

# Un panorama

## de la transformation de Hough

A review on Hough transform



Henri MAITRE

École Nationale Supérieure des Télécommunications, Laboratoire Image,  
Département Images, Sons et Vidéo, 46, rue Barrault, 75634 PARIS CEDEX  
13

Professeur à l'ENST, responsable du Laboratoire Image. Anime une équipe de recherche en traitement des images et traitement des objets. S'intéresse spécialement à l'interprétation globale des images, aux problèmes de mise en correspondance et à la représentation des connaissances dans les images.

### RÉSUMÉ

Nous présentons une synthèse des connaissances actuelles sur la transformation de Hough. Nous proposons tout d'abord une définition nouvelle et unificatrice, qui permet d'englober les multiples variantes qui en sont déduites. Nous soulignons ensuite les liens de la TH avec le filtrage adapté d'une part, avec la transformée de Radon d'autre part, puis, nous nous penchons sur les méthodes d'évaluation de ses performances. Nous nous intéressons alors aux problèmes liés à la quantification de l'espace des paramètres, et terminons enfin par une revue des applications qui en ont été faites en robotique, en traitement des images, en reconnaissance des formes et en analyse de scènes.

### MOTS CLÉS

Transformation de Hough, reconnaissance des formes, traitement des images, filtrage adapté, transformée de Radon, quantification dynamique, quantification vectorielle.

### SUMMARY

*A review of actual knowledges on Hough transform is presented. At first, a general definition is given to enclose all existing variations of the original method. Then, the relationships between template filtering and Radon Transform are stressed, and we describe the performance evaluation methods. Problems of parameter space quantization are treated, and we finish with a review of the main applications of Hough transform in the fields of robotics, picture processing, pattern recognition and scene analysis.*

### KEY WORDS

*Hough transform, pattern recognition, image processing, template filtering, Radon transform, dynamic quantization, vectorial quantization.*

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction
2. Théorie
3. Variantes de la TH
4. La TH dans le champ du traitement du signal
5. La quantification de l'espace
6. Prédiction des performances de la TH
7. Les applications
8. Conclusion
Bibliographie

## 1. Introduction

Cette transformation a été proposée par P.V.C. Hough dans un brevet déposé en 1960 [32] afin de détecter des alignements à l'aide d'un oscilloscope et de deux caméras vidéo. Inaperçue pendant plusieurs années, elle a reçu quelque publicité après les travaux de Rosenfeld [56] et Duda et Hart [22] au début des années 70, et fait l'objet depuis cette date d'une attention soutenue de la communauté scientifique. Depuis les années 80 elle a quitté les laboratoires de recherche et trouvé des champs d'applications dans de nombreux domaines industriels. On trouvera deux études de synthèse des travaux sur la transformée de Hough dans [3] et [33].

Nous allons donner tout d'abord une définition générale de la transformation de Hough (chap. 2.1) que nous illustrerons sur quelques exemples (chap. 2.2), puis nous présenterons diverses modifications qui en ont été faites (chap. 3), nous signalerons ensuite les connexions existant avec d'autres domaines (chap. 4), puis nous aborderons la réduction de l'encombrement mémoire (chap. 5), la prédiction des performances (chap. 6), et nous terminerons par une analyse des applications (chap. 7).

## 2. Théorie

Très peu d'attention a été portée dans la littérature à une définition convenable de la transformée de Hough (TH). Il s'ensuit une confusion fréquente sur le type

(<sup>1</sup>) L'expression TH de 1 à  $m$  et l'expression TH de  $m$  à 1 viennent de l'anglo-saxon « one to many » et « many to one » les valeurs données à  $m$  n'ont donc pas de relation entre ce paragraphe et le précédent.

d'opération effectivement réalisé (par exemple entre [16] et [1]), et une prolifération de termes imprécis pour qualifier des modifications mineures (TH étendue, ou généralisée, ou modifiée, etc.). On regroupe usuellement sous le nom de TH des transformations qui permettent de détecter dans des images la présence de courbes paramétriques appartenant à une famille connue, à partir d'un ensemble de points sélectionnés, appelés points caractéristiques. La TH utilise essentiellement l'information spatiale des points caractéristiques (leur position dans l'image), mais, parfois, tient compte également de l'information contenue dans le signal d'image lui-même (la valeur de la luminance en un point donné). Nous supposerons que ce signal est une fonction scalaire, mais rien ne s'oppose à ce qu'il soit vectoriel; c'est le cas des images en couleur, ou des images multispectrales. Enfin, bien que la plupart des images soient bidimensionnelles, nous pourrions appliquer la TH à des images à trois dimensions (en imagerie médicale par exemple, ou sur des séquences d'images animées), voir à quatre dimensions. Nous désignerons par  $n$  la dimension de l'espace de définition de l'image.

## 2.1. DÉFINITION

Soit  $\mathbb{R}^n$  l'espace image, et  $\mathcal{E}$  un ensemble de  $N$  points sélectionnés par un prétraitement :  $\mathcal{E} = \{M_i, i=1 \dots N\} \in \mathbb{R}^n$ . Un point  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  est repéré par ses coordonnées  $x$ .

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  un espace de paramètres et  $\mathcal{F}$  une famille de courbes dans  $\mathbb{R}^n$  paramétrée par  $a$  :

$$\mathcal{F} = \{ \{x : f(x, a) = 0, x \in \mathbb{R}^n\}, a \in \Omega \}.$$

On appelle transformation de Hough associée à la famille  $\mathcal{F}$  une transformation qui fait correspondre à l'ensemble  $\mathcal{E}$  une fonction  $g$  définie sur  $\Omega$ .

Il existe donc de nombreuses transformations de Hough, les deux principales sont les suivantes :

2.1.1. Transformation de  $m$  à 1

Soit  $m$  le nombre minimal de points de  $\mathbb{R}^n$  définissant une courbe de  $\mathcal{F}$ . Soit  $\mathcal{E}^{(m)}$  l'ensemble de tous les  $m$ -uplets issus de  $\mathcal{E}$  :

$$\mathcal{E}^{(m)} = \{ M_i^{(m)} = \{ M_{i_1}, M_{i_2}, \dots, M_{i_m} : M_{i_k} \in \mathcal{E} \}, \}$$

avec :

$$\text{Card}(\mathcal{E}^{(m)}) = C_N^m.$$

A tout  $m$ -uplet  $M_i^{(m)}$  de  $\mathcal{E}^{(m)}$  est associée une courbe de  $\mathcal{F}$  de paramètre  $a_i$ . Soit  $C(a)$  la fonction caractéristique de  $\mathbb{R}^p$ . La transformation de Hough de  $m$  à 1 est définie par :

$$(1) \quad g(a) = \sum_{M_i^{(m)} \in \mathcal{E}^{(m)}} c(a - a_i).$$

2.1.2. Transformation de 1 à  $m$  (<sup>1</sup>)

Par tout point  $M_i$  de  $\mathbb{R}^n$  passent  $m$  courbes de  $\mathcal{F}$ , soit  $A_i$  l'ensemble des valeurs de  $a$  telles que  $f(x_i, a) = 0$  :

$A_i = \{ \mathbf{a}_k = f(x_i, \mathbf{a}_k) = 0 \}$ . La transformation de Hough de 1 à  $m$  est définie par :

$$(2) \quad g(\mathbf{a}) = \sum_{M_i \in \mathcal{S}} \sum_{\mathbf{a}_k \in A_i} c(\mathbf{a} - \mathbf{a}_k).$$

Nous verrons que la TH de 1 à  $m$  conduit, en pratique, à des calculs moins nombreux que la TH de  $m$  à 1, car elle évite une recherche combinatoire parmi les points. D'autre part, elle se prête bien à des implantations rapides, par sa structure parallélisable. Pour ces raisons c'est actuellement la TH la plus utilisée, et on lui réserve souvent l'usage du nom générique TH.

## 2.2. MODE D'EMPLOI

S'il existe dans l'image quelques représentants de  $\mathcal{F}$ , et si le prétraitement a sélectionné des points  $M$  judicieux, il est probable que la fonction  $g$  possédera pour quelques valeurs de  $\mathbf{a}$ , soit des maximums marqués, soit une accumulation de valeurs. La tâche de reconnaissance de formes dans  $\mathbb{R}^m$  est ainsi transformée en une tâche de recherche de maximums ou de recherche de nuages de valeurs, tâche réputée connue. Alors la TH non seulement détecte la présence d'une ou plusieurs courbes mais également les identifie.

En pratique, la fonction  $g$  est usuellement construite à partir d'une représentation quantifiée de l'espace  $\Omega$ , à chaque cellule de quantification représentant une valeur de  $\mathbf{a}$ , est associé un compteur. Ainsi, pour chaque  $m$ -uplet  $M^{(m)}$ , ou pour chaque point  $M$ , est incrémenté un ou plusieurs compteurs de  $\Omega$ . En fin de transformation, la valeur de  $g(\mathbf{a})$  est prise égale au compte associé à la cellule  $\mathbf{a}$ .

Nous ne citerons pas ici les nombreuses méthodes d'analyse de données qui permettent d'isoler des nuages de points [35], non plus que les techniques d'analyse numérique de recherche des extrémums d'une fonction multivariable [42]. De nombreuses méthodes spécifiques du traitement des images sont détaillées dans [49] : méthodes de graphe, méthodes de corrélation, méthodes syntaxiques, etc. Dans cette même référence une technique nouvelle de détection à résolution variable est présentée, permettant d'affiner progressivement la connaissance de la position du maximum sans trop souffrir de la présence de bruits. Des techniques de filtrage de l'espace des paramètres sont fréquemment utilisées, soit pour en lisser les irrégularités [17], soit pour en extraire des structures attendues [26]. Il est parfois fait usage d'informations locales de l'image (contraste par exemple), pour accélérer l'interprétation de l'espace  $\Omega$  [28]. Citons également la méthode de Kirsh [39] exposée dans [12], qui permet une recherche hiérarchique globale dégageant successivement les divers pics de l'espace de Hough.

Un autre mode de dépouillement a été proposé par Darmon [18] évitant le recours à un nombre élevé d'accumulateurs. Il consiste à associer à tout point  $M$  une valeur  $\mathbf{a}$  par le biais d'une équation d'estimation récursive. Chaque nouveau tirage d'un point  $M$

permet d'affiner la connaissance de  $\mathbf{a}$  par un estimateur de Kalman. Mais cette méthode est peu utilisée. Elle suppose en effet une connaissance *a priori* de la valeur finale de  $\mathbf{a}$  pour initialiser l'estimation, et pêche en outre par une lourdeur excessive lorsque plusieurs courbes sont simultanément présentes.

## 2.3. EXEMPLES

### 2.3.1. Détection de droites

Le paramétrage cartésien d'une droite ( $y = ax + b$ ) est généralement maladroit [22], car l'espace ( $\mathbf{a} = \{a, b\}$ ) est très inhomogène. Un paramétrage normal (ou polaire) est plus satisfaisant : ( $\mathbf{a} = \{\rho, \theta\}$ ).

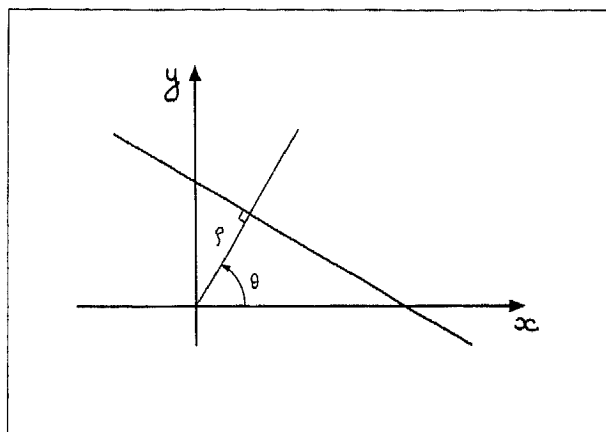


Fig. 1. — Droite en représentation normale :  $\mathbf{a} = \{\rho, \theta\}$ .  
Fig. 1. — Normal representation for line.

Une droite est repérée par son équation (fig. 1) :  $x \cos \theta + y \sin \theta = \rho$ . La transformation de  $m$  à 1, (de 2 à 1, ici), associe au doublet  $M_i M_j$  le point  $A$  de coordonnées :

$$\rho = \frac{|x_i y_j - x_j y_i|}{\sqrt{(y_j - y_i)^2 + (x_j - x_i)^2}},$$

$$\theta = -\text{Arc tg} \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}.$$

La transformation de 1 à  $m$  associe à tout point  $M_i$  l'ensemble  $A_i \subset \Omega$  des droites passant par  $M_i$  ces droites vérifient :

$$\rho = x_i \cos \theta + y_i \sin \theta,$$

ce qui est l'équation d'une sinusoïde dans l'espace  $\Omega$  (fig. 2). C'est donc une transformation de 1 à l'infini, mais puisque  $\Omega$  est borné et quantifié,  $m$  est en pratique fini et calculable.

Nous présentons sur la figure 3 une distribution de points bruités issus de deux droites de  $\mathbb{R}^2$  (fig. 3 a), la TH de  $m$  à 1 correspondant (fig. 3 b) ainsi que la TH de 1 à  $m$  (fig. 3 c).

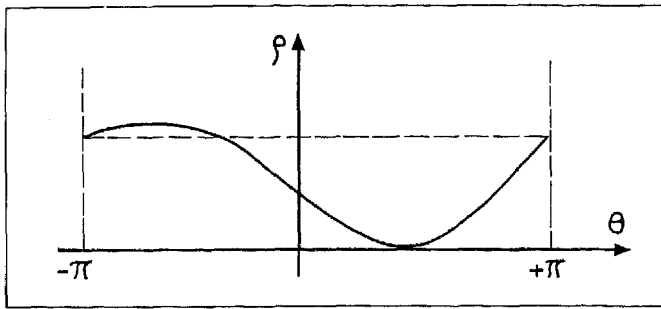


Fig. 2. — Dans la TH de 1 à  $m$  associée à la droite en représentation normale tout point  $\{x_i, y_i\}$  de l'image donne naissance, dans l'espace des paramètres à une sinusoïde d'équation  $\rho = x_i \cos \theta + y_i \sin \theta$ .

Fig. 2. — When making a 1 to  $m$  TH, to detect lines in normal representation, every image point  $\{x_i, y_i\}$ , gives rise to a sine curve in feature space, with equation  $\rho = x_i \cos \theta + y_i \sin \theta$ .

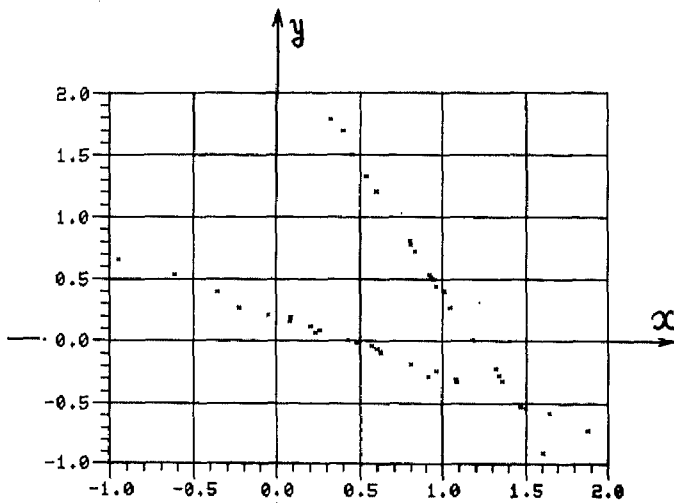


Fig. 3 a. — Points de l'espace image issus de deux droites bruitées.

Fig. 3 a. — Image points from two noisy lines.

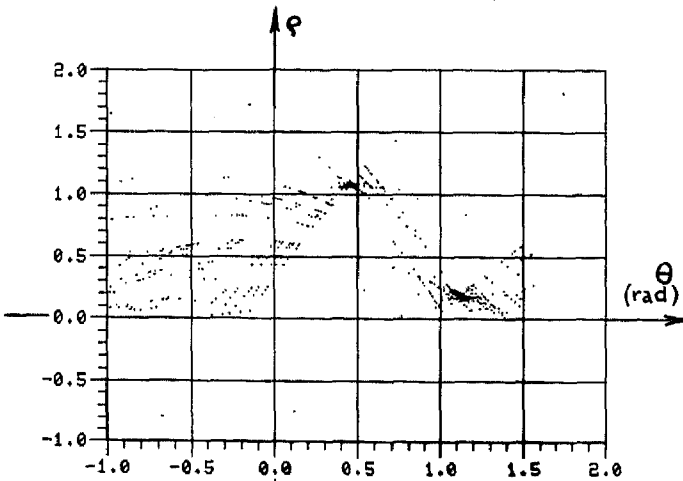


Fig. 3 b. — La TH de  $m$  à 1 associée à la droite en coordonnées normales appliquée à l'ensemble  $\mathcal{E}$  de la figure 3 a.

Fig. 3 b. —  $m$ -to 1 HT to detect lines in normal coordinates applied to the set  $\mathcal{E}$  of Fig. 3 a.

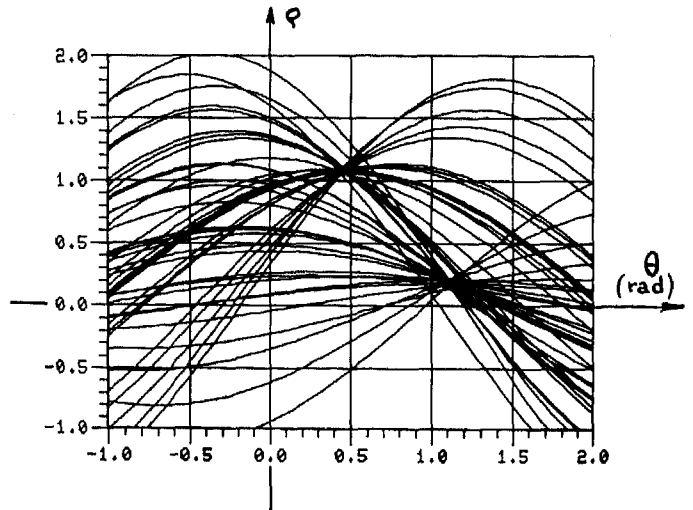


Fig. 3 c. — La TH de 1 à  $m$  appliquée au même ensemble.

Fig. 3 c. — The same with 1 to  $m$  HT.

Comme on le voit, la TH de  $m$  à 1 se déduit de l'ensemble des intersections des sinusoïdes de la TH de 1 à  $m$ , ce qui se généralise aisément à toutes les courbes paramétrées.

### 2.3.2. Détection de cercles

Un cercle de  $\mathbb{R}^2$  est paramétré généralement par les coordonnées de son centre  $(a, b)$  et par son rayon  $(r)$  :

$$a = \{a, b, r\},$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Dans ce cas,  $p=3$  et l'espace de Hough  $\Omega$  n'est pas aisément représentable.

Dans la TH de  $m$  à 1, nous vérifions également que  $m=3$  et que le cardinal de  $\mathcal{E}^{(m)}$  vaut  $C_N^3 = (1/6) N(N-1)(N-2)$ . La TH de  $m$  à 1 passe donc par la résolution de  $O(N^3)$  équations du second degré, chacune donnant centre et rayon d'un cercle connaissant trois de ses points (fig. 4).

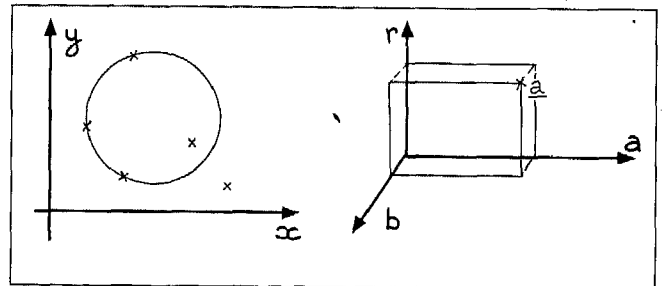


Fig. 4. — Espace image et espace des paramètres dans la TH de  $m$  à 1 pour détecter des cercles. Trois points de  $\mathcal{E}$  déterminent 1 point de  $\Omega$ .

Fig. 4. — Image space and feature space in the  $m$  to 1 HT to detect circles. Three points of  $\mathcal{E}$  determine 1 point of  $\Omega$ .

La TH de 1 à  $m$  fait passer, par chaque point, tous les cercles possibles, et l'ensemble  $A$  est donc un cône

de l'espace  $\Omega$ , d'axe parallèle à  $r$  passant par :

$$a = x_i, \quad b = y_i \quad (\text{fig. 5}).$$

### 3. Variantes de la TH

Comme nous l'avons souligné, la définition de la transformation de Hough laisse place à de nombreuses modifications, toutes n'ayant d'ailleurs pas été systématiquement explorées.

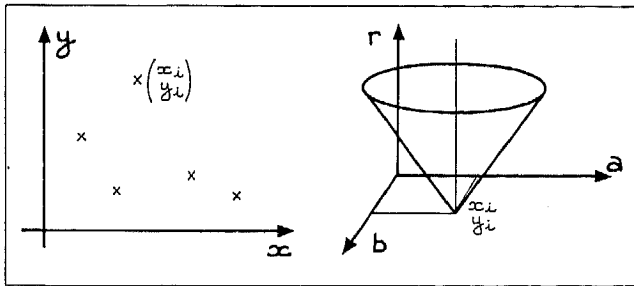


Fig. 5. — Espace image et espace des paramètres dans la TH de 1 à  $m$  pour détecter des cercles. Chaque point de  $\mathcal{E}$  donne naissance à un cône de  $\Omega$ .

Fig. 5. — Image space and feature space in the  $m$  to 1 HT to detect circles. Each point of  $\mathcal{E}$  gives rise to 1 cone in  $\Omega$ .

#### 3.1. TH PONDÉRÉE

Elle a été proposée par O'Gorman et Clowes [76] pour tenir compte des différences de confiance que l'on porte sur les points  $M$  de  $\mathcal{E}$ . Ces points résultent en effet souvent de procédures de détection qui associent à chacun d'eux une note de qualité  $v_i$ . La TH pondérée est alors une TH de 1 à  $m$  qui modifie l'équation (2) par la prise en compte de cette connaissance :

$$(3) \quad g(a) = \sum_{M_i} v_i \sum_{a_k \in A_i} c(a - a_k).$$

La note de qualité est très souvent fonction de la réponse du point à un détecteur : c'est par exemple l'amplitude d'un gradient pour un détecteur de contours.

#### 3.2. APPLICATION A DES COURBES NON PARAMÉTRIQUES

Merlin et Farber [48] ont soulevé l'intérêt d'appliquer la TH à des courbes non paramétriques connues par leur seule fonction caractéristique  $\gamma(x)$ , pour des applications de reconnaissance des formes; pour cela ils paramètrent les déformations autorisées sur ces courbes : par exemple la translation dans le plan, ou la rotation, ou le changement d'échelle. On obtient alors une nouvelle famille paramétrée; par exemple :

$$\mathcal{F} = \{ \gamma(x - a); a \in \mathbb{R}^2 \},$$

translation,

$$\mathcal{F} = \left\{ \gamma(\mathbf{P} \mathbf{x}) : \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos p & -\sin p \\ \sin p & \cos p \end{bmatrix} p \in \mathbb{R} \right\},$$

rotation,

$$\mathcal{F} = \{ \gamma(\mathbf{x}/a) : a \in \mathbb{R} \},$$

homothétie.

La transformation est alors une TH de 1 à  $m$  : par chaque point  $M$  détecté, on fait passer toutes les courbes de  $\mathcal{F}$  possibles et l'on ajoute dans  $\Omega$  les  $c(a)$  correspondant. Nous reviendrons plus en détail cette opération au chapitre 4. Cette transformation porte fréquemment le nom de TH généralisée dans la littérature (GHT pour les anglo-saxons).

#### 3.3. TRANSFORMATION DE 1 A 1

Il est parfois possible, également, de tirer profit de connaissances locales pour sélectionner, dans la TH de 1 à  $m$ , quel élément  $a$  est associé à un point  $x$ . A un seul point  $x$ , on ne fait correspondre alors qu'un point  $a$  de  $A$ , ce qui économise bien sûr un temps de calcul important.

L'information supplémentaire utilisée est généralement une connaissance sur les diverses dérivées de la courbe  $f(x, a)$  en  $x$ .

Par exemple, pour la détection d'une droite passant par  $x$ , la connaissance de sa pente :

$$y' = dy/dx = a,$$

permet de connaître le seul point  $a$  concerné :

$$a = \{ y', y - y' \},$$

en paramétrisation cartésienne,

$$a = \{ \text{Arc tg}(1/y'), x \sqrt{(1/y'^2 + 1)} + y \sqrt{(y'^2 + 1)} \},$$

en paramétrisation normale.

Dans le cas du cercle, il est nécessaire de connaître la direction de la tangente (dérivée première), mais également de la courbure (dérivée seconde). Ces informations sont souvent fournies par le détecteur de points lors du prétraitement.

Nous utilisons alors une transformée de 1 à 1, chaque point de l'image n'ayant pour image par la TH qu'un point de  $\Omega$ .

Ce mode de TH apparaît très adapté à la recherche de courbes décrites par des équations différentielles, par exemple sous la forme :

$$y = F(x, a),$$

$$y' = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, a),$$

...

$$y^{(n)} = \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(x, y, y', \dots, y^{(n-k)}, \dots, a).$$

Ces TH ont été particulièrement étudiées par Shapiro [60, 61, 63].

### 3.4. TRANSFORMATIONS DE $m$ A $m'$

Mais les dérivées d'ordre élevé sont souvent connues de façon incertaine, on peut alors se contenter des premières dérivées pour diminuer la cardinalité de  $A$ , on pourrait dire alors que l'on a une TH de 1 à  $m' < m$ .

On peut également conjuguer les informations partielles en quelques points (par exemple, pour le cercle la connaissance des tangentes en deux points) pour déterminer soit l'image exacte  $a$  de ces points, soit un ensemble  $A$  de cardinalité plus faible. Ces techniques (dites TH de  $m$  à  $m'$ ) sont souvent utilisées lorsque les ensembles  $\mathcal{E}^{(m)}$  et  $\mathcal{E}$  sont très grands et que l'on cherche un compromis entre occupation mémoire et temps machine (cf. chap. 5) [31, 4].

### 3.5. TRANSFORMATION HIÉRARCHIQUE

Davis a proposé que l'on « emboîte » les TH afin de détecter des structures de plus en plus complexes [20]. L'idée de base est de faire une TH, non pas à partir de points caractéristiques de l'image, mais à partir d'objets plus structurés (lignes, segments, courbes, etc.) qui auront, bien sûr, été détectés auparavant par une TH classique. On est ainsi amené à rechercher dans l'espace des paramètres de la première TH, la présence de configurations connues, à l'aide d'une seconde TH. Le processus peut évidemment être itéré, pourvu que l'on sache, à chaque étape, dégager une paramétrisation satisfaisante.

### 3.6. TRANSFORMATION DE THRIFT et DUNN

Cette modification de la TH a été proposée dans [71], pour tenir compte du bruit dans l'image, et des incertitudes sur la position des points caractéristiques. On incrémente alors, non seulement les accumulateurs des courbes passant par chaque point caractéristique  $M_i$ , mais également les accumulateurs de courbes voisines. Le voisinage concerné est déterminé de façon assez complexe à partir de la variance du bruit et de la dispersion statistique des points caractéristiques. On procède ainsi à un filtrage de l'espace  $\Omega$ , assez semblable à celui obtenu de toute autre manière (filtrage de Wiener) dans [17]. De bons résultats viennent appuyer cette méthode.

## 4. La TH dans le champ du traitement du signal

### 4.1. TH ET FILTRAGE ADAPTÉ

Telle qu'elle a été définie (chap. 3.2) pour des courbes non paramétriques soumises à des simples translations dans le plan ( $\Omega = \mathbb{R}^2$ ), la TH s'identifie au filtrage adapté classique pratiqué en reconnaissance des formes depuis de nombreuses années. La démonstra-

tion en a été faite par Sklansky en 1978 [67], bien que d'autres travaux antérieurs aient déjà mentionné l'équivalence [69].

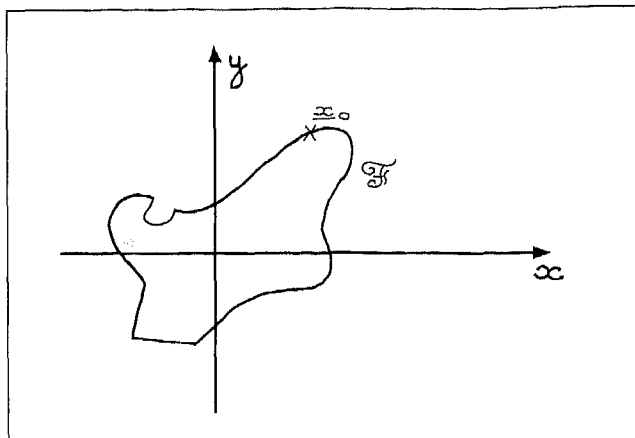


Fig. 6. — Courbe non paramétrée en position de référence dans l'espace image.

Fig. 6. — Non parametric curve of the image plane.

Soit  $\gamma(x)$  la fonction caractéristique associée à la forme  $\mathcal{F}$  recherchée dans une position de référence (fig. 6) :

$$\gamma(x) = \sum_{x_0 \in \mathcal{F}} c(x - x_0).$$

Nous lui faisons correspondre par TH de  $m$  à 1, dans l'espace  $\Omega$  le point origine :  $a = (0, 0)^t$  :

$$\overset{\text{TH}}{\gamma(x)} \rightarrow c(a).$$

Dénotons par  $\Delta x$  une translation dans le plan; à une courbe traduite de  $\Delta x$  correspond par TH un point traduit d'un vecteur égal :

$$\overset{\text{TH}}{\gamma(x - \Delta x)} \rightarrow c(a - x),$$

puisque le paramètre  $a$  se réduit, dans ce cas précis, au vecteur translation :

$$a = \Delta x.$$

Soit maintenant  $\mathcal{E} = \{x_i\}$  un ensemble de points de  $\mathbb{R}^2$  supposés appartenir à une ou plusieurs formes  $\mathcal{F}$ , possiblement traduites, et  $\varphi(x)$  la fonction caractéristique de cet ensemble :

$$\varphi(x) \begin{cases} = 1 & \text{si } x = x_i, \\ = 0 & \text{si } x \neq x_i, \end{cases} \quad \forall x_i \in \mathcal{E}.$$

Soit  $x_0 \in \mathcal{F}$  et  $x_i \in \mathcal{E}$ . La translation :  $\Delta x = x_i - x_0$ , amène la courbe  $\gamma$  à passer par  $x_i$  puisque :  $\gamma(x_i - \Delta x) = 0$ .

L'ensemble des courbes traduites de  $\mathcal{F}$  passant par  $x_i$  est donc :

$$\sum_{x_0 \in \mathcal{F}} \gamma(x - x_i + x_0)$$

et la contribution du point  $x_i$  à la TH est alors :

$$(4) \quad g(\mathbf{a}/x_i) = \iint_{\mathbb{R}^2} \gamma(x_0) c(\mathbf{a} - x_i + x_0) dx_0 \\ = \gamma(x_i - \mathbf{a})$$

et, en utilisant la linéarité de la TH, la TH de  $\mathcal{E}$  est donc :

$$(5) \quad g(\mathbf{a}) = \sum_{x_i \in \mathcal{E}} \gamma(x_i - \mathbf{a}) \\ = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(\mathbf{x}) \cdot \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{a}) d\mathbf{x}.$$

Nous reconnaissons dans la relation (5) l'équation de corrélation caractéristique du filtrage adapté du signal  $\varphi$  par une forme  $\gamma$  (c'est-à-dire du filtrage qui assure la détection la meilleure au sens du rapport signal à bruit [30]), ou de façon équivalente, dans l'équation (4) la réponse impulsionnelle de la TH  $h(\mathbf{a})$  égale à  $\gamma(-\mathbf{a})$  (fig. 7).

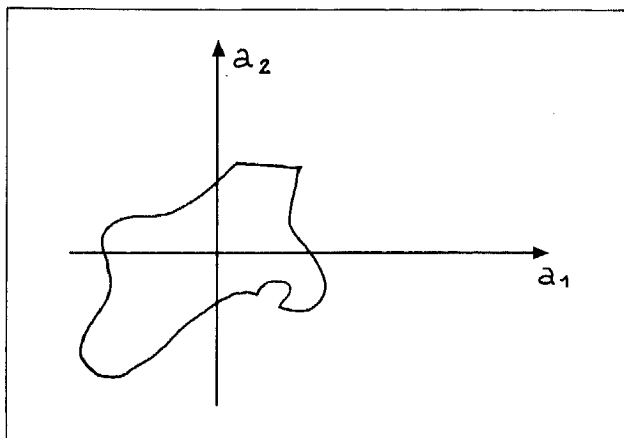


Fig. 7. — Réponse impulsionnelle de la TH de 1 à  $m$  associée à la courbe de la figure 6.

Fig. 7. — Impulse response of 1 to  $m$  HT to detect the non parametric curve of Figure 6.

Cette analogie entre TH et filtrage adapté, dans le cas particulier où la paramétrisation est faite sur la translation dans le plan, est aisément étendue à des TH pondérées comme nous en avons vu en 3.1, en remplaçant la fonction binaire  $f$  par une fonction multivaluée.

Cette analogie permet d'ailleurs de proposer une amélioration à la TH de  $m$  à 1 dans le cas d'un signal  $\varphi$  entaché d'un bruit dont le spectre de densité de puissance  $S$  est connu. Nous savons en effet que le filtre adapté qui optimise le rapport signal à bruit a pour réponse impulsionnelle :

$$(6) \quad h_s(\mathbf{a}) = \text{TF}[\text{TF}[h(\mathbf{a})]/S]$$

qui se ramène à  $h(\mathbf{a})$  si le bruit est blanc.

Il arrive fréquemment en traitement d'image que le bruit soit en fait l'image elle-même, dans laquelle est

plongé le signal. Il est alors raisonnable d'attribuer à cette image une densité de puissance lorentzienne [44] :

$$S(u, v) = \frac{1}{1 + \alpha(u^2 + v^2)},$$

où  $u$  et  $v$  sont les fréquences spatiales associées à  $x$  et  $y$ , et  $\alpha$  un coefficient de corrélation (nous supposons l'image isotrope). L'équation (6) devient alors :

$$(7) \quad h_s(\mathbf{a}) = h(\mathbf{a}) * \text{TF}[1 + \alpha(u^2 + v^2)], \\ h_s(\mathbf{a}) = h(\mathbf{a}) + \alpha \nabla^2 h(\mathbf{a}).$$

Il est intéressant de rapprocher la réponse impulsionnelle de l'équation (7) de celles proposées dans [11] pour la TH « complémentaire ».

Dans cet article Brown propose en effet de modifier la réponse impulsionnelle en lui rajoutant des valeurs négatives de façon que les pics se détachent nettement d'un niveau moyen pratiquement nul. Par tâtonnement il propose, dans le cas d'une forme circulaire, une réponse impulsionnelle qui s'éloigne peu de l'équation (7), et il rapporte une amélioration sensible des performances.

Il n'est pas tiré grand profit, dans la littérature, de l'équivalence entre TH et filtrage adapté, il semble pourtant que plusieurs résultats connus du traitement du signal mériteraient d'être transposés pour la TH; l'exemple précédent en est une illustration.

Il nous semble de même que l'expérience accumulée sur l'utilisation de la TH pour des applications industrielles devrait ouvrir des développements nouveaux à ceux qui pratiquent le filtrage adapté : ainsi, nous avons montré dans [46], comment la TH la plus générale pouvait être faite optiquement, et comment en particulier on pouvait dépasser la limite physique imposée par la dimension 2 de l'espace des paramètres par un multiplexage judicieux de filtres optiques.

#### 4. 1. TH ET TRANSFORMATION DE RADON

L'identité entre la TH de 1 à  $m$  associée aux droites en paramétrage normal ( $\mathbf{a} = \{\rho, \theta\}$ ), et la transformation de Radon (TR) a été soulignée par Deans [21] en 1981. La TR est connue depuis 1917 [54], mais la communauté scientifique l'a découverte surtout pour son importance en restauration d'image de tomographie axiale transverse. Elle est utilisée également en sismique pétrolière [23], sous divers noms (transformation  $\theta-\rho$  ou  $\tan-\rho$ ). On définit la TR  $R$  d'une fonction  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^2$  par l'intégrale :

$$(8) \quad R_\varphi(\mathbf{a}) = R_\varphi(\rho, \theta) \\ = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy.$$

Nous reconnaissons dans cette équation une application qui associe au point  $\mathbf{x}$  la sinusoïde de  $\Omega$  :

$$\rho - x \cos \theta - y \sin \theta = 0,$$

pondérée par  $\varphi(\mathbf{x})$  conformément à la TH de 1 à  $m$  associé à une droite (chap. 2.3.1). Il y a donc identité exacte entre ces deux transformations.

Deans propose d'étendre l'écriture intégrale (8) à des courbes paramétrées quelconques  $f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \alpha$  :

$$R(\mathbf{a}) = \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int \varphi(\mathbf{x}) \cdot \delta(\alpha - f(\mathbf{x}, \mathbf{a})) \, d\mathbf{x},$$

qui relie de façon satisfaisante la TH de 1 à  $m$  au domaine important de l'analyse fonctionnelle [59].

Jusqu'à ce jour, cette généralisation ne s'est malheureusement pas montrée fertile en applications, si ce n'est dans le champ du traitement optique [25].

## 5. La quantification de l'espace

Nous avons dit que la TH remplace la recherche d'une courbe paramétrée dans  $\mathbb{R}^n$  par la recherche de nuages de points dans  $\Omega$ . La méthode généralement employée pour bâtir l'espace  $\Omega$ , consiste tout d'abord à quantifier  $\Omega$ , à associer à chaque cellule un compteur initialement mis à zéro, puis à incrémenter une cellule  $\mathbf{a}$  chaque fois qu'elle est atteinte par la TH.

Ainsi, dans la TH de  $m$  à 1, une seule cellule est incrémentée pour tout  $m$ -uplet de  $\mathbb{R}^m$ ; dans la TH de 1 à  $m$ , plusieurs cellules sont incrémentées situées sur des courbes (ou des sous-espaces) attachées à la famille de courbes.

Une grande attention a été portée dans la littérature au choix de la quantification de l'espace  $\Omega$  avec trois objectifs essentiels :

- garantir une précision de détection aussi bonne que possible;
- diminuer la mémoire nécessaire au stockage des accumulateurs;
- accélérer les calculs.

Ce dernier point est en effet important lors des TH de 1 à  $m$ . Le choix d'un point  $M_i$  amène dans ce cas à incrémenter tous les compteurs des cellules  $\mathbf{a}_j$  vérifiant  $f(M_i, \mathbf{a}_j) = 0$ , et le temps de calcul des adresses concernées est directement lié à la quantification de  $\Omega$ .

### 5.1. CHOIX DES AXES ET DES REPRÉSENTATIONS

Une première famille de travaux a pris pour objectif le choix d'une paramétrisation heureuse des familles de courbes. Nous avons déjà cité la contribution de Duda et Hart [22] proposant une paramétrisation normale plutôt que cartésienne afin d'assurer une meilleure homogénéité de  $\Omega$  et ainsi une quantification uniforme. Timoumi [72] a également discuté le choix d'une représentation normale avec une définition d'angle soit entre 0 et  $\pi$  soit entre 0 et  $2\pi$ . Il conclut à leur identité, tant en coût calcul qu'en mémoire. Il montre également que l'origine des axes de l'espace  $\Omega$  sera ramenée avec profit au centre du cercle de plus petit rayon entourant les  $M_i$ .

Une étude semblable est menée dans la même référence sur les TH de fonctions non paramétrées soumises à des similitudes et conclut au choix de repères liés au polygone convexe bâti sur les points  $M_i$ .

### 5.2. QUANTIFICATION INHOMOGÈNE

Le choix d'une quantification de l'espace  $\Omega$  repose généralement sur la modélisation du processus de détection des points caractéristiques, il est donc souvent lié à la prédiction des performances de la TH (chap. 6).

Ainsi Cohen et Toussaint [16] ont souligné le biais introduit par la dimension finie de l'image dans la transformation. Ils se sont intéressés aux TH de 1 à  $m$  associées aux droites et aux cercles, dans le cas d'images circulaires (car les calculs sont alors aisés) et ont montré qu'une quantification uniforme de l'espace  $\Omega$ , et en particulier du sous-espace associé à  $\rho$  pour la droite, ne conduit pas à des comptes *a priori* égaux pour tous les compteurs. Ils proposent donc une quantification « au maximum d'entropie » qui assure des comptes égaux pour chaque cellule de résolution.

Alagar et Thiel [1] ont étendu cette approche à la détection d'hyperplans dans un espace de dimension quelconque dans le cas de la TH de  $m$  à 1, certains de ces résultats sont complétés dans [47].

Une approche assez semblable est également présentée dans [34].

### 5.3. QUANTIFICATION DYNAMIQUE

L'analyse de l'espace de Hough après la TH montre une utilisation très inégale des cellules de résolution, aussi bien en quantification uniforme qu'en quantification au maximum d'entropie. Diverses solutions ont été proposées pour pallier ce défaut.

Une première classe de méthodes s'appuie sur une quantification adaptative par focalisation progressive. Commencant avec une quantification grossière, on élimine progressivement des zones de  $\Omega$  qui servent peu, et l'on affine simultanément la quantification dans les zones qui semblent importantes. Cette approche est particulièrement utile pour des vecteurs  $\mathbf{a}$  de grande dimension ( $p > 3$ ). Elle a été employée en particulier dans [28, 36] et [66].

Plus ambitieuses sont les méthodes de quantification dynamique étudiées par Sloan et O'Rourke [50, 51, 52, 68]. Leur objectif est de partitionner l'espace  $\Omega$  de façon adaptative par des cellules de taille variable. Ces cellules évoluent sous l'action de deux règles : la réunion de cellules voisines en une seule si leurs comptes sont trop pauvres, ou la division d'une cellule en plusieurs si au contraire son compte est trop élevé. Diverses techniques s'appuyant sur ce principe sont proposées et comparées dans [52] :  $k-d$  arbres,  $2^n$ -arbres, pyramides, etc. Elles utilisent généralement un adressage par graphe pour retrouver quelle cellule contient une valeur de  $\mathbf{a}$  particulière, et des registres mémoire associés à chaque cellule pour guider les



opérations de réunion et de division. Les figures 8 et 9 montrent deux exemples de quantification dynamique utilisant respectivement les 4-arbres et les 2-d arbres.

Les efforts actuellement développés sur le problème de la quantification de l'espace  $\Omega$  nous font penser que des progrès importants pourraient résulter dans ce domaine de l'utilisation d'outils bien connus en traitement du signal (quantification vectorielle par

Partant d'une densité de probabilité  $P(M)$  connue des points  $M$  détectés dans l'image, nous souhaitons connaître la densité de probabilité  $P(a)$  sur  $\Omega$ . Seul le cas de la détection d'une droite dans des images rectangulaires ou circulaires, et en paramétrisation normale ou cartésienne, peut être aisément résolu [47]. On peut ainsi connaître l'influence d'un bruit uniformément réparti (fig. 10) ainsi que le rôle des dimen-

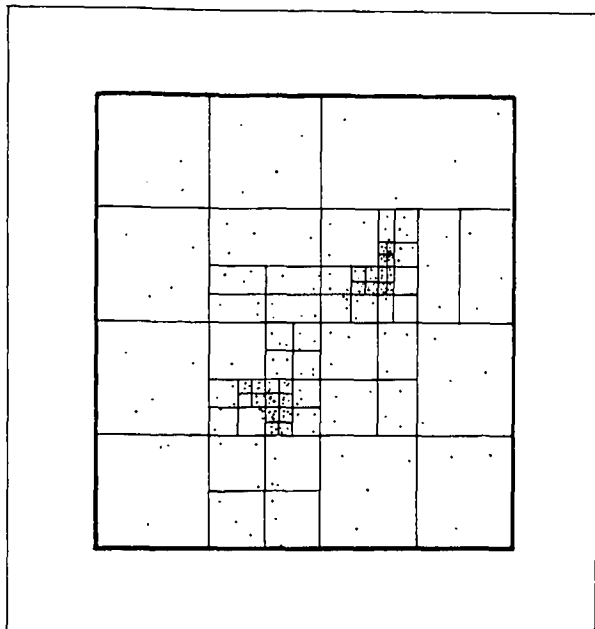


Fig. 8. - Quantification adaptative par 4-arbres de l'espace de Hough.

Fig. 8. - Adaptive quantization with quad trees.

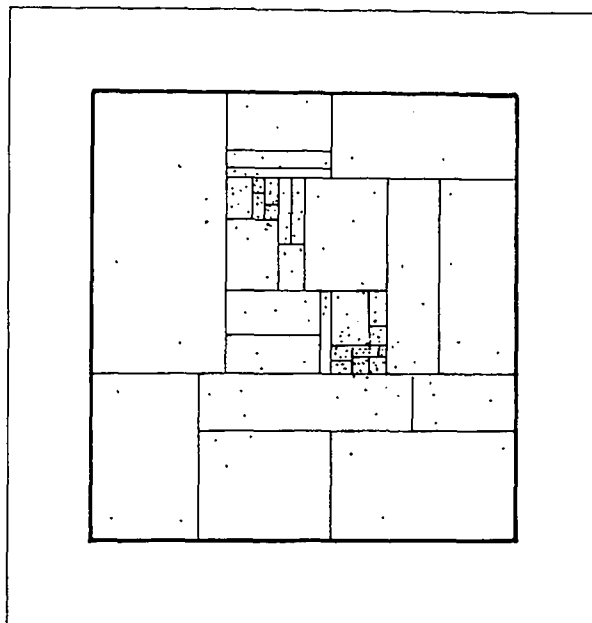


Fig. 9. - Quantification adaptative par 2-d-arbres.

Fig. 9. - Adaptive quantization using 2-d-trees.

exemple), et en informatique (techniques de hash-coding, ou techniques de mémoires-cache déjà en partie explorées par Brown [11]).

## 6. Prédiction des performances de la TH

L'utilisateur de la TH est souvent confronté à des questions fondamentales sur son comportement dans des conditions précises d'utilisation; les principales sont les suivantes :

- comment peut-on relier la précision sur les paramètres détectés  $a$  à l'incertitude sur la position des points  $M$  dans l'image?
- quelle est la contribution de points  $M$  aberrants (bruits, leurres) sur la détection d'une courbe?
- quand décide-t-on de l'existence simultanée de plusieurs courbes?

### 6.1. APPROCHE RIGOUREUSE

Les réponses apportées à ces questions sont très imparfaites, car une démarche théorique est généralement arrêtée par des difficultés mathématiques inextricables. Seuls les cas les plus simples peuvent être menés à leur terme.

sions finies de l'image. De même un rapport signal à bruit

$$R = \frac{n^2 L^2}{n'(n' + 2n) \cdot d^2}$$

peut être associé à la détection d'une droite bruitée dans une image bruitée, où  $n$  est le nombre de points définissant la droite,  $n'$  le nombre de points issus du bruit,  $L$  la longueur de la droite dans l'image, et  $d$  la dispersion des points de la droite autour de la position exacte.

Une approche assez semblable a été proposée par Lopez-Krahe [43] lorsque l'image n'est plus considérée comme un signal continu, mais discret. Elle conduit à des dénombrements d'une complexité mathématique rapidement insoluble; néanmoins, dans les cas les plus simples elle donne des résultats en bon accord avec ceux obtenus dans une approche continue, mais rendant mieux compte de certains effets expérimentalement rencontrés : orientations privilégiées par exemple.

### 6.2. APPROCHE GÉOMÉTRIQUE

Elle utilise la notion de réponse impulsionnelle de la TH, et découle donc de l'analyse de Sklansky [67];

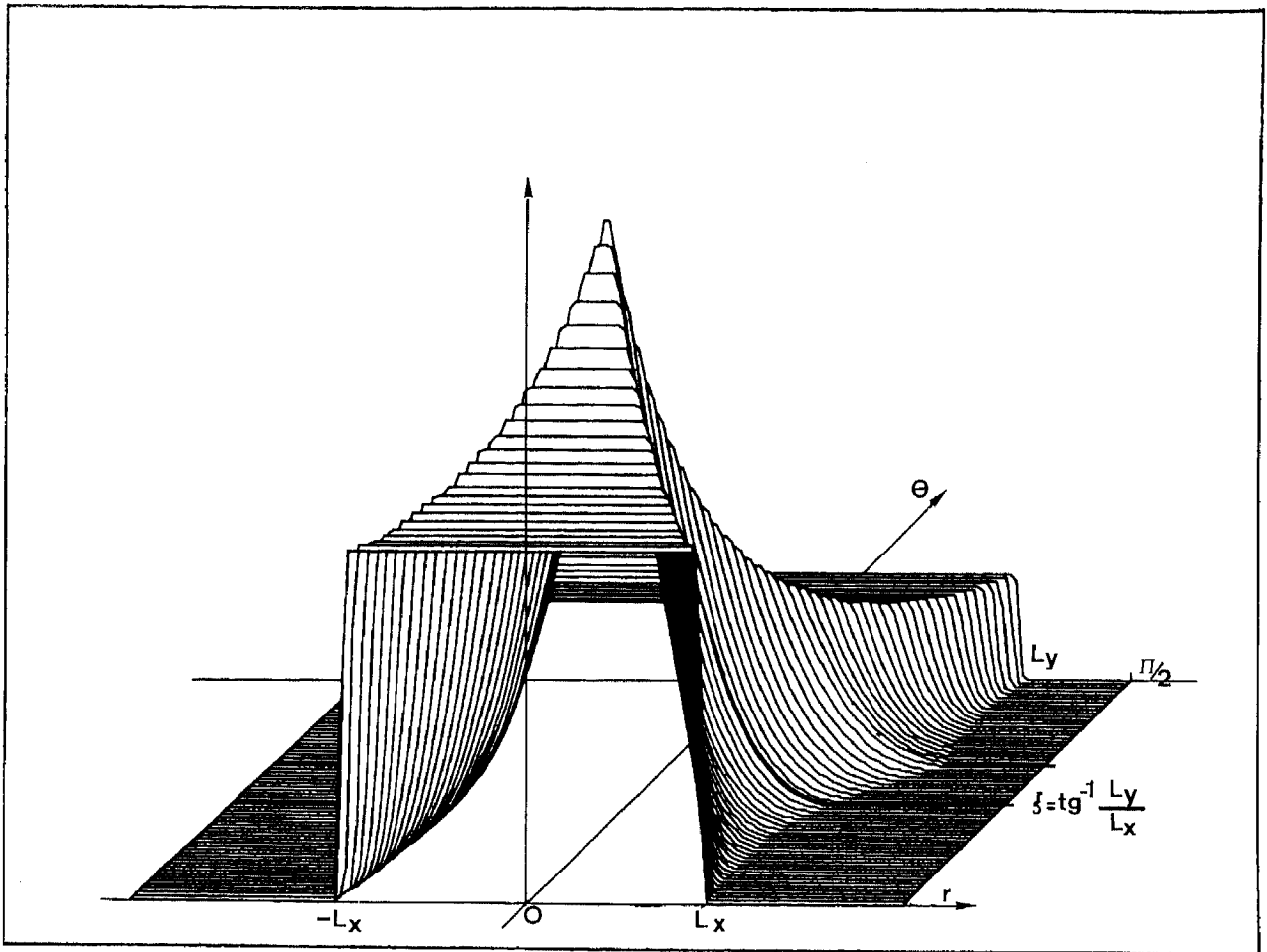


Fig. 10. — Probabilité d'un paramètre  $a = \{ \rho, \theta \}$  lors de la détection par TH de  $m$  à 1 associée à la droite lorsque l'image de dimension  $2L_x, 2L_y$  est constituée d'un bruit uniforme [d'après 47].

Fig. 10. — Hough plane in the case of  $m$  to 1 HT to detect lines in normal parametrization. The image is a rectangle  $(2L_x, 2L_y)$  covered with uniform random noise [from 47].

elle a été développée par Shapiro et Iannino [64]. Elle consiste à ne considérer que la géométrie des domaines d'incertitude dans  $\Omega$  connaissant l'erreur probable sur  $M$ , puis d'approcher les domaines ainsi trouvés par des domaines plus simples. Deux types d'incertitudes sont ainsi pris en compte pour la détection d'une droite : soit une incertitude isotrope ( $dM$  est une boule de  $R^n$ ), soit une incertitude de quantification ( $dM$  est un parallélépipède). Cette approche permet d'obtenir à moindre frais certains résultats trouvés en 6.1, en particulier sur l'importance de la longueur du segment observé sur la précision de détermination de ses paramètres.

Cette approche a été reprise dans [34] dans des cas plus proches de la réalité, mais moins généraux : détection de droites et de cercles par des opérateurs usuels (Sobel ou Hueckel), lois de  $P(M)$  plus réalistes, etc. On obtient alors numériquement des solutions approchées de  $P(a)$  (fig. 11).

### 6.3. APPROCHE PAR VARIANCE

On réduit dans ce cas la loi de densité de  $M$  à ses moments d'ordre 2, et par linéarisation de la

transformation, on estime les moments d'ordre 2 dans l'espace de Hough; c'est ce que l'on appelle la transformation de la dispersion (scatter transformation). Ces prédictions ont principalement été faites dans le cas de TH de 1 à 1 (chap. 3.3) pour des courbes très générales, définies par :

$$y = f(x, a), \quad y' = \frac{\partial f}{\partial x}(x, a)$$

ou pour des droites [60, 61, 62].

### 6.4. ÉTUDE DE LA RÉPONSE IMPULSIONNELLE DE LA TH

Suivant la proposition de Sklansky, Brown [10] a adopté une approche de traitement du signal, et il s'est penché sur la contribution de la réponse impulsionnelle de la TH à la formation de pics parasites dans l'espace de Hough. Ainsi, il peut mettre en évidence la présence de lobes secondaires importants dans le cas même de la détection d'une courbe parfaite non bruitée (cercle ou droite et leur généralisation dans des espaces de dimension  $N$ ). Ces lobes secondaires sont essentiellement les maximums, hors

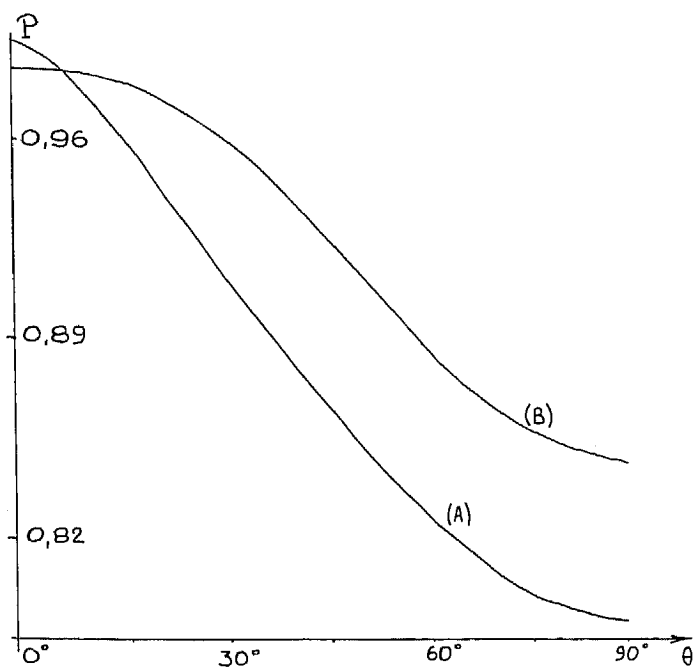


Fig. 11. — Influence de l'orientation de la droite sur la probabilité de détection dans l'espace de Hough dans le cas d'un bruit uniforme (courbe A) ou radialement gaussien (B) d'après [34].

Fig. 11. — Detection probability versus orientation of line in the HT with uniformly distributed noise (curve A) or circular normal distributed noise (curve B) from [34].

de l'origine, de la fonction d'autoconvolution de la forme recherchée. Il propose diverses solutions pour diminuer leur importance : l'usage du gradient, d'une quantification adaptée dans l'espace de Hough de la TH complémentaire (chap. 4. 1).

## 7. Les applications

Nous avons déjà eu l'occasion de citer deux applications fréquentes de la TH : la détection de droites ou d'alignements et la détection de cercles.

Un grand nombre de travaux ont pris la détection de droites pour objectif et d'abord ceux originaux de Hough [32]. Citons également : [56, 22, 49, 26, 34, 69, 64, 67, 17, 71, 25]. Dans [24] est proposée la détection de deux droites formant un angle faible.

La détection de cercles fait l'objet des travaux suivants : [34, 18, 38, 10, 11, 71]. Sur un schéma identique des détections de symétries de révolution sont proposées dans [45] et [43]. L'extension à la détermination de coniques dans le plan est l'objet d'une abondante littérature : pour les ellipses [4, 73] et [74], pour les paraboles [74, 71, 60] et [61], pour les hyperboles [61, 62]. De même, des travaux sont présentés dans [29] permettant de reconnaître des surfaces de l'espace par l'orientation de leur normale : plans, cylindres, cônes et sphères. Signalons également la détection de spirales dans [8] pour clore les applications sur les fonctions paramétrées.

Les travaux sur la détection de formes non paramétrées sont assez disparates et recouvrent surtout des tâches de reconnaissance des formes appliquées à la robotique [15, 13, 14, 28, 55, 73], à l'imagerie médicale [74, 38], à la surveillance [57, 17], au recalage d'images satellitaires [75, 20], à l'analyse de séquences d'images [18, 57, 75], à la description de scènes tridimensionnelles [31, 66, 53], à la détermination de champs de vitesses [27, 36, 50].

Nous signalerons ensuite des travaux originaux et isolés sur la reconnaissance de caractères [40], la compression d'information [65] et l'analyse de textures [19], qui montrent bien à quelle diversité d'applications peut s'adapter la transformation de Hough dans les domaines nouveaux du traitement des images. Enfin, signalons des extensions récentes de la TH, non plus pour identifier des courbes, mais pour rechercher des isomorphismes dans des graphes [37], qui laissent prévoir des champs d'application nouveaux, en reconnaissance des formes, mais extérieurs au traitement des images.

En même temps que se développent les applications de la TH, des solutions techniques sont proposées, pour autoriser la mise en œuvre rapide et simple des calculs. Nous citerons en particulier l'architecture spécialisée étudiée par IBM autour d'une unité arithmétique calculant les fonctions  $ax + by + c$ , à partir de produits  $ax$  et  $by$  tabulés [58]. Ces architectures se prêtent aisément, aussi bien à des arrangements parallèles que systolliques.

## 8. Conclusion

La présentation que nous avons faite ici de la TH a voulu souligner les attraits de cet outil dans le champ du traitement des images : sa grande souplesse lui permet une adaptation remarquable à des problèmes nouveaux, elle intègre aisément des informations propres à une configuration particulière, elle est parallélisable car chaque opération est répétée identiquement sur chaque point  $M$  ou sur chaque  $m$ -uple  $M^{(m)}$ .

Ses inconvénients principaux résident dans sa gourmandise en temps-machine et en espace-mémoire. On lui reproche d'être globale et de ne s'adapter que difficilement à ses propres résultats au fur et à mesure qu'ils sont produits. Pour quelques applications il est regrettable également que l'on perde le souvenir des points  $M$  qui contribuent à un maximum de  $\Omega$ .

Des efforts importants devront encore lui être consacrés pour qu'elle soit véritablement fiable. Nous pensons que l'un des points les plus urgents serait d'établir de façon satisfaisante la méthodologie d'exploitation de l'espace des paramètres. Une autre contribution fondamentale sera la détermination d'une stratégie de réduction du temps machine par le choix du mode de construction de la fonction  $g$  : aucun guide ne permet actuellement de décider s'il vaut mieux choisir une TH de 1 à  $m$ , de  $m$  à 1 ou de  $m$  à  $m'$  dans les cas de grande dimensionnalité de  $\Omega$ .

Enfin, il nous semble que la quantification adaptative de l'espace  $\Omega$  pourrait encore progresser sans mettre autant à contribution l'informaticien.

Manuscrit reçu le 9 mai 1985.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. S. ALAGAR et H. THIEL, Algorithms for Detecting M-Dimensional objects in N-Dimensional Spaces, *IEEE Trans Pattern Anal. and Mach. Intel.*, PAMI-3, n° 3, mai 1981, p. 245-256.
- [2] N. J. AYACHE et A. DARMON, Reconnaissance récursive et localisation de formes planes partiellement visibles dans une image, 9<sup>e</sup> Colloque GRETSI, Nice, 1983.
- [3] D. H. BALLARD, Parameter networks: Towards a theory of low level vision, *Proc 7th IJCAI*, Vancouver, août 1978, p. 1068-1078.
- [4] D. H. BALLARD, Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes, *Pattern Recognition*, 13, n° 2, 1981, p. 111-122.
- [5] H. G. BARROW, J. M. TENENBAUM, T. C. BOLLES et C. WOLF, Parametric correspondence and chamfer matching: two new techniques for image matching, *Proc. 5th Intern. Joint Conf. Artificial Intel.*, Cambridge, 1977, p. 659-663.
- [6] P. BASTIAN et L. DUNN, Global approach to pattern recognition for bubble chamber pictures, *IEEE Trans. Comput.*, C-20, septembre 1971, p. 995.
- [7] M. J. BAZIN et J. W. BENOIT, Off-line global approach to pattern recognition for bubble chamber pictures, *IEEE Trans. Nuclear Sci.*, NS-12, août 1965, p. 291.
- [8] P. BOUTHEMY, Modélisation et suivi de perturbations nuageuses en imagerie météorologique, *Thèse de Docteur-Ingénieur*, Université de Rennes-I, série A, n° 150-30, 1982.
- [9] P. BOUTHEMY et A. BENVENISTE, Modeling of atmospheric disturbances in meteorological pictures, *IEEE Patt. Anal. Mach. Intel.*, PAMI-6, n° 5, septembre 1984, p. 587-600.
- [10] C. M. BROWN, Inherent Bias and Noise in the Hough Transform, *IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intel.*, PAMI-5, n° 5, septembre 1983, p. 493-505.
- [11] C. M. BROWN, M. B. CURTISS et D. B. SHER, Advanced Hough transform implementations, *Proc. 8th Int. Joint Conf. on Art. Intelligence*, Karlsruhe, 1983, p. 1081-1085.
- [12] J. CAMILLERAP, L'utilisation du contexte en reconnaissance des formes, *Thèse d'État*, Paris-VI, mai 1976.
- [13] V. CANTONI et G. MUSSO, Shape recognition using the Hough transform, *Proceedings of International Workshop on Cybernetic Systems*, Salerno, Italie, 1981.
- [14] V. CANTONI, M. CAVIGLIONE, G. MUSSO et G. PANNUZZIO, Location and orientation of mechanical parts using Hough technique, in *Application of digital image processing*, A. OOSTERLINCK et A. G. TESCHER, éd.; *Proc. SPIE*, 397, Genève, 1983, p. 229-233.
- [15] R. S. CHORAS, Image processing system for industrial robots, *Image and Vision Computing*, 2, n° 1, février 1984, p. 31-33.
- [16] M. COHEN et G. T. TOUSSAINT, On the detection of structures in noisy pictures, *Pattern Recognition*, Pergamon Press, 9, 1977, p. 95-98.
- [17] A. E. COWARD, W. E. SNYDER et W. H. RUEDGER, The detection of unresolved targets using the Hough transform, *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 21, 1983, p. 222-238.
- [18] C. A. DARMON, A recursive method to apply the Hough transform to a set of moving objects, *Proceedings IEEE ICASSP'82*, Paris, 1982, p. 825-829.
- [19] L. S. DAVIS, Computing the spatial structure of cellular textures, *Computer Graphics and Image Processing*, 11, 1979, p. 111-122.
- [20] L. S. DAVIS, Hierarchical generalized Hough transforms and line segment based generalized Hough transforms, *Pattern Recognition*, 15, 1982, p. 277-285.
- [21] S. R. DEANS, Hough Transform from the Radon Transform, *IEEE Trans.*, PAMI-3, n° 2, mars 1981, p. 185-1888.
- [22] R. O. DUDA et P. E. HART, Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures, *Communication of the ACM*, 15, n° 1, janvier 1972, p. 11-15.
- [23] T. S. DURRANI et D. BISSET, The Radon transform and its properties, *Geophysics*, 49, n° 8, août 1984.
- [24] C. R. DYER, Gauge inspection Using Hough Transforms, *IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intel.*, PAMI-5, n° 6, novembre 1983, p. 621-623.
- [25] G. EICHMANN et B. Z. DONG, Coherent Optical Production of the Hough Transform, *Applied Optics*, 22, n° 6, 15 mars 1983, p. 830-834.
- [26] D. G. FALCONER, Target tracking with a Fourier-Hough Transform, *Proc. 13<sup>e</sup> ASILOMAR Conference on Circuits, Systems and Computers*. Pacific Grove, 5-7 novembre 1979., S. P. CHAN, ed., New York, IEEE Press, 1979.
- [27] C. L. FENNEMA et W. B. THOMPSON, Velocity determination in scenes containing several moving objects, *Computer Graphics and Image Processing*, n° 9, 1979, p. 301-315.
- [28] H. HAKALAHTI, D. HARWOOD et L. S. DAVIS, Two dimensional object recognition by matching local properties of contour points, *Pattern Recognition Letters*, 2, 1984, p. 227-234.
- [29] M. HEBERT et J. PONCE, A new method for segmenting 3-D scenes into primitives, *Proc. 6th IEEE Int. Conf. Pattern Recogn. Image Proc.*, Munich, 1982, p. 836-838.
- [30] C. W. HELSTROM, *Statistical theory of signal detection*, Pergamon, New York, 1968.
- [31] T. C. HENDERSON et W. S. FAI, The 3-D Hough shape transform, *Pattern Recognition Letters*, 2, 1984, p. 235-238.
- [32] P. V. C. HOUGH, *Method and means for recognizing complex patterns*, United States Patent, n° 3, 069, 654, 18 décembre 1962.
- [33] A. IANNINO et S. D. SHAPIRO, A survey of the Hough transform and its extension for curve detection, *Proc. IEEE PRIP'78*, Chicago, mai-juin 1978, p. 32-38.
- [34] A. IANNINO, Hough transform theory and image processing experiments, *Ph. D. thesis*, Stevens Institute of Technology, USA, 1979.
- [35] M. JAMBU, *Classification automatique pour l'analyse de données*, Bordas, Paris, 1978, 2 tomes.
- [36] S. N. JAYARAMAMURTHY et R. JAIN, An approach to the segmentation of textured dynamic scenes, *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 21, 1983, p. 239-261.
- [37] S. KASIF, L. KITCHEN et A. ROSENFELD, A Hough transform technique for subgraph isomorphism, *Pattern Recognition Letters*, 2, 1983, p. 83-88.

- [38] C. KIMME, D. BALLARD et J. SKLANSKY, Finding Circles by an Array of Accumulators, *Communications of the ACM*, 18, n° 2, février 1975, p. 120-122.
- [39] R. A. KIRSCH, Resynthesis of biological images from tree structured decomposition data, *IFIP Working Conf. on Graphic Lang*, Vancouver, mai 1972, North Holland, p. 1-19.
- [40] M. KUSHNIR, K. ABE et K. MATSUMOTO, An application of the Hough transform to the recognition of printed hebrew characters, *Pattern Recognition*, 16, n° 2, 1983, p. 183-191.
- [41] M. KUSHNIR, K. ABE et K. MATSUMOTO, Recognition of handprinted hebrew characters using feature selected in the Hough transform space, *Pattern Recognition*, 18, n° 2, 1985, p. 103-114.
- [42] J. L. LIONS et P. FAURRE, *Cours d'analyse numérique*, Palaiseau, Ecole Polytechnique, 1981, tome 2.
- [43] J. LOPEZ-KRAHE, Méthodes d'interprétation globale d'images à haut niveau. Application à la détection de certaines structures, *Thèse d'Etat*, Paris-VI, à paraître 1986.
- [44] H. MAITRE, Propriétés statistiques fondamentales des signaux d'image, *Colloque GRETSI*, Nice, 34/1-34/6, 1977.
- [45] H. MAITRE et J. LOPEZ-KRAHE, Transformation de Hough : Théorie et application à la détection de symétries circulaires, *Congrès AFCET*, Paris, janvier 1984, p. 255-264.
- [46] H. MAITRE, Matched spatial filtering and the Hough transform, *Proc. 13th International Commission for Optics*, Sapporo Japon, 20-24 août 1984, p. 300-301.
- [47] H. MAITRE, Contribution to the prediction of performances of the Hough Transform, *IEEE Pattern Anal. and Mach. Intel.*, novembre 1984, document ENST 84COO7, 37 p., à paraître 1986.
- [48] P. MERLIN et D. J. FARBER, A Parallel Mechanism for Detecting Curves in Pictures, *IEEE Trans. Comp.*, janvier 1975, p. 96-98.
- [49] L. O'GORMAN et A. C. SANDERSON, The converging squares algorithm: An efficient method for locating peaks in multidimensions, *IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intel.*, PAMI-6, n° 3, 1984, p. 280-288.
- [50] J. O'ROURKE, Motion detection using Hough Techniques, *IEEE Conf. on Pattern Recognition and Image Processing PRIP'81*, Dallas, 1981, p. 82-87.
- [51] J. O'ROURKE, Dynamically Quantized spaces for focusing the Hough transform, *Proc. 7th Intern. Joint Conf. Artificial Intel.*, Vancouver, 1981, p. 737-739.
- [52] J. O'ROURKE et K. R. SLOAN, Dynamic quantization: Two adaptative data structures for multidimensional spaces, *IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intel.*, PAMI-6, n° 3, mai 1984, p. 266-280.
- [53] S. A. PEEK, J. E. W. MAYHEW et J. P. FRISBY, Obtaining viewing distance and angle of gaze from vertical disparity using a Hough-type accumulator, *Image and Vision Computing*, 2, n° 4, novembre 1984, p. 180-190.
- [54] J. RADON, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Saechs. Akad. Wiss. Leipzig, Math-Phys. Kl.*, 69, 1917, p. 262-277.
- [55] G. RIVES, M. DHOME, J. T. LAPRESTE et M. RICHETIN, Detection of patterns in images from piecewise linear contours, *Pattern Recognition Letters*, 3, 1985, p. 99-104.
- [56] A. ROSENFELD, *Picture processing by computer*, Academic Press, New York, 1969.
- [57] R. SAMY et C. A. BOZZO, Extension de la transformation de Hough au traitement d'une séquence d'images, *Premier colloque Image*, Biarritz, mai 1984, p. 559-564.
- [58] J. L. C. SANZ, E. B. HINKLE et I. DINSTEN, On the computation and use of projections of digital images in general purpose image processing pipeline architectures, *Proc. ICASSP 85. IEEE Congress*, Tampa, Florida, mars 1985, p. 1515-1518.
- [59] L. SCHWARTZ, *Méthodes mathématiques pour les Sciences Physiques*, Hermann, Paris, 1961.
- [60] D. SHAPIRO, Transformations for the Computer Detection of Curves in Noisy Pictures, *Computer Graphics and image processing*, 4, 1975, p. 328-338.
- [61] S. D. SHAPIRO, Feature space transforms for curve detection, *Pattern Recognition*, 10-3, 1978, p. 129-143.
- [62] S. D. SHAPIRO, Transform Method of Curve Detection for Textured Image Data, *IEEE Trans. Comp.*, C-27, n° 3, mars 1978, p. 254-255.
- [63] S. D. SHAPIRO, Curve Formation Using Transforms for Pictures Governed by Differential Equation, *IEEE Trans. Syst. Man. and Cybernetics*, SMC-8-10, octobre 1978, p. 763-765.
- [64] S. D. SHAPIRO et A. IANNINO, Geometric Constructions for Predicting Hough Transform Performance, *IEEE Trans. Pattern Anal. and Math. Intel.*, PAMI-1, n° 3, juillet 1979, p. 310-317.
- [65] D. SHAPIRO, Use of the Hough Transform for image data compression, *Pattern Recognition*, 12, 1980, p. 333-337.
- [66] T. M. SILVERBERG, L. DAVIS et D. HARWOOD, An iterative Hough procedure for three dimensional object recognition, *Pattern Recognition*, 17, n° 6, 1984, p. 621-629.
- [67] J. SKLANSKY, On the Hough Technique for Curve Detection, *IEEE Trans. Comp. C-27*, n° 100, octobre 1978, p. 923-926.
- [68] K. R. SLOAN, Dynamically quantized pyramids, *Proc. 7th Intern. Joint Conf. Artificial Intel.*, Vancouver, 1981, p. 734-736.
- [69] G. C. STOCKMAN et A. K. AGRAWALA, Equivalence of Hough Curve Detection to Template Matching, *Comm. ACM*, 20, n° 11, novembre 1977, p. 820-822.
- [70] G. STOCKMAN, S. KOPSTEIN et S. BENETT, Matching images to models for registration and object detection via clustering, *IEEE, PAMI-4*, n° 3, mai 1982, p. 229-241.
- [71] P. R. THRIFT et S. M. DUNN, Approximating point-set images by line segments using a variation of the Hough Transform, *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 21, n° 3, 1983, p. 383-394.
- [72] R. TIMOUMI, Quelques aspects théoriques et numériques de la transformation de Hough, *Thèse de Docteur-Ingénieur*, Paris-XI, 27 juin 1985.
- [73] S. TSUJI et F. MATSUMOTO, Detection of Ellipses by a Modified Hough Transformation, *IEEE Trans. Comp.*, C-27-8, août 1978, p. 777-781.
- [74] H. WECHSLER et J. SKLANSKY, Finding the rib cage in chest radiographs, *Pattern Recognition*, Pergamon Press, 9, 1977, p. 21-30.
- [75] S. YAM et S. DAVIS, Image registration using generalized Hough transform, *IEEE Conf. on Pattern Recognition and Image Processing PRIP'81*, Dallas, 1981, p. 526-533.
- [76] F. O'GORMAN et M. B. CLOWES, Finding picture edges through collinearity of feature points, *3rd Int. Joint Conf. Art. Int.*, Stanford, Cal., août 1973, p. 543-555.