

L'acoustique des faisceaux bornés

Acoustics of bounded beams



Herbert ÜBERALL

Université Paris-VII, GPS, Tour 23, 2, place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05 et Department of Physics, Catholic University of America, WASHINGTON DC 20064, USA

Professeur de Physique, Catholic University of America, Washington DC 20064, USA (depuis 1964). Domaine de recherche : Physique théorique (acoustique, ultrasons, ondes élastiques et électromagnétiques, physique nucléaire).

Acoustique : développement de la théorie des ondes circonférentielles dans la diffusion acoustique. Développement original de la théorie de la diffusion résonnante acoustique. Focalisation du son se propageant dans l'océan.

Ondes élastiques : premier développement de la théorie de la diffusion résonnante par des cavités et inclusions dans la matière solide.

Ondes électromagnétiques : établissement du rapport entre la théorie de la diffusion résonnante et la méthode du développement en singularités (SEM). Théorie de la propagation des ondes radio dans le chenal terre-ionosphère.

Théorie nucléaire : développement de la théorie fondamentale du rayonnement du freinage cohérent (éditeur d'un livre récent). Développement d'un modèle nucléaire de vibrations collectives multipolaires, et applications à la diffusion des électrons (auteur de deux livres). Réactions photopioniques. Modèle collectif de la diffusion ion-ion. Réactions de neutrinos (éditeur d'un livre).

RÉSUMÉ

On obtient l'expression du faisceau acoustique borné le plus général, c'est-à-dire celle d'un faisceau fini dans deux dimensions, émergeant d'une ouverture collimatrice de forme arbitraire, et possédant un profil arbitraire d'amplitude. On étudie la divergence géométrique d'un tel faisceau pour deux cas de profil d'amplitude : un profil gaussien et un profil plan-rectangulaire. Dans chaque cas, on obtient la divergence géométrique comme fonction du rayon correspondant à la dimension de l'ouverture collimatrice et de trois paramètres différents : longueur d'onde, distance axiale du plan de l'ouverture, et distance radiale de l'axe du faisceau. Comme application de cette théorie générale, on obtient l'amplitude de diffusion d'un faisceau borné par une sphère rigide d'une façon *exacte* pour les deux profils mentionnés du faisceau; et on fait une comparaison entre les résultats concernant la section efficace, et ceux obtenus par la méthode de Kirchhoff. Mention est faite d'autres représentations d'un faisceau borné rencontrées dans la littérature.

MOTS CLÉS

Faisceau acoustique borné, profil du faisceau (arbitraire, gaussien, plan), ouverture collimatrice, divergence géométrique, diffusion par une sphère.

SUMMARY

We derive the expression for the most general bounded acoustic beam, i. e., for a beam finite in two dimensions, emerging from an arbitrarily shaped collimating aperture at an arbitrary angle and with an arbitrary amplitude profile. We investigate the spreading of such a beam for two amplitude profiles: a Gaussian profile and a flat-topped square profile. In both cases the spreading is determined as a function of the ratios between the collimating aperture sizes and three parameters: wavelength, axial distance from the aperture plane, and radial distance from the beam axis. As a specific application of this general theory, we evaluate the scattering of a finite beam from a rigid sphere in an exact fashion for the two mentioned amplitude profiles of the finite beam, and compare results for the bistatic cross sections to those obtained using the Kirchhoff approximation. We also mention other representations for finite beams encountered in the literature.

KEY WORDS

Finite acoustic beam, beam profile (arbitrary, gaussian, flat), collimating aperture, geometrical spreading, scattering from sphere.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction
 2. Faisceaux bornés dans deux dimensions
 3. Divergence géométrique du faisceau
 4. Application : diffusion d'un faisceau par une sphère
 5. Conclusion
- Bibliographie

1. Introduction

Des faisceaux bornés ont été étudiés théoriquement et expérimentalement. Schoch [1,2] a étudié des effets de déplacement apparents d'un faisceau borné réfléchi par un solide; d'autres études sur ce sujet ont été faites par Mayer *et al.* [3,4] et Breazeale *et al.* [5,6]. Les expériences de Neubauer [7], et les théories de Tamir et Bertoni [8,9] ont clarifié le rôle joué par l'onde de Rayleigh dans ces phénomènes. Plus récemment, une autre théorie a été faite par Claeys et Leroy [10] concernant l'interaction d'un faisceau borné avec la surface plane d'un solide; la réflexion d'un faisceau borné par une surface rugueuse (périodique) a été étudiée également [11].

Dans tous ces travaux, on a considéré des faisceaux acoustiques bornés dans une dimension seulement, ce qui était suffisant pour la description théorique des expériences mentionnées. Pourtant, l'extension de la théorie au cas d'un faisceau borné dans deux dimensions ne paraît pas très difficile; les descriptions de tels faisceaux ont été données par Gaunaud et Überall [12] et, indépendamment, par Alais et Hennion [13]. Toutes les théories représentent les faisceaux bornés par une superposition continue d'ondes planes, dans le sens de Fourier, se propageant dans des directions diverses. La seule exception est faite par Claeys et Leroy [10] qui représentent le faisceau borné (à une dimension) par une superposition discrète d'ondes planes inhomogènes [14, 15], se propageant dans la même direction. Cette représentation a l'avantage d'une description analytique du faisceau réfléchi, d'une façon analogue à la méthode de Prony [16], tandis que la méthode de Fourier nous fournit des expressions intégrales.

Dans ce qui suit, on développe la théorie d'un faisceau acoustique borné dans deux dimensions basée sur la méthode de Fourier, et on obtient la divergence géométrique d'un faisceau sortant d'une ouverture collimatrice. Comme application de notre représenta-

tion du faisceau borné, on considère la diffusion d'un tel faisceau par une sphère; les résultats exacts obtenus ainsi pour la section efficace de diffusion peuvent être comparés avec ceux de la diffusion d'une onde plane par la sphère, et ceux de la diffusion du faisceau analysée par la méthode de Kirchhoff.

2. Faisceaux bornés dans deux dimensions

Un faisceau infini :

$$(2.1) \quad p_{\infty}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}},$$

incident de $-\infty$ sur un plan $z = -L$, a pour expression :

$$(2.2) \quad p_{\infty}(\mathbf{r})|_{z=-L} = P_0(\boldsymbol{\rho}) e^{i\boldsymbol{\kappa}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{-ik_0 z L},$$

dans une ouverture de ce plan, où :

$$(2.3a) \quad \boldsymbol{\rho} = (x, y),$$

$$\mathbf{r} = (\boldsymbol{\rho}, z), \quad \mathbf{r}_L = (\boldsymbol{\rho}, -L),$$

$$(2.3b) \quad \mathbf{k}_0 = (\boldsymbol{\kappa}_0, k_{0z}).$$

On a introduit ici le profil $P_0(\boldsymbol{\rho})$ de l'amplitude du faisceau à travers l'ouverture.

Le faisceau le plus général peut maintenant être représenté par l'expression de Fourier :

$$(2.4) \quad p(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \Psi(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^2 \boldsymbol{\kappa},$$

avec la relation de dispersion :

$$(2.5a) \quad \begin{cases} k_z = \pm(k^2 - \boldsymbol{\kappa}^2)^{1/2}, \\ z' \equiv z + L \geq 0 (\boldsymbol{\kappa}^2 < k^2), \end{cases}$$

$$(2.5b) \quad \begin{cases} k_z = \pm i(\boldsymbol{\kappa}^2 - k^2)^{1/2}, \\ z' \equiv z + L \geq 0 (\boldsymbol{\kappa}^2 > k^2), \end{cases}$$

les signes étant choisis pour assurer la convergence quand $|z'| \rightarrow \infty$.

L'expression (2.4) est une solution de l'équation de Helmholtz, se réduisant correctement à l'onde dans l'ouverture, équation (2.2), si $\Psi(\boldsymbol{\kappa})$ est la transformée de Fourier de cette onde :

$$(2.6) \quad \Psi(\boldsymbol{\kappa}) = \int P_0(\boldsymbol{\rho}) e^{i[(\boldsymbol{\kappa}_0 - \boldsymbol{\kappa}) \cdot \boldsymbol{\rho} - (k_{0z} - k_z)L]} d^2 \boldsymbol{\rho}.$$

Les équations (2.4)-(2.6) précisent entièrement le faisceau borné dans deux dimensions, si on considère l'argument de Claeys et Leroy [10] que pour des faisceaux larges, $\partial P_0 / \partial z$ peut être présumé comme proportionnelle à P_0 . Dans tous les travaux antérieurs, les expressions de Fourier comme (2.4), ou d'une super-

FAISCEAU BORNÉ, RÉFLEXION ET RÉFRACTION

position analogue d'ondes inhomogènes [10] étaient considérées dans une dimension seulement, et représentaient donc un faisceau borné dans une dimension, c'est-à-dire un faisceau en forme d'un ruban plan.

Pour un faisceau à symétrie de révolution, $P_0 = P_0(\rho)$, se propageant parallèlement à l'axe z ($\alpha_0 = 0$), l'équation (2.4) se simplifie en :

$$(2.7) \quad p(\mathbf{r}) = e^{-ikL} \int_0^\infty P_0(\rho') \rho' d\rho' \times \int_0^\infty J_0(\kappa\rho) J_0(\kappa\rho') e^{ik_z z'} \kappa d\kappa;$$

on peut alors considérer les cas spéciaux de :

$$(2.8a) \quad P_0(\rho) = H(R_0 - \rho),$$

$$(2.8b) \quad p(\mathbf{r}) = R_0 e^{-ikL} \int_0^\infty J_1(\kappa R_0) J_0(\kappa\rho) e^{ik_z z'} d\kappa,$$

d'un faisceau de profil rectangulaire de rayon R_0 , H étant la fonction de Heaviside, ou :

$$(2.9a) \quad P_0(\rho) = e^{-\rho^2/2\sigma^2},$$

$$(2.9b) \quad p(\mathbf{r}) = \sigma^2 e^{-ikL} \int_0^\infty e^{-\kappa^2 \sigma^2/2} J_0(\kappa\rho) e^{ik_z z'} \kappa d\kappa,$$

d'un faisceau de profil Gaussien.

3. Divergence géométrique du faisceau

Se propageant en dehors de l'ouverture, le faisceau diverge à cause de la diffraction. Les intégrales des équations (2.8b) ou (2.9b) peuvent alors être évaluées [12] par la méthode de col, ou par intégration partielle.

La figure 3.1 présente en variables sans dimension, la divergence géométrique d'un faisceau rectangulaire à l'ouverture ($v=0$), à la fréquence $s = kR_0 = 8$. La figure 3.2 donne la divergence géométrique d'un faisceau gaussien à la fréquence $k\sigma = 8$.

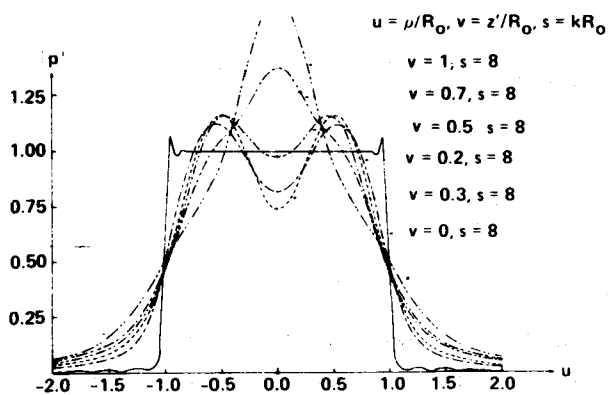


Fig. 3.1. — Étendue diffractive d'un faisceau de profil rectangulaire, avec $s = kR_0 = 8$.

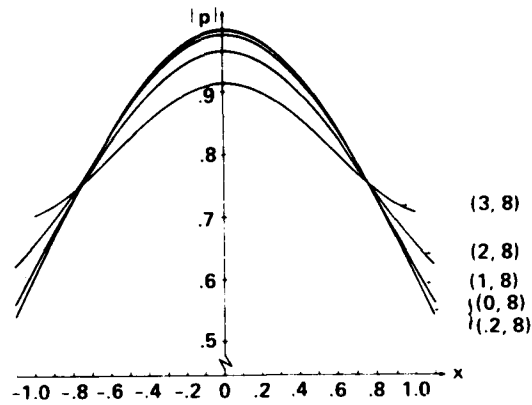


Fig. 3.2. — Étendue diffractive d'un faisceau de profil Gaussien ($x = \rho/\sigma$, $y = z'/\sigma$), avec $w = k\sigma = 8$.

4. Application : diffusion d'un faisceau par une sphère

Le champ total d'une onde plane en présence d'une sphère de rayon a est la somme de l'onde incidente p_{inc} et de l'onde diffusée p_{sc} :

$$(4.1a) \quad p(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l [j_l(kr) + C_l(ka) h_l^{(1)}(kr)] Y_{lm}^*(\hat{k}) Y_{lm}(\hat{r}),$$

l'amplitude diffusée $C_l(ka)$ étant, dans le cas d'une sphère rigide :

$$(4.1b) \quad C_l(ka) = -j_l'(ka)/h_l^{(1)'}(ka).$$

La section efficace bistatique (ou distribution angulaire) de diffusion est donnée par :

$$(4.2) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \left| \frac{p_{sc}}{p_{inc}} \right|^2,$$

qui devient en champ lointain :

$$(4.3) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{k} \right)^2 \left| \sum_{l=0}^{\infty} C_l(2l+1) P_l(\cos\theta) \right|^2.$$

Un faisceau borné a pour champ diffusé :

$$(4.4) \quad p_{sc}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l C_l h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\hat{r}) \times \int \Psi(\boldsymbol{\alpha}) Y_{lm}^*(\hat{k}) d^2\boldsymbol{\alpha},$$

ce qui donne en champ lointain dans le cas d'un faisceau circulaire :

$$(4.5a) \quad \frac{4}{a^2} \frac{d\sigma}{d\theta} = \left| \frac{2}{ka} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l(ka) I_l P_l(\cos\theta) \right|^2,$$

L'ACOUSTIQUE DES FAISCEUX BORNÉS

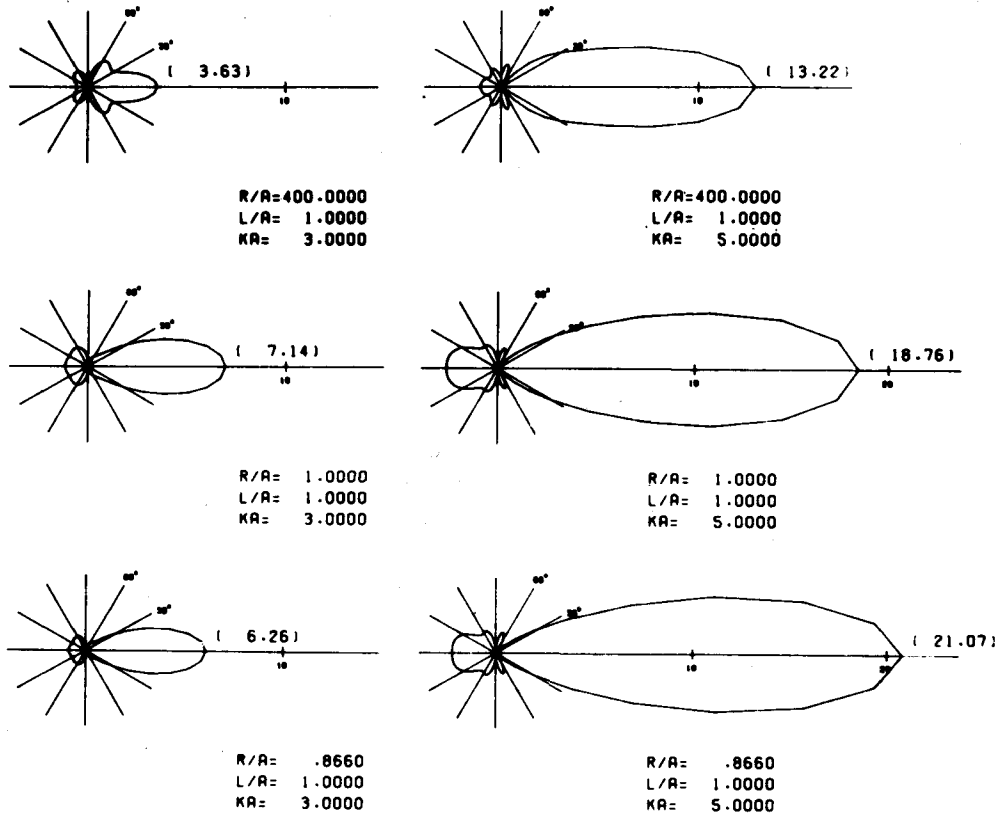


Fig. 4.1. — Distributions angulaires de la diffusion d'un faisceau rond, de profil rectangulaire, sur une sphère rigide.

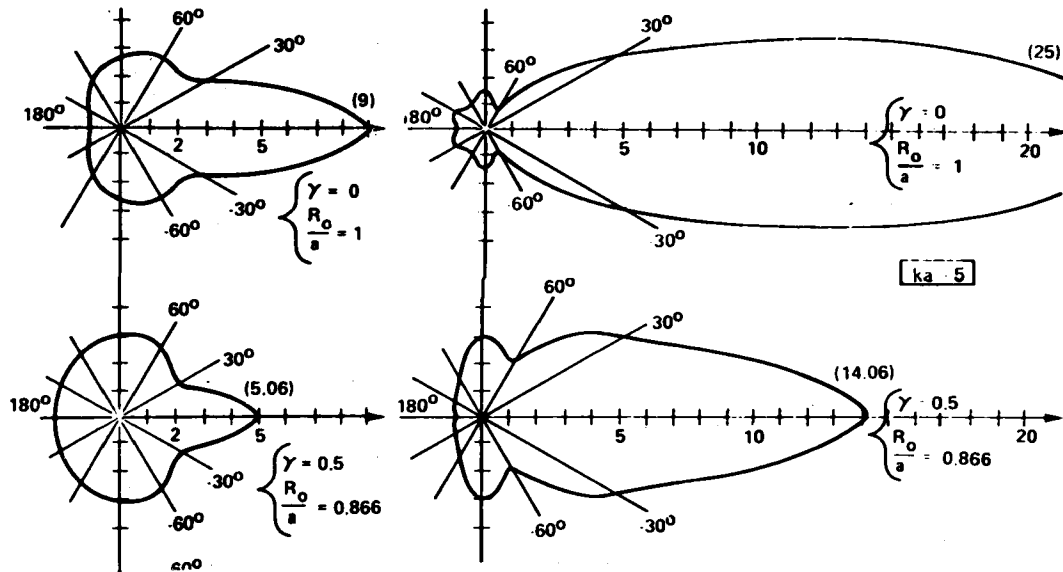


Fig. 4.2. — Résultats comparables à ceux de la figure 3, obtenus par l'approximation de Kirchhoff.

où :

$$(4.5b) \quad I_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \Psi(\kappa) P_l(\cos \theta_k) \kappa d\kappa,$$

$\kappa = k \sin \theta_k$. Pour un faisceau de profil rectangulaire :

$$(4.6a) \quad I_l = 1 - f P_l(f) e^{i\kappa L (1-f)/f},$$

$$(4.6b) \quad f = \{1 + (R_0/L)^2\}^{-1/2},$$

en utilisant la méthode du col.

La figure 4.1 présente, pour une sphère rigide, $d\sigma/d\theta$ dans le cas du faisceau rectangulaire, pour $L=a$ et $ka=3$ (à gauche) ou $ka=5$ (à droite), pour le rayon

FAISCEAU BORNÉ, RÉFLEXION ET RÉFRACTION

du faisceau $r=a$ où $r=0.866a$ (et également $r=400a$, en haut). Pour comparaison, la figure 4.2 montre les mêmes résultats obtenus par la méthode de Kirchoff [12, 17], sauf pour le cas $r>a$ qui coïncide avec le cas $r=a$.

5. Conclusion

Les calculs précédents montrent que :

- (a) un faisceau borné dans deux dimensions peut être représenté par une intégrale bidimensionnelle de Fourier qui
- (b) permet un calcul de la divergence géométrique du faisceau émergent d'une ouverture;
- (c) rend possible l'évaluation de la diffusion du faisceau borné par une cible;
- (d) admet l'analyse de l'interaction du faisceau borné en deux dimensions avec des structures telles que le dioptre ou la plaque, plan ou courbé, ainsi que le calcul, par exemple, d'un faisceau dans un milieu inhomogène. Une partie des résultats rapportés est basée sur des travaux assistés financièrement par l'ONR et le NSWC.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. SCHOCH, Der Schalldurchgang durch Platten, *Acustica*, 2, 1952, p. 1-17; Seitliche Versetzung eines total-reflektierten Strahls bei Ultraschallwellen, *Acustica*, 2, 1952, p. 18-19.
- [2] Voir également L. M. BREKHOVSKIKH, *Waves in Layered Media*, Academic Press, New York, 1960.
- [3] O. I. DIACHOK et W. G. MAYER, Conical reflection of ultrasound from a liquid-solid interface, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 47, 1970, p. 155-157.
- [4] L. E. PITTS, T. J. PLONA et W. G. MAYER, Theory of nonspecular reflection effects for an ultrasonic beam incident on a solid plate in a liquid, *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, SU-24, 1977, p. 101-109.
- [5] M. A. BREAZEALE, L. ADLER et L. FLAX, Reflection of a Gaussian ultrasonic beam from a liquid-solid interface, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 56, 1974, p. 866-872.
- [6] M. A. BREAZEALE, L. ADLER et J. H. SMITH, Energy redistribution of a Gaussian ultrasonic beam reflected from a liquid-solid interface, *Sov. Phys. Acoust.*, 21, 1975, p. 1-6.
- [7] W. G. NEUBAUER, Ultrasonic reflection of a bounded beam at Rayleigh and critical angles for a plane liquid-solid interface, *J. Appl. Phys.*, 44, 1973, p. 48-55.
- [8] T. TAMIR et H. L. BERTONI, Lateral displacement of optical beams at multilayered and periodic structures, *J. Opt. Soc. Amer.*, 61, 1971, p. 1397-1413.
- [9] H. L. BERTONI et T. TAMIR, Unified theory of Rayleigh angle phenomena for acoustic beams at liquid-solid interfaces, *Appl. Phys.*, 2, 1973, p. 157-172.
- [10] J. M. CLAEYS et O. LEROY, Reflection and transmission of bounded sound beams on half-spaces and through plates, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 72, 1982, p. 585-590.
- [11] R. ROBERTS, J. D. ACHENBACH, R. KO, L. ADLER, A. JUNGMAN et G. QUENTIN, Reflection of a beam of elastic waves by periodic roughness, *Wave Motion* (à paraître).
- [12] G. C. GAUNAURD et H. ÜBERALL, Acoustics of finite beams, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 63, 1978, p. 5-16.
- [13] P. ALAIS et P. Y. HENNION, Étude par une méthode de Fourier de l'interaction non linéaire de deux rayonnements acoustiques dans un fluide absorbant. Cas particulier de l'émission paramétrique, *Acustica*, 43, 1979, p. 1-11.
- [14] B. POIRÉE, Vitesse de propagation de l'énergie de l'onde plane évanescence acoustique, *Revue du CETHEDC*, 79, 1984, p. 103-112.
- [15] B. POIRÉE, *L'onde plane hétérogène dans un fluide thermovisqueux*, ce colloque.
- [16] R. PRONY, Essai expérimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alcool, à différentes températures, *J. de l'École Polytech. (Paris)*, 1, n° 2, 1795, p. 24-76.
- [17] G. C. GAUNAURD, Monostatic and bistatic cross sections of a large (capped) sphere partially insonified at a circular spot, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 61, 1977, p. 1121-1132.