

# Restauration d’images astronomiques corrigées par optique adaptative : méthode marginale étendue par algorithme MCMC

Alix YAN<sup>1</sup>, Laurent MUGNIER<sup>1</sup>, Jean-François GIOVANNELLI<sup>2</sup>, Romain FÉTICK<sup>1</sup>, Cyril PETIT<sup>1</sup>

<sup>1</sup>DOTA, ONERA, Université Paris Saclay, 29 Avenue de la Division Leclerc, F-92322 Châtillon, France

<sup>2</sup>IMS (Univ. Bordeaux, CNRS, BINP), 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence, France

alix.yan@onera.fr, laurent.mugnier@onera.fr, giova@ims-bordeaux.fr,  
romain.fetick@onera.fr, cyril.petit@onera.fr

**Résumé** – La restauration d’images corrigées par optique adaptative (OA) est particulièrement difficile, du fait de la méconnaissance de la réponse impulsionnelle du système optique (PSF pour *point spread function*) en plus des difficultés usuelles. Une approche efficace est de marginaliser l’objet et d’estimer la PSF et les hyperparamètres (liés à l’objet et au bruit) avant la déconvolution. Des travaux récents ont appliqué cette approche, combinée à un modèle paramétrique de PSF, à des images astronomiques et de satellites. Nous proposons une extension de cette méthode utilisant un algorithme Monte-Carlo par chaînes de Markov, afin d’inclure des barres d’erreur sur les paramètres. Nous présentons les résultats obtenus sur des images astronomiques, simulées et expérimentales.

**Abstract** – Adaptive optics (AO) corrected image restoration is particularly difficult, suffering from the lack of knowledge on the point spread function (PSF) in addition to usual difficulties. An efficient approach is to marginalize the object out of the problem and to estimate the PSF and (object and noise) hyperparameters only, before deconvolving the object using these estimations. Recent works have applied this marginal blind deconvolution method, combined to a parametric model of the PSF, to a series of AO corrected astronomical and satellite images. Our work extends it thanks to Markov chain Monte Carlo methods to include error bars on the estimated PSF parameters as well as on object and noise hyperparameters. Finally, we present the obtained results on simulated and experimental astronomical images.

## 1 Introduction

L’imagerie à haute résolution dans le visible depuis le sol, pour l’astronomie ou l’observation de satellites, est limitée par la turbulence atmosphérique. Si l’optique adaptative (OA) permet de la compenser partiellement, des résidus turbulents persistent. On inclut donc une composante de traitement au système d’observation afin de restaurer l’objet [1].

L’impact des résidus turbulents est décrit dans la fonction d’étalement du point (PSF pour *point spread function*). Cette dernière étant mal connue, l’objet et la PSF doivent tous deux être estimés. Historiquement, en astronomie, les deux étaient estimés conjointement [2], ce qui donne une solution dégénérée en l’absence de contrainte forte [3]. Une autre manière de faire est d’estimer d’abord la PSF en « marginalisant » l’objet avant de déconvoluer l’image avec la PSF estimée [3, 4]. Dans notre cas, la PSF est décrite par un modèle physique parcimonieux, et l’objet est décrit par un *a priori* gaussien avec un modèle paramétrique pour sa densité spectrale de puissance (DSP). La méthode que nous utilisions précédemment, AMIRAL (pour *Automatic Myopic Image Restoration ALgorithm*), combine ces deux paramétrisations, ainsi que l’estimateur marginal maximum *a posteriori* (MMAP) [5].

Ce travail étend cette méthode Bayésienne afin de fournir des incertitudes sur les paramètres de PSF et de DSP [6, 7]. Ces in-

certitudes permettent d’étudier la variabilité de la PSF estimée puis l’impact de celle-ci sur l’image restaurée. Pour cela, nous introduisons d’abord le nouvel estimateur minimisant l’erreur quadratique moyenne (estimateur MMSE), *i.e.* l’espérance de la loi *a posteriori*. Nous présentons ensuite l’algorithme Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC) qui nous permet d’échantillonner la loi [8], puis nous calculons la moyenne et l’écart-type empiriques (approchant l’espérance et l’écart-type de la loi) pour chacun des paramètres. Enfin, nous présentons des résultats sur des données simulées et expérimentales.

## 2 Estimateur MMSE marginal

### 2.1 Formation d’image et lois *a priori*

On considère que l’image  $i$  résulte de la convolution 2D de l’objet  $o$  avec la PSF  $h$ , à laquelle s’ajoute du bruit  $n$  (principalement du bruit de photon et de détecteur), donnant le modèle de formation d’image suivant [9] :

$$i = h * o + n \quad (1)$$

où  $*$  désigne la convolution discrète, et  $i$ ,  $o$ ,  $h$  et  $n$  sont de taille  $N \times N$ , avec  $P = N^2$  pixels.

Pour cette étude, on utilise une vue synthétique de l’astéroïde Vesta, générée par le logiciel OASIS [10], pour simuler son ob-

servation par un télescope astronomique de 8 m au sol, corrigée par OA, avec les mêmes paramètres que [5]. Le bruit est considéré indépendant de l'objet, additif, blanc, centré et gaussien, de précision  $\gamma_n$ . La PSF est décrite en utilisant le modèle PS-FAO19 [11], avec 2 paramètres principaux : le paramètre de Fried  $r_0$ , décrivant la force de la turbulence, et la variance de la phase turbulente résiduelle  $v_\phi$ , décrivant la qualité de correction de l'OA. Ce modèle a été validé sur des systèmes d'optique adaptative et des télescopes très différents [11, 12].



FIGURE 1 – A gauche : objet vrai  $\mathbf{o}$  (vue synthétique de Vesta). A droite : image simulée  $\mathbf{i}$ .

On choisit un modèle *a priori* gaussien et stationnaire pour l'objet, dans lequel sa moyenne  $\mathbf{m}_o$  est uniforme sur tous les pixels et égale à la moyenne empirique de l'image (puisque l'incertitude sur  $\mathbf{m}_o$  est faible étant donné le grand nombre de pixels). Pour la DSP objet  $S_o$ , on utilise le modèle paramétrique suivant :

$$S_o(\mathbf{f}) = \gamma_o^{-1} \bar{S}_o(\mathbf{f}), \text{ avec } \bar{S}_o(\mathbf{f}) = 1/(k + f^p) \quad (2)$$

et  $f = |\mathbf{f}|$  la fréquence radiale. Ce modèle à symétrie azimutale reprend celui de Matérn [13]. Dans ce modèle,  $\gamma_o$  fixe l'énergie globale de l'objet,  $p$  décrit la décroissance aux hautes fréquences et  $k$  donne le point de rupture entre les deux régimes du modèle. En faisant une approximation circulante par blocs à blocs circulants de la matrice de covariance objet, la loi *a priori* pour l'objet s'écrit :

$$p(\mathbf{o}|\gamma_o, k) = \left(\frac{\gamma_o}{2\pi}\right)^{P/2} \prod_{\mathbf{f}} \left(\bar{S}_o(\mathbf{f})\right)^{-1/2} \times \exp\left[-\frac{\gamma_o}{2} \bar{S}_o(\mathbf{f})^{-1} |\tilde{\mathbf{o}}(\mathbf{f}) - \tilde{\mathbf{m}}_o(\mathbf{f})|^2\right] \quad (3)$$

où  $\tilde{\cdot}$  désigne la transformée de Fourier discrète (TFD) et le produit est sur l'ensemble des pixels dans le domaine des fréquences spatiales. Étant donné les hypothèses sur le bruit, la vraisemblance se déduit du modèle (1), en faisant une approximation périodisée de celui-ci :

$$p(\mathbf{i}|\mathbf{o}, \gamma_n, r_0, v_\phi) = \left(\frac{\gamma_n}{2\pi}\right)^{P/2} \prod_{\mathbf{f}} \exp\left(-\frac{\gamma_n}{2} |\tilde{\mathbf{i}}(\mathbf{f}) - \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{f})\tilde{\mathbf{o}}(\mathbf{f})|^2\right) \quad (4)$$

avec  $\tilde{\mathbf{h}}$  la fonction de transfert optique discrétisée (FTO).

Les paramètres de PSF ainsi que les paramètres de DSP bruit et objet, dénommés « paramètres » par la suite, sont considérés

indépendants *a priori*. De plus, on considère que chaque paramètre peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné. Ainsi, en suivant le principe d'indifférence, on utilise des *a priori* uniformes pour chacun d'eux [14].

L'image  $\mathbf{i}$  et les paramètres de DSP objet  $\gamma_o, k$  sont choisis indépendants conditionnellement aux autres paramètres. Enfin, l'objet et les paramètres de PSF et du bruit sont pris indépendants conditionnellement aux paramètres de DSP objet.

D'après la règle de conditionnement, la loi jointe s'écrit :

$$p(\mathbf{i}, \mathbf{o}, \gamma_n, \gamma_o, k, r_0, v_\phi) = p(\mathbf{i}|\mathbf{o}, \gamma_n, r_0, v_\phi) \times p(\mathbf{o}|\gamma_o, k)p(\gamma_n)p(\gamma_o)p(k)p(r_0)p(v_\phi) \quad (5)$$

La loi *a posteriori*  $p(\mathbf{o}, \gamma_n, \gamma_o, k, r_0, v_\phi|\mathbf{i})$  est proportionnelle à la loi jointe ci-dessus.

## 2.2 Estimateur marginal

Comme dit précédemment, une manière d'estimer les paramètres et l'objet est de d'abord estimer les paramètres en marginalisant la loi *a posteriori* sur l'objet. De plus, la règle de Bayes permet d'écrire la loi marginale *a posteriori* en fonction des lois *a priori* et de la vraisemblance marginale :

$$p(\gamma_n, \gamma_o, k, r_0, v_\phi|\mathbf{i}) \triangleq \int p(\mathbf{o}, \gamma_n, \gamma_o, k, r_0, v_\phi|\mathbf{i}) d\mathbf{o} \quad (6)$$

$$= \frac{p(\gamma_n)p(\gamma_o)p(k)p(r_0)p(v_\phi)}{p(\mathbf{i})} \times p(\mathbf{i}|\gamma_n, \gamma_o, k, r_0, v_\phi) \quad (7)$$

Les lois *a priori* pour  $\gamma_n, \gamma_o, k, r_0$  et  $v_\phi$  ont été données précédemment. Le bruit et l'objet étant modélisés gaussiens, d'après (1) la vraisemblance marginale est gaussienne :

$$p(\mathbf{i}|\gamma_n, \gamma_o, k, r_0, v_\phi) = (2\pi)^{-P/2} \prod_{\mathbf{f}} \left(S_i(\mathbf{f})\right)^{-1/2} \times \exp\left[-\frac{1}{2} S_i(\mathbf{f})^{-1} |\tilde{\mathbf{i}}(\mathbf{f}) - \tilde{\mathbf{m}}_i(\mathbf{f})|^2\right] \quad (8)$$

avec  $S_i$  la DSP image et  $\mathbf{m}_i$  l'image moyenne :

$$S_i(\mathbf{f}) = S_o(\mathbf{f})|\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{f})|^2 + S_n \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{m}}_i(\mathbf{f}) = \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{f})\tilde{\mathbf{m}}_o(\mathbf{f}) \quad (10)$$

La loi marginale *a posteriori* pour les paramètres se déduit des équations (7) et (8).

## 2.3 Estimateur MMSE et échantillonnage

L'estimateur MMSE est l'espérance *a posteriori* et elle n'a pas d'expression analytique vue la complexité de la loi. Une possibilité consiste à tirer des échantillons et à calculer leur moyenne empirique. La structure de la loi étant complexe, on ne sait pas échantillonner directement et on utilise un algorithme de Metropolis-Hastings (MH) : on tire sous une autre loi (dite proposition) et on accepte avec une probabilité prescrite, déduite des lois de proposition et *a posteriori* (ou alors on duplique la valeur courante). On peut en envisager deux formes : tirer les paramètres simultanément (MH standard) ou l'un après

l'autre (MH-within-Gibbs). Le tirage simultané peut de faire chuter la probabilité d'acceptation (sauf à utiliser des versions plus avancées comme le MALA ou HMC exploitant le gradient). Inversement, le traitement d'un paramètre après l'autre peut également ralentir l'algorithme. Par souci de simplicité, on utilise ici la seconde version. Dans un algorithme de Gibbs usuel, chaque paramètre est tiré sous sa conditionnelle *a posteriori*, proportionnelle au posterior joint (7). Ici, ces conditionnelles sont successivement considérées comme des lois cibles. Asymptotiquement, les échantillons sont sous la loi *a posteriori* et leur moyenne empirique tend vers l'espérance [15].

### 3 Résultats

Les résultats ci-dessous sont obtenus avec l'image simulée Fig. 1 droite : l'objet vrai est la vue synthétique de Vesta, sur un fond noir de taille  $512 \times 512$  pixels. Les paramètres de PSF vrais sont  $r_0 = 0.15$  m et  $v_\phi = 1.3$  rad<sup>2</sup>. La variance du bruit est prise égale à la moyenne de l'objet (comme approximation du bruit de photon). Le flux total de l'objet est fixé à  $F_o = 10^9$  ph (photons), donc  $\gamma_n = P/F_o = 2.62 \times 10^{-4}$  ph<sup>-2</sup>.

Les paramètres sont estimés avec la méthode proposée, l'hyperparamètre  $p$  est fixé à  $p = 2.9$ , correspondant au meilleur réglage sur les données avec AMIRAL [5]. L'échantillonneur de Gibbs est lancé pour 200 000 itérations (ce qui correspond à quelques heures) pour vérifier la convergence. On trace les chaînes des échantillons ainsi que les histogrammes correspondants pour  $\gamma_n$ ,  $r_0$  et  $v_\phi$  (avec leur valeur vraie) dans la Fig. 2.

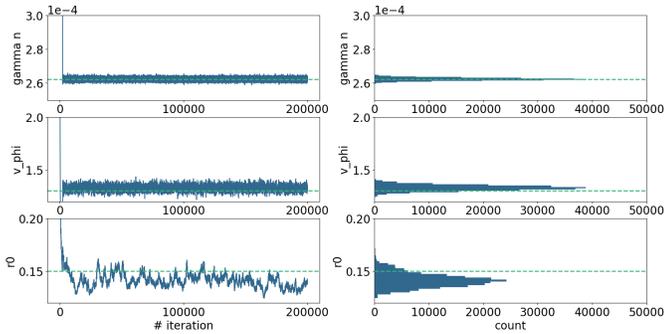


FIGURE 2 – De haut en bas :  $\gamma_n$ ,  $r_0$ ,  $v_\phi$ . A gauche : chaînes des échantillons. A droite : histogrammes correspondants. (Valeurs vraies en ligne pointillée.)

L'inspection visuelle de la Fig. 2 suggère que les chaînes ont un temps de chauffe court, suivi d'un état stationnaire, où les échantillons sont concentrés dans un intervalle petit comparativement à leur moyenne.

Les moyennes empiriques  $m$  et écarts-types  $\sigma$  calculés, ainsi que les valeurs vraies, sont récapitulés dans le Tab. 1. La précision du bruit est correctement estimée, avec une erreur d'estimation plus faible que 0.2%. Pour les paramètres de PSF, on constate que les vraies valeurs de  $r_0$  et de  $v_\phi$  sont comprises dans l'intervalle  $m \pm 2\sigma$ . Les valeurs estimées sont à comparer aux résultats obtenus avec AMIRAL, avec lequel les para-

TABLE 1 – Moyennes  $m$ , écarts-types  $\sigma$  et valeurs vraies.

Paramètre	$m \pm \sigma$	Valeur vraie
$\gamma_n$ (ph <sup>-2</sup> )	$2.62 \times 10^{-4} \pm 7.98 \times 10^{-7}$	$2.62 \times 10^{-4}$
$\gamma_o$ (ph <sup>-2</sup> )	$2.65 \times 10^{-13} \pm 5.39 \times 10^{-14}$	-
$k$	$0.619 \pm 0.469$	-
$r_0$ (m)	$0.141 \pm 0.006$	0.15
$v_\phi$ (rad <sup>2</sup> )	$1.33 \pm 0.02$	1.30

mètres de PSF estimés sont  $r_0 = 0.142$  m et  $v_\phi = 1.13$  rad<sup>2</sup> pour les mêmes conditions de simulation à l'exception de  $p$ , fixé à 3 [5]. De plus, les erreurs sur ces paramètres sont assez faibles (6% d'erreur pour  $r_0$ , 2% d'erreur pour  $v_\phi$ ). On peut aussi juger de l'estimation de la FTO au global : sur la Fig. 3, on constate visuellement que les FTO estimée et vraie sont proches.

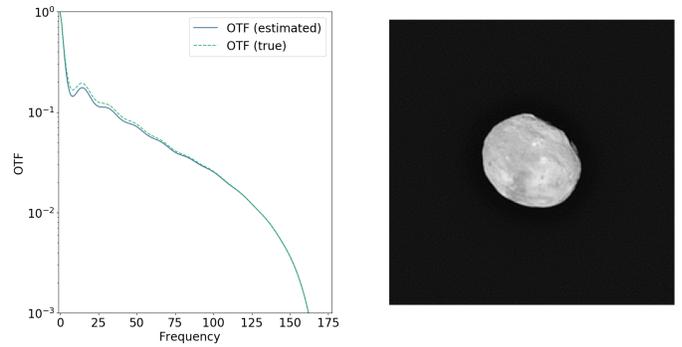


FIGURE 3 – A gauche : FTO estimée (et vraie en ligne pointillée). A droite : objet restauré (filtrage de Wiener) à partir de l'image de la Fig. 1 droite.

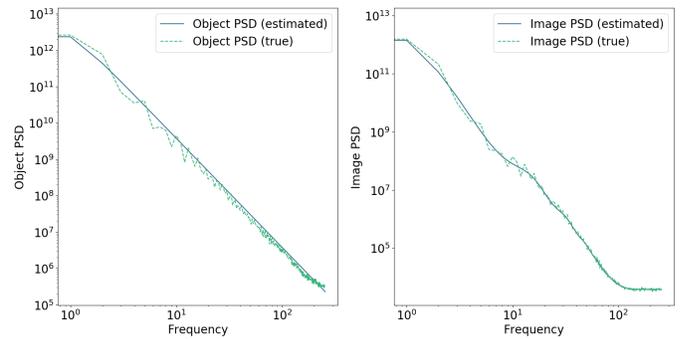


FIGURE 4 – A gauche : DSP objet. A droite : DSP image. Pour chacune, DSP empirique moyennée azimutalement en ligne pointillée, modèle en train plein.

Etant donné que l'objet vrai n'est pas une réalisation d'un champ gaussien suivant le modèle de DSP objet, pour regarder la qualité de l'estimation de  $\gamma_o$  et  $k$ , on peut vérifier l'adéquation du modèle et de la DSP objet empirique, moyennée azimutalement. On compare aussi la DSP image empirique et son modèle pour juger de la qualité de l'ajustement. On constate visuellement dans la Fig. 4 que les DSP objet et image estimées

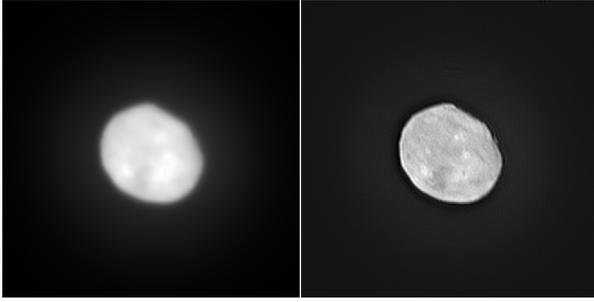


FIGURE 5 – A gauche : Vesta observé par SPHERE/Zimpol sur le Very Large Telescope (VLT) européen au Chili [16]. A droite : objet restauré (filtrage de Wiener).

sont en adéquation avec les DSP empiriques.

La Fig. 3 montre l’image de la Fig. 1 restaurée avec les paramètres estimés. On reconnaît des détails de la surface de Vesta (de la vue synthétique) qui n’étaient pas visibles sur l’image.

Enfin, on applique notre méthode à une image expérimentale de Vesta [16], en fixant  $p = 3$ , valeur adoptée dans [5], et on lance l’échantillonneur de Gibbs pour 100 000 itérations. Fig. 5, on retrouve sur l’objet restauré des détails de l’astéroïde présents sur la vue synthétique de la Fig. 1 qu’on ne voit pas sur les données. Pour les paramètres de PSF estimés, la moyenne et l’écart-type obtenus sont :  $r_0 = 0.26(\pm 0.04)$  m and  $v_\phi = 2.62(\pm 0.06)$  rad<sup>2</sup>. Ces valeurs sont proches des valeurs obtenues avec AMIRAL dans les mêmes conditions, soit  $r_0 = 0.32$  m et  $v_\phi = 2.78$  rad<sup>2</sup> [5].

## 4 Conclusion

Nous avons développé une extension de la méthode marginale de déconvolution aveugle appliquée à des images astronomiques. En plus de l’estimation des paramètres de PSF et des hyperparamètres combinée à la restauration d’image, nous avons désormais une loi *a posteriori* étendue et pouvons l’approcher, ce qui nous permet d’estimer des barres d’erreurs sur nos paramètres. Cette nouvelle méthode a été validée sur une image d’astéroïde simulée, donnant des résultats satisfaisants pour l’estimation des hyperparamètres et des paramètres de PSF. Cette méthode a aussi été appliquée à une image expérimentale de Vesta acquise sur le VLT [16].

Dans cette étude, le paramètre  $p$  est fixé à une valeur « optimale », discutée dans [5]. Sa valeur impacte l’estimation des autres paramètres. Ceci explique en partie l’erreur sur les paramètres de PSF, comme cela a pu être vérifié dans [17]. Dans la suite, nous prévoyons d’essayer d’inclure l’estimation de  $p$ .

Enfin, un travail futur sera consacré à l’accélération de la convergence. Une possibilité est d’utiliser un algorithme de Metropolis-Hastings pour échantillonner la loi *a posteriori* jointe. Cela permettrait d’utiliser des méthodes de gradient comme les méthodes *Metropolis-adjusted Langevin algorithm* [15, 18].

## Remerciements

Cette étude a été partiellement financée par l’ONERA dans le cadre du projet interne ONERA SUSAs.

## Références

- [1] J. Idier, editor. *Bayesian Approach to Inverse Problems*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc, April 2008.
- [2] L. M. Mugnier, T. Fusco, and J.-M. Conan. MISTRAL : a myopic edge-preserving image restoration method, with application to astronomical adaptive-optics-corrected long-exposure images. *JOSA*, 21 :1841 – 1854, October 2004.
- [3] L. Blanco and L. M. Mugnier. Marginal blind deconvolution of adaptive optics retinal images. *Optics Express*, 19 :23227 – 23239, Nov. 2011.
- [4] A. Levin, Y. Weiss, F. Durand, and W. T. Freeman. Understanding and evaluating blind deconvolution algorithms. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 1964–1971, 2009.
- [5] R. J.-L. Fétick, L. M. Mugnier, T. Fusco, and B. Neichel. Blind deconvolution in astronomy with adaptive optics : the parametric marginal approach. *MNRAS*, 496 :4209 – 4220, August 2020.
- [6] F. Orieux, J.-F. Giovannelli, T. Rodet, and A. Abergel. Estimating hyperparameters and instrument parameters in regularized inversion. Illustration for Herschel/SPIRE map making. *A&A*, 549 :A83, January 2013.
- [7] E. Villeneuve and H. Carfantan. Nonlinear deconvolution of hyperspectral data with MCMC for studying the kinematics of galaxies. *IEEE Transactions on Image Processing*, 23(10) :4322–4335, 2014.
- [8] F. Orieux, J.-F. Giovannelli, and T. Rodet. Bayesian estimation of regularization and point spread function parameters for Wiener-Hunt deconvolution. *JOSA*, 27 :1593 – 1607, July 2010.
- [9] G. Demoment. Image reconstruction and restoration : overview of common estimation structures and problems. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(12) :2024–2036, 1989.
- [10] L. Jorda *et al.* OASIS : a simulator to prepare and interpret remote imaging of solar system bodies. In *Computational Imaging VIII*, volume 7533, page 753311. SPIE, Jan. 2010.
- [11] R. J.-L. Fétick *et al.* Physics-based model of the adaptive-optics-corrected point spread function. *A&A*, 628 :A99, August 2019.
- [12] C. Petit *et al.* LEO satellite imaging with adaptive optics and marginalized blind deconvolution. In *21st AMOS Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference*, United States, Sep. 2020.
- [13] Sathish Ramani *et al.* Nonideal sampling and regularization theory. *IEEE Trans. Signal Process.*, 56(3) :1055–1070, 2008.
- [14] R. E. Kass and L. Wasserman. The selection of prior distributions by formal rules. *Journal of the American Statistical Association*, 91 :1343–1370, September 1996.
- [15] C. P. Robert and G. Casella. *Monte Carlo statistical methods*, volume 2. Springer, 2004.
- [16] R. J.-L. Fétick *et al.* (PI : P. Vernazza). Closing the gap between Earth-based and interplanetary mission observations : Vesta seen by VLT/SPHERE. *A&A*, 623 :A6, March 2019.
- [17] A. Yan, L. M. Mugnier, J.-F. Giovannelli, R. J.-L. Fétick, and C. Petit. Extending marginalized blind deconvolution of adaptive optics corrected images with mcmc methods. In *Proceedings of the ICIP 2022 Conference*. IEEE ICIP, 2022 (submitted).
- [18] C. Vacar, J.-F. Giovannelli, and Y. Berthoumieu. Langevin and Hessian with Fisher approximation stochastic sampling for parameter estimation of structured covariance. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 3964–3967, May 2011.