L'onde plane acoustique hétérogène dans un fluide thermovisqueux

The heterogeneous plane acoustic wave in a thermoviscous fluid

Bernard POIRÉE

Université Paris-VII, GPS, Tour 23, 2, place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX et DRET/SDR/G6, 26, boulevard Victor, 75996 PARIS-ARMÉES

Ondes de surface et d'interface.

RÉSUMÉ

Les équations de perturbations linéarisées d'un fluide thermovisqueux possèdent comme solutions trois modes plans hétérogènes indépendants : les modes acoustique, de rotation et d'entropie. Le premier mode est décrit en détail. Des cas particuliers de ce mode sont présentés : l'onde plane évanescente classique dans un fluide parfait, et le mode hétérogène de Alais dans un fluide visqueux quand le vecteur d'atténuation est très petit.

MOTS CLÉS

Ondes hétérogènes, fluide visqueux.

SUMMARY

The linearized equations of perturbation in a thermoviscous fluid have three independent solutions as heterogeneous plane waves: the acoustic wave, the rotational and the entropic one. The first wave is detailed. Particular cases are showned: the evanescent wave in a perfect fluid, and the Alais' heterogeneous mode in a viscous fluid when the attenuation vector is very small.

KEY WORDS

Heterogeneous wave, viscous fluids.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction

L'onde plane harmonique hétérogène est solution des équations de l'acoustique linéaire dans un fluide visqueux classique, conducteur de la chaleur suivant la loi de Fourier (=fluide « thermovisqueux »). Cette onde, bien connue en électromagnétisme et en optique [1, 2], est décrite en détail, et des cas particuliers sont présentés. Une telle onde peut servir à construire des champs acoustiques de grande complexité.

Les calculs sont menés au premier ordre en fonction de l'amplitude (acoustique linéaire) et de la dissipation (fluide faiblement thermovisqueux). Les principaux résultats contenus dans les parties 2 et 3 de ce travail ont déjà été exposés [3].

2. Les équations de l'acoustique linéaire dans un fluide thermovisqueux

2.1. Hypothèses

Le fluide est supposé visqueux classique, conducteur de la chaleur, illimité, homogène, initialement au repos, en l'absence de force extérieure et de source excitatrice. La perturbation acoustique $\mathbf{w}$ est représentée par le multiplet : $\mathbf{w}=\{\xi, \rho, \mathbf{u}, p, s, e, \mathrm{T}\}$, où ξ est le déplacement lagrangien, ρ la masse volumique, $\mathbf{u}$ la vitesse, p la pression, s l'entropie spécifique, e l'énergie interne spécifique et T la température. En l'absence de perturbation, le fluide est caractérisé par le champ $\mathbf{w}_{00}$ vérifiant : $\xi_{00}=\mathbf{0}$, $\mathbf{u}_{00}=\mathbf{0}$, ρ_{00}, p_{00}, s_{00}, e_{00} et T_{00} grandeurs constantes.

2.2. Les équations de l'acoustique linéaire dans un fluide thermovisqueux

Toutes les grandeurs composant le champ acoustique sont définies à partir du seul déplacement acoustique lagrangien ξ qui vérifie [4, 5,6] :

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \partial_{tt}\xi-(c_0^2+b\,\partial_t)\,\Delta\xi=\mathbf{0}, \\ \nabla\wedge\xi=\mathbf{0}, \qquad \nabla.\xi\neq 0, \end{cases}$$

c_0^2 est la grandeur thermodynamique déduite de l'équation d'état $p=\mathscr{P}(\rho, s)$ de la manière suivante :

$$c^2(\rho, s)=\partial\mathscr{P}/\partial\rho\,|_s, \qquad c_0^2=c^2(\rho_{00}, s_{00}),$$

et :

$$b=\rho_{00}^{-1}\left[\frac{4}{3}\mu+\zeta+\kappa(\mathrm{C}_v^{-1}-\mathrm{C}_p^{-1})\right]$$

est le coefficient de dissipation; μ est le coefficient de viscosité de cisaillement, ζ le coefficient de viscosité de dilatation, κ la conductibilité thermique, C_v et C_p les chaleurs spécifiques à volume et pression constants.

Les principales grandeurs du champ acoustique autres que ξ sont :

$$\begin{gathered} \rho=-\rho_{00}\nabla.\xi, \\ p=-\rho_{00}c_0^2\nabla.\xi-\kappa(\mathrm{C}_v^{-1}-\mathrm{C}_p^{-1})\,\partial_t\nabla.\xi, \\ \mathbf{u}=\partial_t\xi, \\ s=-\kappa\mathrm{T}_{00}^{-1}\,\partial\mathrm{T}/\partial\rho\,|_s\,c_0^{-2}\,\partial_t\nabla.\xi. \end{gathered}$$

3. Résolution en ondes planes hétérogènes

Soit $^*a=a'-i\,a''$ une représentation du nombre complexe $^*a$, a' et a'' étant des nombres réels, $a'=\mathrm{Re}\,^*a$, $a''=-\mathrm{Im}\,^*a$; a^* conjugué de $^*a$: $a^*=a'+ia''$. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ dans lequel tout vecteur $\mathbf{v}$ s'écrit $\mathbf{v}=v_x\hat{\mathbf{x}}+v_y\hat{\mathbf{y}}+v_z\hat{\mathbf{z}}$; t est le temps.

Nous cherchons une solution de l'équation (2.1) sous la forme de l'onde plane harmonique hétérogène suivante [1, 2] :

$$(3.1)\qquad \xi=\mathrm{Re}\,[^*\xi_0\exp i(\omega t-{}^*\mathbf{K}.\mathbf{x})]=\mathrm{Re}\,^*\xi,$$

où $^*\xi_0=\xi_0'-i\,\xi_0''$ est l'amplitude complexe; ω la fréquence angulaire réelle; $^*\mathbf{K}$ le vecteur d'onde complexe : $^*\mathbf{K}=\mathbf{K}'-i\,\mathbf{K}''$, $\mathbf{K}'$ est le vecteur d'onde réel et $\mathbf{K}''$ le vecteur d'amortissement; *a priori* $\mathbf{K}'$ et $\mathbf{K}''$ forment entre eux un angle quelconque; ω est donnée, $^*\xi_0$ et $^*\mathbf{K}$ sont à déterminer.

Reportant l'expression (3.1) dans (2.1), nous obtenons :

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \mathscr{K}^2-(1+i\varepsilon)\,{}^*\mathbf{K}.{}^*\mathbf{K}=0, \\ {}^*\mathbf{K}\wedge{}^*\xi_0=\mathbf{0}, \qquad {}^*\mathbf{K}.{}^*\xi_0\neq 0, \end{cases}$$

avec $\mathscr{K}^2=\omega^2/c_0^2$ et $\varepsilon=\omega c_0^{-2}\,b$.

L'équation $^*\mathbf{K} \wedge {}^*\boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{0}$ montre que les vecteurs $\mathbf{K}'$, $\mathbf{K}''$, $\boldsymbol{\xi}_0'$ et $\boldsymbol{\xi}_0''$ sont coplanaires. Le mode acoustique est irrotationnel ou lamellaire, la rotation est nulle.

Supposons $\varepsilon \ll 1$ et effectuons les calculs, au premier ordre en ε, en nous plaçant dans le repère $(0, \hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Z}})$ tel que :

$$(3.3) \qquad {}^*\mathbf{K} = \mathrm{K}_X' \hat{\mathbf{X}} - i(\mathrm{K}_X'' \hat{\mathbf{X}} + \mathrm{K}_Z'' \hat{\mathbf{Z}}).$$

Dans ces conditions, l'équation $(3.2)_1$ devient le système :

$$\begin{cases} \mathrm{K}_X'^2 - \mathrm{K}_X''^2 = \mathscr{K}^2 + \mathrm{K}_Z''^2, \\ \mathrm{K}_X' \mathrm{K}_X'' = \dfrac{1}{2} \varepsilon \mathscr{K}^2, \end{cases}$$

qui permet d'exprimer K_X' et K_X'' en fonction de K_Z'' :

$$(3.4) \quad \begin{cases} \mathrm{K}_X' = (\mathscr{K}^2 + \mathrm{K}_Z''^2)^{1/2}, \\ \mathrm{K}_X'' = \dfrac{1}{2} \varepsilon \mathscr{K}^2 (\mathscr{K}^2 + \mathrm{K}_Z''^2)^{-1/2} = \dfrac{1}{2} \varepsilon \mathscr{K}^2 \mathrm{K}_X'^{-1}. \end{cases}$$

De l'équation $\nabla \wedge {}^*\boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{0}$ et de $(3.2)_1$, nous déduisons l'équation :

$${}^*\boldsymbol{\xi}_0 = \mathscr{K}^{-2} (1 + i\varepsilon)\, {}^*\mathbf{K} . {}^*\boldsymbol{\xi}_0\, {}^*\mathbf{K},$$

qui permet d'exprimer ξ_{0X}'' et ξ_{0Z}'' en fonction de ξ_{0X}' et ξ_{0Z}' :

$$\begin{cases} \xi_{0X}'' = \mathrm{K}_X'' \mathrm{K}_X'^{-1} \xi_{0X}' - \mathrm{K}_X' \mathrm{K}_Z''^{-1} \xi_{0Z}', \\ \xi_{0Z}'' = \mathrm{K}_Z'' \mathrm{K}'^{-1} \xi_{0X}' - \mathrm{K}_X'' \mathrm{K}_X'^{-1} \xi_{0X}'. \end{cases}$$

Finalement le déplacement $^*\boldsymbol{\xi}$ de l'onde acoustique hétérogène s'écrit :

$$(3.5) \quad {}^*\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \left(1 - i\dfrac{\varepsilon}{2} \mathscr{K}^2 \mathrm{K}_X'^{-2}\right) \xi_{0X}' + i \mathrm{K}_X' \mathrm{K}_Z''^{-1} \xi_{0Z}' \\ 0 \\ -i \mathrm{K}_Z'' \mathrm{K}_X'^{-1} \xi_{0X}' + \left(1 + i\dfrac{\varepsilon}{2} \mathscr{K}^2 \mathrm{K}_X'^{-2}\right) \xi_{0Z}' \end{pmatrix}$$

$$\times \exp i(\omega t - \mathrm{K}_X' \mathrm{X}) \exp - \left(\frac{\varepsilon}{2} \mathscr{K}^2 \mathrm{K}_X'^{-1} \mathrm{X} + \mathrm{K}_Z'' \mathrm{Z} \right),$$

la quantité K_X' est donnée par $(3.4)_1$ et les grandeurs K_Z'', ξ_{0X}, ξ_{0Z}', $\hat{\mathbf{X}}$ et $\hat{\mathbf{Z}}$ seront déterminées par les conditions aux limites.

4. Cas particuliers

4.1. Onde plane homogène amortie

$$\mathrm{K}_Z'' = 0, \qquad \mathrm{K}_X' = \mathscr{K}, \quad \mathrm{K}_X'' = \frac{\varepsilon}{2} \mathscr{K}.$$

4.2. Onde plane évavescente dans un fluide parfait : $\varepsilon = 0$

$$\mathrm{K}_Z'' \text{ quelconque}, \quad \mathrm{K}_X' = (\mathscr{K}^2 + \mathrm{K}_Z''^2)^{1/2}, \quad \mathrm{K}_X'' = 0.$$

C'est le mode utilisé par Claeys et Leroy [7] pour représenter un faisceau acoustique borné; il est décrit en détail dans la référence [8].

4.3. Onde plane amortie faiblement évanescente : $\mathrm{K}_Z'' \mathscr{K}^{-1}$ très petit

$$\mathrm{K}_Z'' \mathscr{K}^{-1} \ll 1, \quad \mathrm{K}_X' = \mathscr{K}, \quad \mathrm{K}_X'' = \frac{\varepsilon}{2} \mathscr{K}$$

(au premier ordre en $\mathrm{K}_Z'' \mathscr{K}^{-1}$). C'est le mode utilisé par Alais et Hennion [9] pour représenter le rayonnement d'un piston; il est décrit dans les références [10] et [11].

5. Conclusion

L'onde plane hétérogène que nous venons de décrire se rencontre lors de la réfraction d'une onde plane homogène à l'interface fluide parfait-fluide thermovisqueux.

La généralisation de la méthode de Claeys et Leroy [7] aux ondes hétérogènes devrait permettre la construction d'un faisceau acoustique étroit dans un fluide dissipatif. La combinaison de la méthode de Claeys et Leroy et de la méthode d'interaction des modes de Alais et Hennion [9], après généralisation aux ondes hétérogènes, devrait permettre l'étude du rayonnement d'une antenne paramétrique. Ces généralisations devraient faciliter l'étude de la réflexion et de la réfraction d'un faisceau borné à l'interface entre deux fluides thermovisqueux en acoustique linéaire et en acoustique faiblement non-linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Perrot et J. Oualid, *Propagation des ondes électromagnétiques*, édité par le CRDP, 55, rue Sylvabelle, 75006 Marseille, 1970.

[2] M. R. Léfévère et M. Montel, Influence de l'absorption sur les propriétés optiques des solides : propagation des ondes électromagnétiques hétérogènes, planes et uniformes, dans les milieux homogènes et isotropes, *Optica Acta*, 20, (2), 1973, p. 97-128.

[3] B. Poirée, Propagation du son dans un fluide visqueux. Équation de dispersion. Résolution. Énergie, *Journée Propagation Acoustique Sous-Marine*, 11 avril 1973, à la DRME (non publié).

[4] Z. A. Gol'dberg, Second approximation acoustic equations and the propagation of plane waves of finite amplitude, *Sov. Phys. Acoust.*, 2, n° 3, 1956, p. 346-350.

[5] Z. A. Gol'berg, Certain second-order quantities in acoustics. *Soviet. Phys. Acoust.*, 3, n° 2, 1957, p. 157-162.

[6] D. Odero et B. Poirée, L'acoustique non-linéaire dans les fluides, *Revue du CETHEDEC*, n° 46, 1976, p. 1-97.

[7] J. M. Claeys et O. Leroy, Reflection and transmission of bounded sound beams on half-spaces and through plates, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 72, (2), 1982, p. 585-590.

[8] B. Poirée, Vitesse de propagation de l'énergie de l'onde plane évanescente acoustique, *Revue du CETHEDEC*, n° 79, 1984, p. 103-112.

[9] P. Alais et P. Y. Hennion, Étude par une méthode de Fourier de l'interaction non linéaire de deux rayonnements acoustiques dans un fluide absorbant. Cas particulier de l'émission paramétrique, *Acustica*, 43, (1), 1979, p. 1-11.

[10] P. Alais, Effets de l'atténuation sur un rayonnement quelconque dans un milieu propagatif linéaire absorbant, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 282, série A, 1976, p. 547-459.

[11] Ph. Gatignol, Quelques remarques sur l'utilisation de divers modes plans dans les milieux absorbants non linéaires, *Revue du CETHEDEC*, NS 80-1, 1980, p. 31-37.