d}_i \xi_i^2 < x \right) = \min \{ H_1(x), H_2(x) \}, \quad (16)$$

où $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\tilde{d}_i > 0$, $i = 1, \dots, L$, $\sum_{i=1}^L \tilde{d}_i = 1$,

$$H_1(x) = \sum_{i=1}^L \tilde{d}_i \frac{\bar{\gamma} \left(1/(2\tilde{d}_i), x/(2\tilde{d}_i) \right)}{\Gamma(1/(2\tilde{d}_i))}, \quad (17)$$

la fonction gamma incomplète est $\bar{\gamma}(p, x) = \int_0^x u^{p-1} e^{-u} du$ et

$$H_2(x) = F_{\chi^2}(x/\delta_d; L), \quad \delta_d = \left(\prod_{i=1}^L \tilde{d}_i \right)^{1/L}, \quad (18)$$

où $F_{\chi^2}(x; n)$ est la fonction de distribution χ^2 centrée avec n degrés de liberté. Pour calculer les fonctions de distribution $\tilde{h} \mapsto G(\tilde{h})$ et $\tilde{h} \mapsto F(\tilde{h})$ on utilise le produit de convolution suivant [8] :

$$\mathbb{P}(\zeta - \eta < x) = \int_0^\infty F_\zeta(\zeta \leq t + x) f_\eta(t) dt, \quad (19)$$

où F_ζ désigne la fonction de distribution de ζ et $f_\eta(t)$ désigne la densité de probabilité de η . Ici, on suppose que $\zeta = \sum_{i=1}^{L_1} d_i^{j,+} \xi_i^2$ et $\eta = \sum_{i=1}^{L_2} -d_i^{j,-} \bar{\xi}_i^2$, $j = 0, 1$.

4 Résultats du calcul et simulation

Cette section est consacrée à la comparaison des bornes supérieures $\bar{\mathbb{P}}_{\text{md}}(T_{\text{FMA}})$ et $\bar{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T_{\text{FMA}})$ avec les résultats de simulation Monte-Carlo à base de 10^6 répétitions. Considérons le modèle génératif (9) suivant : $L = 10$, $m_\alpha = 20$, $\sigma_0^2 = 1$. Le profil dynamique est $(10, 8, 6, 2, 8, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.1)$. Cette comparaison est réalisée à l'aide d'un code MATLAB et présentée sur les Figures 1 – 3. On peut conclure que les bornes supé-

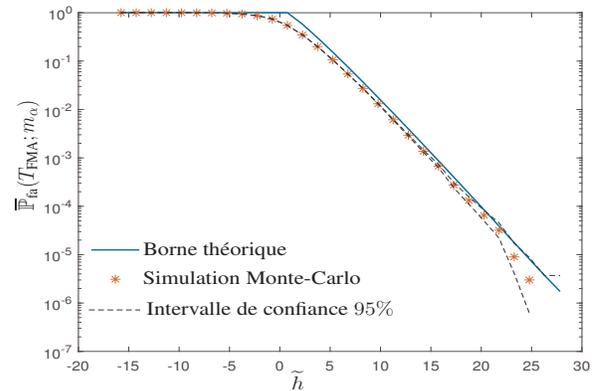


FIGURE 1 – Comparaison entre la borne supérieure de $\bar{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T_{\text{FMA}}; m_\alpha)$ et les résultats de la simulation Monte-Carlo.

rieures théoriques des $\bar{\mathbb{P}}_{\text{md}}$ et $\bar{\mathbb{P}}_{\text{fa}}$ sont concordantes avec les résultats de simulation. Ces bornes sont assez étroite lorsque $\tilde{h} \rightarrow \infty$.

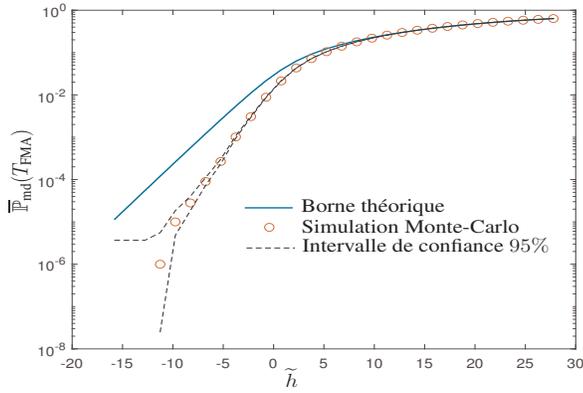


FIGURE 2 – Comparaison entre la borne supérieure de $\overline{\mathbb{P}}_{\text{md}}(T_{\text{FMA}})$ et les résultats de la simulation Monte-Carlo.

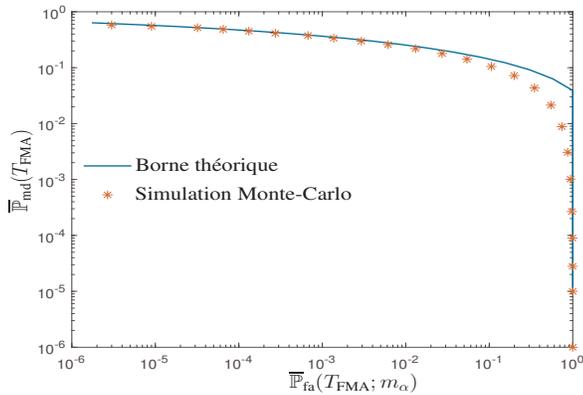


FIGURE 3 – Comparaison entre la borne supérieure théorique et les résultats de la simulation de Monte-Carlo.

5 Conclusion

Des nouveaux résultats sur le test de la moyenne mobile finie (FMA) utilisé pour la détection fiable des changements transitoires ont été obtenus. L'hypothèse utilisée dans les travaux précédents selon laquelle les logarithmes des rapports de vraisemblance sont des variables aléatoires associées avant le changement est relâchée. Maintenant le profil dynamique du changement transitoire peut être arbitraire. L'approche générale est développée dans le cas de la détection du changement transitoire en variance. La qualité des bornes théoriques pour $\overline{\mathbb{P}}_{\text{md}}$ et $\overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}$ a été confirmée par la simulation Monte-Carlo. Dans la pratique, le profil dynamique arbitraire est important pour la détection des signaux avec une signature prédéfinie a priori.

Références

[1] B. Bakhache and I. Nikiforov. Reliable detection of faults in measurement systems. *International Journal of Adap-*

tive Control and Signal Processing, 14(7) :683–700, Nov. 2000.

- [2] D. Egea Roca, B. K. Guepie, J. A. Lopez-Salcedo, G. Seco-Granados, and I. V. Nikiforov. Two strategies in transient change detection. *IEEE Transactions on Signal Processing*, pages 1–16, 2022.
- [3] D. Egea-Roca, J. A. López-Salcedo, G. Seco-Granados, and H. Vincent Poor. Performance bounds for finite moving average tests in transient change detection. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 66(6) :1594–1606, January 2018.
- [4] J. D. Esary, F. Proschan, and D. W. Walkup. Association of Random Variables, with Applications. *The Annals of Mathematical Statistics*, 38(5) :1466 – 1474, 1967.
- [5] S. Gabler and C. Wolff. A quick and easy approximation to the distribution of a sum of weighted chi-square variables. *Statistische Hefte*, 28 :317–325, 1987.
- [6] B. K. Guépié, L. Fillatre, and I. Nikiforov. Sequential detection of transient changes. *Sequential Analysis*, 31(4) :528–547, 2012.
- [7] B. K. Guépié, L. Fillatre, and I. Nikiforov. Detecting a suddenly arriving dynamic profile of finite duration. *IEEE Transactions on Information Theory*, 63(5) :3039–3052, 2017.
- [8] Bernhard Klar. A note on gamma difference distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(18) :3708–3715, 2015.
- [9] E. L. Lehmann. Some Concepts of Dependence. *The Annals of Mathematical Statistics*, 37(5) :1137 – 1153, 1966.
- [10] F. E. Mana, B. K. Guépié, and I. Nikiforov. Sequential detection of transient changes and its application to the air pollution detection. *11th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes*, page [Accepted], 2022.
- [11] K. Premkumar, A. Kumar, and V.V. Veeravalli. Bayesian quickest transient change detection. In *Proc. Fifth International Workshop on Applied Probability (IWAP)*, Jul. 2010.
- [12] V.G. Repin. Detection of a signal with unknown moments of appearance and disappearance. *Problemy Peredachi Informatsii*, 27(2) :61–72, 1991.
- [13] A. G. Tartakovsky, I. V. Nikiforov, and M. Basseville. *Sequential Analysis : Hypothesis Testing and Changepoint Detection*. Monographs on Statistics and Applied Probability 136. Chapman & Hall/CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, 2015.
- [14] A.G. Tartakovsky, A.E. Berenkov, N.R. Kolessa, and I.V. Nikiforov. Optimal Sequential Detection of Signals with Unknown Appearance and Disappearance Points in Time. *IEEE Transactions on Signal Processing*, (69) :2653–2662, 2021.