

Séquences pilotes optimales pour la synchronisation de récepteurs FTN en présence de contamination par les données

Leila MOUNSIF¹, Damien ROQUE², Charly POUILLIAT¹

¹INPT/ENSEEIH, Université de Toulouse, France

²ISAE-SUPAERO, Université de Toulouse, France

leila.mounsif@toulouse-inp.fr, damien.roque@isae-supaeero.fr,
charly.poulliat@toulouse-inp.fr

Résumé – Dans cette étude, nous construisons des séquences pilotes pour la synchronisation en délai et en phase de récepteurs monoporteuses *Faster-than-Nyquist* (FTN). Nous obtenons des solutions analytiques basées sur la minimisation de la borne de Cramér–Rao des paramètres d’intérêt, en discutant notamment de l’impact de la densité de transmission. Nous évaluons ensuite le problème de la *contamination des pilotes* par les données, y compris en présence d’une synchronisation en fréquence grossière non-aidée par les données.

Abstract – In this paper, we design pilot sequences for delay and phase synchronization of *Faster-than-Nyquist* (FTN) single-carrier receivers. We propose closed-form solutions based on the Cramér–Rao bound’s minimization for the parameters of interest while discussing the impact of the signaling density. We further assess the so-called *pilot contamination* issue, including in the case of a non-data-aided coarse frequency synchronization.

1 Introduction

Une transmission linéaire monoporteuse est dite *Faster-than-Nyquist* (FTN) si le rythme symbole est supérieur à la bande bilatérale occupée par l’impulsion de mise en forme [8]. Un tel choix de mise en forme implique l’absence de traitement linéaire susceptible de supprimer l’interférence entre symboles. Les récepteurs FTN présentent alors généralement une complexité calculatoire élevée [3].

En termes d’efficacité spectrale ou de capacité, plusieurs études montrent toutefois que la stratégie FTN s’avère pertinente pour faire face à certains canaux contraints en puissance (ex. : satellite, fibre optique) [1, 2]. De plus, l’absence de caractéristiques cycliques au second ordre et la possibilité de faire varier le rythme symbole indépendamment de la bande occupée font des techniques FTN un atout pour une transmission à faible probabilité d’interception [6, 7].

La synchronisation des récepteurs FTN demeure actuellement peu abordée dans la littérature [3]. Ainsi, la plupart des détecteurs symboles proposés en FTN font l’hypothèse d’une compensation parfaite du délai, des décalages en phase et en fréquence entre l’émetteur et le récepteur. En considérant une approche *aidée par les pilotes*, une stratégie triviale consiste à conserver des préambules à la cadence de Nyquist. Dans ce cas, une *séquence alternante* ± 1 suffisamment longue minimise la borne Cramér–Rao (CRB) du délai et de la phase [13]. En choisissant de transmettre à la fois les pilotes et les données en FTN, la séquence alternante ± 1 devient non-informative et il est alors nécessaire d’adapter les pilotes à la densité et à l’im-

pulsion de mise en forme utilisées [11, 12].

Dans ce papier, nous étendons les travaux présentés dans [12] sur la construction de séquences pilotes optimales en FTN, au sens de la CRB du délai et de la phase. En particulier, la présente contribution se distingue en évaluant la robustesse des estimateurs du maximum de vraisemblance correspondants lorsque les séquences pilotes proposées sont contaminées par les données. Un tel phénomène s’observe lorsque les pilotes et les données sont transmis de manière contiguë en présence d’impulsions de mise en forme non-orthogonales. Nous apprécions également l’impact d’une étape préliminaire de synchronisation grossière en fréquence (non-aidée par les données) sur l’estimation du délai et de la phase au moyen des séquences pilotes proposées.

2 Système FTN monoporteuse

2.1 Modèle d’observation

Nous considérons un signal de modulation linéaire monoporteuse en présence d’erreurs de synchronisation en délai, en phase et en fréquence (respectivement notées ξ , ϕ et F) :

$$s(t) \triangleq e^{j(2\pi Ft + \phi)} \sum_{k \in \mathcal{I}_K} c_k g(t - kT_s - \xi), \quad t \in \mathbf{R} \quad (1)$$

avec $\{c_k\}_{k \in \mathcal{I}_K}$ la séquence de symboles (pilotes ou données), $g(t)$ une impulsion de mise en forme réelle de support fréquentiel $[-B/2; B/2]$ respectant $\|g\|_2^2 = 1$, T_s la période symbole.

La densité temps/fréquence est définie par $\rho \triangleq 1/(BT_s)$ et la transmission est dite FTN si et seulement si $\rho > 1$ [8].

En présence de bruit additif blanc gaussien, le signal (1) est échantillonné après un filtre passe bas idéal¹ de réponse impulsionnelle $v(t) \triangleq 1/T \text{sinc}(t/T)$. Le rythme d'échantillonnage $1/T$ est choisi supérieur à $B + F_{\max}$ avec F_{\max} le plus grand décalage en fréquence possible ($|F| \leq F_{\max}$):

$$r(nT) \triangleq e^{j(2\pi\nu n + \phi)} \sum_{k \in \mathcal{I}_K} c_k g(nT - kT_s - \xi) + w(nT), \quad n \in \mathbf{Z} \quad (2)$$

avec $\nu \triangleq FT$ le décalage en fréquence normalisé et $w(nT)$ les échantillons de bruit filtrés. À partir de (2), nous construisons une observation de durée finie : $\mathbf{r} \triangleq [r(n_0T), r((n_0 + 1)T), \dots, r((n_0 + N - 1)T)]^T$ avec n_0 et N des entiers choisis de façon à capturer le signal d'intérêt :

$$\mathbf{r} = e^{j\phi} \mathbf{D}_\nu \mathbf{G}_\xi \mathbf{c} + \mathbf{w} \quad (3)$$

où

- \mathbf{G}_ξ est la matrice de mise en forme telle que $[\mathbf{G}_\xi]_{n,k} \triangleq g(nT - kT_s - \xi)$, $k \in \mathcal{I}_K$, $n \in \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + N - 1\}$;
- $\mathbf{D}_\nu \triangleq \text{diag}\{e^{j2\pi\nu n_0}, e^{j2\pi\nu(n_0+1)}, \dots, e^{j2\pi\nu(n_0+N-1)}\}$ est la matrice de décalage en fréquence;
- $\mathbf{c} \triangleq [c_p^T, c_z^T, c_d^T]^T$ est une séquence de symboles dont les K_p premiers éléments $\mathbf{c}_p \triangleq [p_0, p_1, \dots, p_{K_p-1}]^T$ sont des pilotes (connus du récepteur), les K_z éléments suivants $\mathbf{c}_z \triangleq \mathbf{0}_{K_z,1}$ constituent un intervalle de garde et les $K_d = K - K_p - K_z$ derniers éléments $\mathbf{c}_d \triangleq [d_0, d_1, \dots, d_{K_d-1}]^T$ portent de l'information;
- $\mathbf{w} = [w(n_0T), w((n_0 + 1)T), \dots, w((n_0 + N - 1)T)]^T$ est le vecteur de bruit tel que $\mathbf{w} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma_w^2 \mathbf{I}_N)$ en notant $\text{SNR} \triangleq 1/\sigma_w^2$.

2.2 CRB du délai et de la phase

Nous établissons la *matrice d'information de Fisher* (FIM) associée au délai et à la phase en supposant (i) une synchronisation en fréquence parfaite ($\nu = 0$), (ii) l'absence de symboles de données ($K_d = K_z = 0$):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{\xi,\xi} & J_{\xi,\phi} \\ J_{\phi,\xi} & J_{\phi,\phi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

où chaque élément est obtenu à partir de [4, Eq. (15.52)] :

$$J_{\xi,\xi} = \frac{2}{\sigma_w^2} \mathbf{c}_p^H \mathbf{P}_\xi \mathbf{c}_p, \quad (5)$$

$$J_{\phi,\phi} = \frac{2}{\sigma_w^2} \mathbf{c}_p^H \mathbf{P}_\phi \mathbf{c}_p, \quad (6)$$

$$J_{\xi,\phi} = J_{\phi,\xi} = \frac{2}{\sigma_w^2} \Re \left\{ j \mathbf{c}_p^H \dot{\mathbf{G}}_\xi^H \mathbf{G}_\xi \mathbf{c}_p \right\} \quad (7)$$

1. Remarquons que des filtres T -orthogonaux plus généraux (ex. : avec excès de bande) sont également acceptables pour obtenir des échantillons de bruit non-corrélés tout en préservant une statistique suffisante pour la synchronisation et pour la détection des symboles [9].

avec $\mathbf{P}_\xi \triangleq \dot{\mathbf{G}}_\xi^H \dot{\mathbf{G}}_\xi$, $\dot{\mathbf{G}}_\xi \triangleq d\mathbf{G}_\xi/d\xi$ et $\mathbf{P}_\phi \triangleq \mathbf{G}_\xi^H \mathbf{G}_\xi$. D'après (4) nous obtenons la CRB du délai ou de la phase :

$$\text{CRB}(\psi_i | \mathbf{c}_p) \triangleq \frac{J_{\psi_j, \psi_j}}{J_{\phi, \phi} J_{\xi, \xi} - J_{\xi, \phi}^2} \quad (8)$$

avec $\psi_i, \psi_j \in \{\xi, \phi\}$ tel que $\psi_i \neq \psi_j$. D'après [13, Lemme 3], remarquons que le découplage des paramètres ξ et ϕ peut s'obtenir en choisissant \mathbf{c}_p à valeur réelle ($J_{\xi, \phi} = J_{\phi, \xi} = 0$) afin de minimiser (8).

3 Séquences pilotes optimales

Nous nous intéressons à la construction analytique de séquences pilotes \mathbf{c}_p asymptotiquement optimales au sens des CRB du délai et de la phase.

Pour cela, nous remarquons que les matrices de Toeplitz \mathbf{P}_ξ et \mathbf{P}_ϕ sont asymptotiquement diagonalisables par transformée de Fourier discrète (DFT) lorsque K_p est suffisamment grand devant le support de l'autocorrelation de $dg(nT)/d\xi$ et $g(nT)$ [11].

En rappelant que l'impulsion de mise en forme $g(t)$ est réelle, nous pouvons combiner les colonnes $\{\mathbf{f}_k\}_{k \in \mathcal{I}_{K_p}}$ d'une matrice de DFT unitaire \mathbf{F}_{K_p} pour aboutir à une structure propre approchée réelle [12] :

$$\mathbf{P}_\psi \stackrel{K_p \gg 1}{\approx} \tilde{\mathbf{F}}_{K_p}^T \tilde{\mathbf{\Lambda}}_\psi \tilde{\mathbf{F}}_{K_p}, \quad \psi \in \{\xi, \phi\}, \quad (9)$$

avec $\tilde{\mathbf{F}}_{K_p}^T$ une matrice orthogonale dont les colonnes s'écrivent

$$\tilde{\mathbf{f}}_k = \begin{cases} \mathbf{f}_k & \text{si } \mathbf{f}_k \text{ est réelle,} \\ \sqrt{2} \Re\{\mathbf{f}_k\} & \text{si } \mathbf{f}_k \text{ est complexe et } k \leq \lfloor \frac{K_p}{2} \rfloor, \\ \sqrt{2} \Im\{\mathbf{f}_k\} & \text{si } \mathbf{f}_k \text{ est complexe et } k > \lfloor \frac{K_p}{2} \rfloor, \end{cases}$$

et $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_\psi$ une matrice diagonale dont les éléments non-nuls sont

$$\tilde{\lambda}_{\psi,k} = \sqrt{K_p} [\mathbf{F}_{K_p} \mathbf{p}_{\psi,c}]_k, \quad k \in \mathcal{I}_{K_p}, \quad (10)$$

où $\mathbf{p}_{\psi,c}$ désigne la première colonne de \mathbf{P}_ψ « circularisée ».

En considérant les formes quadratiques dans (5)–(6) et la structure propre approchée (9), la *séquence pilote optimale* s'obtient directement *via* le quotient de Rayleigh [10, Th. 6.5] :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}}_{\psi,\text{opt}} &\triangleq \arg \max_{\mathbf{c}_p} \mathbf{c}_p^T \tilde{\mathbf{F}}_{K_p}^T \tilde{\mathbf{\Lambda}}_\psi \tilde{\mathbf{F}}_{K_p} \mathbf{c}_p \quad \text{s. c. } \|\mathbf{c}_p\|_2^2 = K_p \\ &= \sqrt{K} \tilde{\mathbf{f}}_{k_{\max}} \end{aligned} \quad (11)$$

avec k_{\max} l'indice de la plus grande valeur propre parmi $\{\tilde{\lambda}_{\psi,k}\}_{k \in \mathcal{I}_{K_p}}$. Notons que la séquence obtenue *via* (11) dépend généralement de $g(t)$ et de ρ , notamment en FTN. La figure 1 illustre ce résultat en affichant les CRB de ξ et de ϕ associées à chaque vecteur $\tilde{\mathbf{f}}_k$. Notons qu'un accroissement de la densité ρ est préjudiciable à l'estimation de ξ mais favorable à l'estimation de ϕ . Si une seule séquence pilote doit être utilisée pour l'estimation jointe de ξ et ϕ , il apparaît judicieux de sélectionner $\tilde{\mathbf{c}}_{\xi,\text{opt}}$ qui permet d'atteindre également une CRB minimale pour ϕ dans le scénario étudié. Enfin, rappelons que le noyau de \mathbf{P}_ψ voit sa dimension croître en même temps que ρ [11];

nous observons notamment que les séquences $\tilde{\mathbf{c}}_{\psi, \text{opt}}$ obtenues pour un système de Nyquist sont non-informatives en FTN.

Soulignons deux spécificités des systèmes de Nyquist orthogonaux : (i) d'après (6), la CRB de ϕ est indépendante de ρ et de k puisque $\mathbf{P}_\phi \propto \mathbf{I}_{K_p}$, (ii) pour K_p pair, le vecteur optimal pour l'estimation de ξ dans (11) est $\mathbf{f}_{K_p/2}$; ceci démontre l'optimalité de la séquence alternante ± 1 tel qu'observé dans [13].

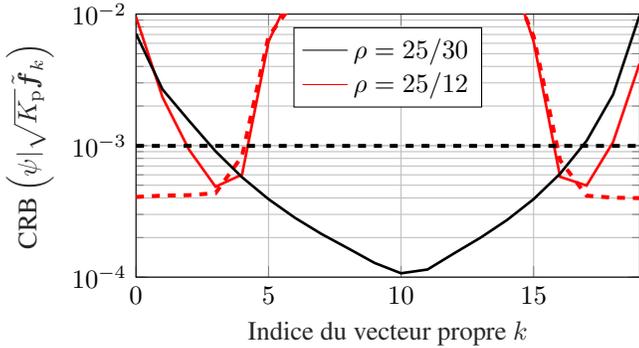


FIGURE 1 – CRB de ξ (traits pleins) et CRB de ϕ (tirets) en fonction de l'indice k du vecteur propre issu de (9) sélectionné comme séquence pilote, avec $K_p = 20$, SNR = 4 dB, $\rho = 25/30$ (Nyquist) et $\rho = 25/12$ (FTN). Les paramètres de simulations décrits au début de la Section 4 sont utilisés.

4 Résultats de simulation

Nous estimons (ξ , ϕ) au sens du maximum de vraisemblance afin de vérifier que les CRB précédemment établies demeurent atteignables avec un nombre raisonnable de symboles pilotes K_p et en présence de contamination par les données ($K_d > 0$). Pour un décalage fréquentiel ν , nous rappelons [4, Ch. 7] :

$$\hat{\xi}_{\text{ML}} \triangleq \arg \max_{\xi} |(\mathbf{D}_\nu \mathbf{G}_\xi [\mathbf{c}_p; \mathbf{0}_{K-K_p,1}])^H \mathbf{r}|, \quad (12)$$

$$\hat{\phi}_{\text{ML}} \triangleq \arg \{(\mathbf{D}_\nu \mathbf{G}_{\hat{\xi}_{\text{ML}}} [\mathbf{c}_p; \mathbf{0}_{K-K_p,1}])^H \mathbf{r}\}. \quad (13)$$

La performance de ces estimateurs est mesurée en termes d'erreur quadratique moyenne : $\text{MSE}(\hat{\psi}_{\text{ML}}) \triangleq \mathcal{E} \{|\psi - \hat{\psi}_{\text{ML}}|^2\}$; celle-ci étant évaluée par simulations de Monte Carlo (5 000 réalisations). La mise en œuvre de (12) s'effectue de façon approchée *via* une intercorrélolation suivie d'une étape de *golden section search* [5].

Dans la suite, nous utilisons un filtre de type *root-raised cosine* (RRC) de facteur d'excès de bande $\alpha = 0,2$. L'observation est construite avec un facteur de suréchantillonnage $T_s/T = 10$; elle débute et se termine aux échantillons $n_0 = -64T_s/T$ et $T_s(K+64)/T - 1$. Nous fixons la taille de la séquence pilote à $K_p = 20$ et celle de l'intervalle de garde à $K_z = 2$. Les symboles de données sont indépendants et uniformément distribués dans une constellation QPSK normalisée.

4.1 Robustesse de l'estimation du délai et de la phase en présence de données

Nous considérons dans un premier temps un récepteur parfaitement synchronisé en fréquence ($\nu = 0$). La figure 2 illustre la CRB de ξ ainsi que la MSE de $\hat{\xi}_{\text{ML}}$ en fonction du SNR. Nous considérons tout d'abord un scénario de référence sans données ($K_d = 0$), pour lequel l'estimateur atteint plus rapidement la borne pour $\rho = 25/12$ (FTN) que pour $\rho = 25/30$ (Nyquist). Cela s'explique par la dilatation de $g(t)$ en même temps que la densité augmente (à débit symbole fixé); un tel scénario se révélant favorable à l'estimation grossière du délai par intercorrélolation. En présence de données ($K_d > 0$), un court intervalle de garde (ici $K_z = 2$) permet de garantir la robustesse de l'estimateur pour un SNR faible à modéré; $K_z = 6$ (non-représenté ici) préserve l'efficacité asymptotique de $\hat{\xi}_{\text{ML}}$ jusqu'à un SNR de 20 dB, y compris pour le scénario FTN. Des résultats similaires à ceux de la figure 2 s'observent pour $\hat{\phi}_{\text{ML}}$.

La figure 3 illustre la CRB ainsi que la MSE de $\hat{\xi}_{\text{ML}}$ et $\hat{\phi}_{\text{ML}}$ en fonction de la densité. Tout d'abord, les estimateurs sont efficaces lorsque $K_d = 0$, y compris à densité élevée et pour un nombre limité de pilotes ($K_p = 20$). Rappelons que la densité la plus faible ($\rho = 25/30$) correspond au système de Nyquist; il est donc attendu que les données n'introduisent aucune contamination notable dès lors que $\hat{\xi}_{\text{ML}} \approx \xi$. En FTN, $\hat{\phi}_{\text{ML}}$ est globalement peu affecté par la présence de données. En revanche, la performance de $\hat{\xi}_{\text{ML}}$ se dégrade continûment lorsque la densité augmente. Ce constat est toutefois à relativiser car la MSE observée reste inférieure à 10^{-3} avec un SNR de 4 dB.

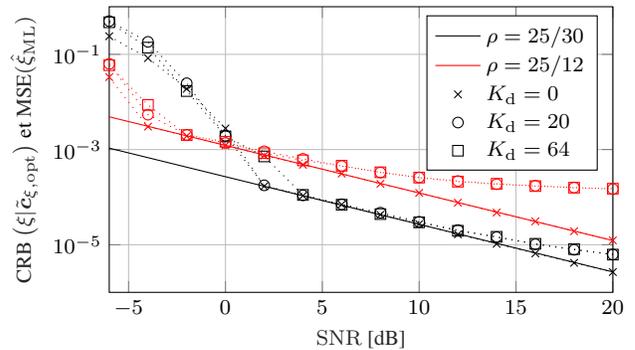


FIGURE 2 – CRB ($\xi | \tilde{\mathbf{c}}_{\xi, \text{opt}}$) (traits pleins) et MSE($\hat{\xi}_{\text{ML}}$) (marqueurs) en fonction du SNR, avec $K_d \in \{0, 20, 64\}$, $\rho = 25/30$ (Nyquist) et $\rho = 25/12$ (FTN).

4.2 Compensation grossière du décalage en fréquence

Nous abordons le cas d'un récepteur non-synchronisé en fréquence ($\nu \neq 0$) et en présence de symboles de données ($K_d > 0$). La figure 4 représente la CRB et la MSE de $\hat{\xi}_{\text{ML}}$ en fonction du décalage en fréquence ν , avec ou sans compensation de celui-ci au moyen d'un estimateur non-aidé par les données à faible complexité calculatoire, tel que décrit dans [14].

Une synchronisation grossière en fréquence s'avère indispensable lorsque $\nu > 1,3 \times 10^{-3}$. L'estimateur de ν utilisé permet de faire face à des scénarios FTN en restaurant les performances présentées dans la figure 2² en requérant toutefois l'observation d'un grand nombre de symboles ($K_d = 10\,000$).

5 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé des séquences pilotes optimales au sens de la CRB pour synchroniser en délai et en phase des récepteurs monoporteuses FTN. Les solutions analytiques retenues se montrent fortement dépendantes de la densité de transmission en FTN. Les estimateurs du maximum de vraisemblance usuels demeurent globalement robustes en présence de contamination par les données : entre deux et six symboles de garde suffisent à préserver leur efficacité asymptotique pour un SNR faible à modéré. De plus, une synchronisation fréquentielle grossière (non-aidée par les données) se montre suffisante pour exploiter avec pertinence les séquences pilotes proposées. De futurs travaux pourraient s'attacher à inclure le décalage fréquentiel dans la procédure d'optimisation des séquences pilotes ; ainsi que son estimation aidée par les pilotes.

Références

- [1] G. COLAVOLPE : Faster-than-Nyquist and beyond : How to improve spectral efficiency by accepting interference. *In IEEE Eur. Conf. and Exhib. on Optical Commun.*, pages 1–25, 2011.
- [2] T. DELAMOTTE, A. KNOPP et G. BAUCH : Faster-than-Nyquist signaling for satellite communications : A PAPR analysis. *In Int. ITG Conf. Syst., Commun. and Coding*, pages 1–6, 2017.
- [3] J. FAN, S. GUO, X. ZHOU, Y. REN, G. Y. LI et X. CHEN : Faster-than-Nyquist signaling : an overview. *IEEE Access*, 5:1925–1940, 2017.

2. Le même commentaire s'applique également à $\hat{\phi}_{ML}$, non-représenté ici.

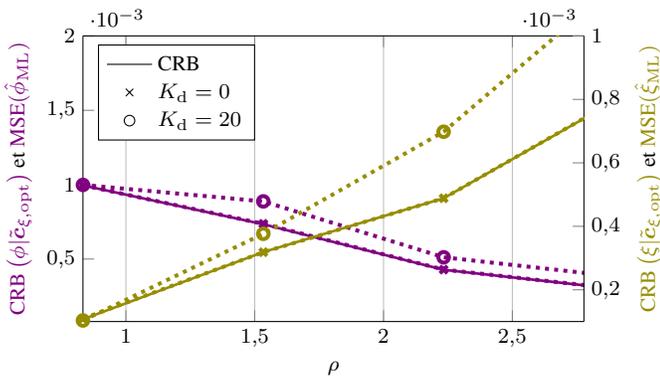


FIGURE 3 – CRB ($\psi | \tilde{c}_{\xi, opt}$) (traits pleins) et MSE ($\hat{\psi}_{ML}$) (marqueurs) en fonction de ρ , avec $K_d \in \{0, 20\}$ et SNR = 4 dB.

- [4] S.M. KAY : *Fundamentals of statistical signal processing, Volume 1 : Estimation theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1993.
- [5] J. KIEFER : Sequential minimax search for a maximum. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4(3):502–506, 1953.
- [6] Y. LI, J. WANG, W. TANG, X. LI et S. LI : A variable symbol duration based FTN signaling scheme for PLS. *In IEEE Int. Conf. on Wireless Commun. and Signal Process.*, pages 1–5, 2019.
- [7] M.J. LÓPEZ MORALES, D. ROQUE et M. BENAMMAR : Timing estimation based on higher-order cyclostationarity for faster-than-Nyquist signals. *IEEE Commun. Letters*, 23(8):1373–1376, 2019.
- [8] J. E. MAZO : Faster-than-Nyquist signaling. *Bell Syst. Tech. J.*, 54:1451–1462, 1975.
- [9] H. MEYR, M. OERDER et A. POLYDOROS : On sampling rate, analog prefiltering, and sufficient statistics for digital receivers. *IEEE Trans. Commun.*, 42(12):3208–3214, 1994.
- [10] T. K. MOON et W. C. STIRLING : *Mathematical methods and algorithms for signal processing*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.
- [11] L. MOUNSIF et D. ROQUE : Optimal pilot sequences for timing estimation in faster-than-Nyquist systems. *IEEE Commun. Lett.*, 25(4):1236–1240, 2021.
- [12] L. MOUNSIF, D. ROQUE et C. POUILLIAT : Optimal pilot sequences for phase and timing synchronization in FTN systems. *In IEEE Mil. Commun. Conf.*, pages 157–161, 2021.
- [13] C. SHAW et M. RICE : Optimum pilot sequences for data-aided synchronization. *IEEE Trans. Commun.*, 61(6):2546–2556, 2013.
- [14] Y. WANG, K. SHI et E. SERPEDIN : Non-data-aided feedforward carrier frequency offset estimators for QAM constellations : A nonlinear least-squares approach. *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, (856139), 2004.

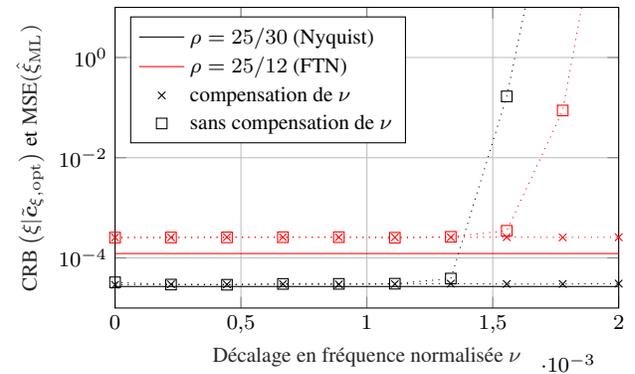


FIGURE 4 – CRB ($\xi | \tilde{c}_{\xi, opt}$) (traits pleins) et MSE ($\hat{\xi}_{ML}$) (marqueurs) en fonction de ν , avec et sans compensation grossière de la fréquence, SNR = 10 dB et $K_d = 10\,000$.