Application de la méthode des différences finies à la propagation acoustique sous-marine

Xavier LURTON et Michel TRAN-VAN-NHIEU
SINTRA, 1, avenue Aristide-Briand, 94117 ARCUEIL

Activités : Acoustique sous-marine.
Propagation.

La modélisation du champ acoustique en propagation sous-marine, est basée sur la résolution de l'équation d'Helmholtz pour un milieu inhomogène, associée à des conditions aux limites adéquates.

La description du milieu de propagation (lame d'eau, sédiment, socle rocheux) fait le plus souvent appel à une configuration stratifiée : les caractéristiques acoustiques [célérité (c), densité (ρ)] n'y dépendent que de l'immersion (z) : l'équation d'Helmholtz peut alors être traitée par variables séparées.

On est ramené à la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre en z :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho(z)} \frac{d\rho(z)}{dz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \mathrm{K}^2 \right) \varphi = 0.$$

Cette équation n'admet de solution exacte que pour certaines lois $\rho(z)$ et $c(z)$ particulières; les plus classiques sont les suivantes :

– $c(z) = c_0$ et $\rho(z) = \rho_0$ (milieu homogène); la solution s'exprime sous forme de fonctions circulaires;

– $c(z) = c_0 (1 - \alpha z)^{-1/2}$ et $\rho(z) = \rho_0$ (modèle de Gans, assimilable à un gradient de célérité pour les faibles valeurs de α); la solution s'exprime sous forme de fonctions d'Airy.

Pour les lois $\rho(z)$ et $c(z)$ correspondant à des configurations réelles, il est très délicat de définir une forme analytique approchée; une méthode fréquemment adoptée consiste à découper le profil bathycélérimétrique en strates où existent des solutions exactes et à raccorder les solutions locales ainsi obtenues.

Nous proposons de résoudre directement et numériquement l'équation différentielle ci-dessus, en abandonnant toute recherche d'une solution analytique puisqu'aussi bien les lois $\rho(z)$ et $c(z)$ ne sont dans la réalité pas réductibles à des fonctions simples. Un schéma aux différences finies centrées permet de traiter cette équation différentielle de façon à la fois simple et efficace; les conditions aux limites imposées concernent la continuité de la pression acoustique et de la vitesse normale aux interfaces eau-air, eau-sédiment et sédiment-socle.

Le formalisme du schéma adopté est très simple. On divise, sur l'axe Oz, l'intervalle [0, H] concerné (hauteur d'eau, épaisseur de sédiment...) en N intervalles de dimension $h = \mathrm{H/N}$; chaque maille (i) du découpage ainsi défini est caractérisé par les valeurs locales ρ_i et c_i des grandeurs acoustiques. L'équation différentielle s'écrit après discrétisation :

$$u_{i-1} = \mathrm{L}_i u_{i+1} + \mathrm{M}_i u_i,$$

où u_i est la valeur de $\varphi(z)$ pour la maille (i) :

$$\mathrm{L}_i = \frac{h \mathrm{A}_i + 2}{h \mathrm{A}_i - 2},$$

$$\mathrm{M}_i = \frac{h - 2h^2 \mathrm{B}_i}{2h \mathrm{A}_i},$$

$$\mathrm{A}_i = \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_i,$$

$$\mathrm{B}_i = \left(\frac{\omega}{c_i} \right)^2 - \mathrm{K}^2.$$

Le schéma permet de déterminer les valeurs de la fonction $\varphi(z)$ pour tout l'intervalle [0, H], à partir de valeurs initiales imposées par les conditions aux limites [et exprimées par l'introduction d'une maille fictive (N+1)].

Cette approche permet des gains de temps de calcul appréciables par rapport à d'autres méthodes lorsque l'équation de propagation ne possède pas de solution simple; elle permet de traiter *a priori* toute configuration stratifiée, et est applicable à un grand nombre de problèmes de propagation acoustique sous-marine.

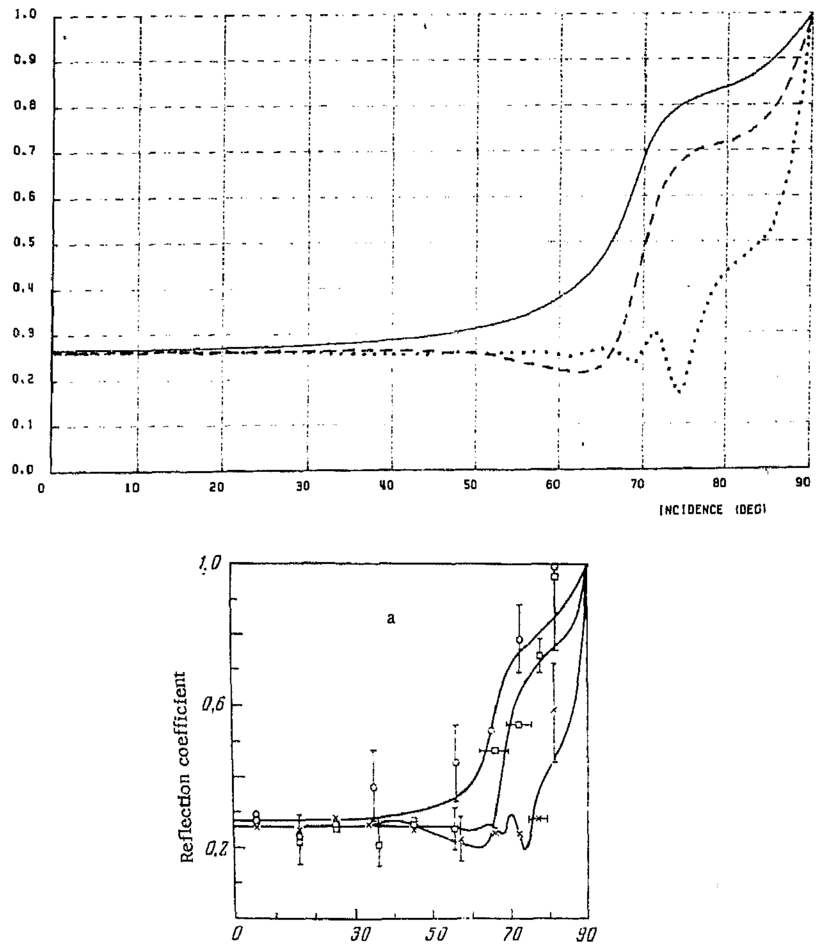

Fig. 1. — Exemple de coefficient de réflexion d'une onde plane, calculé par la méthode des différences finies (en haut), pour une couche sédimentaire fluide dissipative (gradient de densité = 329 S^{-1}) de 0,31 m d'épaisseur surmontant un socle fluide; les fréquences sont de 1 kHz (———), 4 kHz (— — —) et 16 kHz (.....). Les courbes du bas de la figure sont tirées de la référence [1] et ont été tracées à partir de la solution exacte du problème; elles sont présentées avec les résultats expérimentaux correspondants.

On propose deux exemples d'applications de cette méthode :

1. *Le coefficient de réflexion d'une onde plane sur une couche sédimentaire* est obtenu par résolution de l'équation d'Helmholtz dans le sédiment. Pour chaque angle de rasance choisi pour l'onde incidente, on impose la condition à l'interface sédiment-socle rocheux; cette condition initialise le schéma aux différences finies, qui permet de calculer la fonction d'onde à l'interface eau-sédiment; la condition de continuité à cette interface permet le calcul du coefficient de réflexion de l'onde plane.

On trouve ci-dessous un exemple d'évolution du module du coefficient de réflexion avec l'angle d'incidence, pour un sédiment dissipatif à bathycélérimétrie de type Gans; le résultat obtenu par notre méthode est présenté avec celui donné par Volovov [1], qui a développé la solution exacte du problème.

2. *Le calcul modal du champ acoustique* consiste en la recherche et le calcul des « modes propres » discrets satisfaisant à l'équation d'Helmholtz dans l'eau et aux conditions aux limites (fond et surface).

Le champ acoustique est obtenu par sommation cohérente des contributions de tous les modes propres.

Si on traite ce problème comme un problème classique aux valeurs propres où la solution doit vérifier simultanément l'équation de propagation et les conditions aux limites associées, on se heurte rapidement à des difficultés d'ordre numérique au fur et à mesure que la fréquence augmente. La méthode proposée consiste à considérer le nombre d'onde K comme paramètre et à relaxer la condition de nullité de pression à la surface; on aboutit alors à un système différentiel homogène du second ordre en z avec une condition limite au fond. Il existe donc pour chaque valeur de K, une solution unique à ce système, à une constante de proportionnalité près; les valeurs propres recherchées, K_n, sont celles pour lesquelles cette solution s'annule à la surface. De façon plus précise, la recherche des modes est effectuée par balayage de tout le spectre spatial émis; pour chaque nombre d'onde ainsi testé, on impose la condition de fond, qui initialise le schéma aux différences finies à partir duquel on détermine la valeur de la fonction d'onde

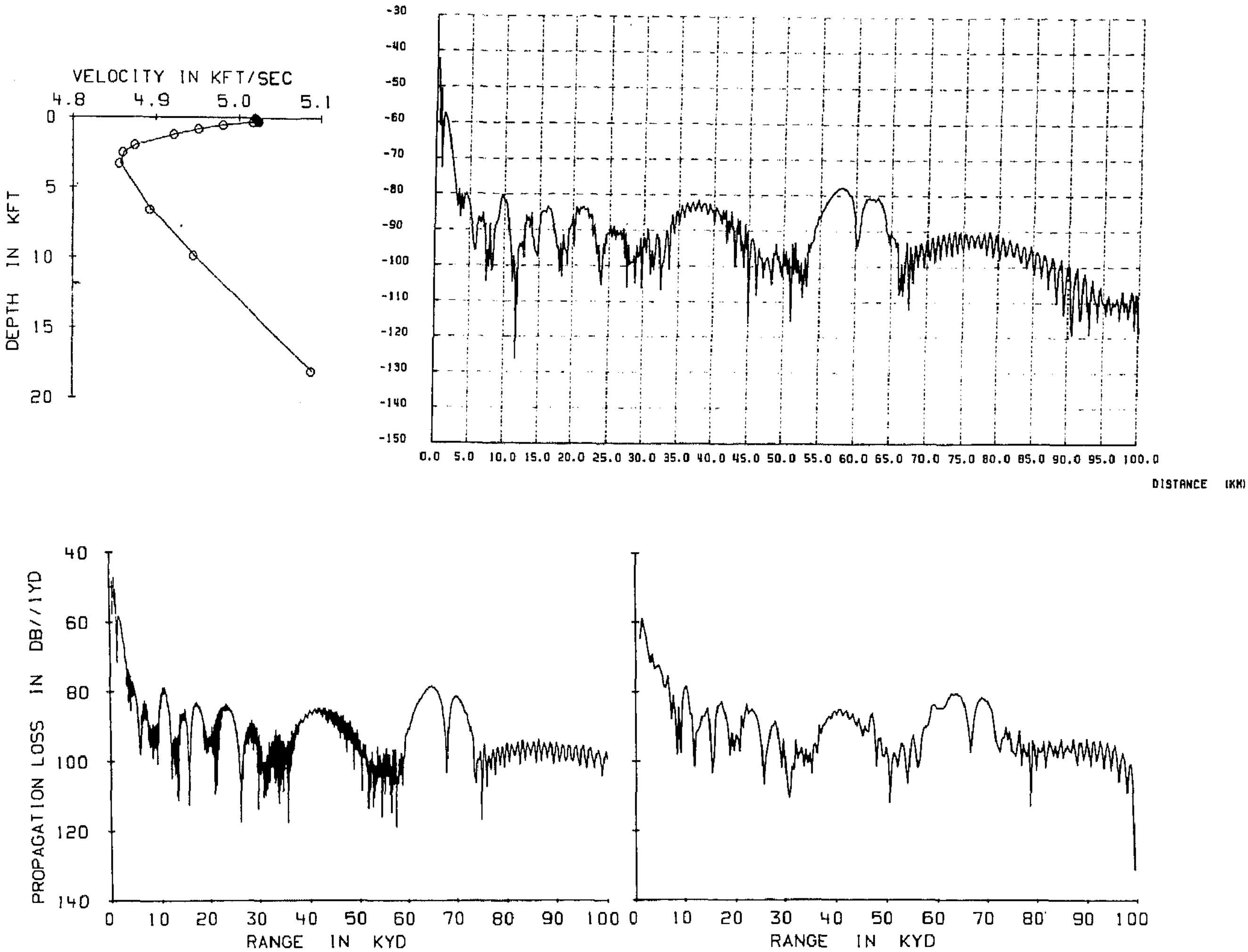

Fig. 2. — Exemple de calcul modal utilisant la méthode des différences finies (en haut à droite) pour la bathycélérimétrie reportée à gauche. Les courbes du bas ont été tirées de [2] et correspondant à un calcul par rayons généralisés (à gauche) et par transformée numérique de la fonction de Green (à droite).

à la surface; si la condition aux limites est réalisée (annulation de la pression), alors le nombre d'onde considéré correspond à un mode propre, et sa contribution est prise en compte dans le calcul du champ acoustique.

La modélisation du milieu est plus ou moins sophistiquée (prise en compte d'une couche sédimentaire, d'amortissement dans le sédiment et le socle, etc.); l'exemple présenté ci-dessous correspond à la configuration simple d'une lame d'eau à célérité variable surmontant un fond fluide homogène. Le champ acoustique est représenté sous forme de « pertes de propagation » fonction de la distance.

Notre résultat est présenté avec ceux obtenus par Weinberg [2] par deux autres méthodes : calcul par rayons généralisés et transformée numérique rapide de la fonction de Green du milieu (Fast Field Program). L'accord entre les trois méthodes est très satisfaisant.

Manuscrit reçu le 25 *septembre* 1985.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Volovov et Ivakin, Reflection of Sound from a bottom with sound velocity and density gradients, *Sov. Phys. Acoust.*, 26, n° 2, 1980, p. 106-109.

[2] Weinberg, Application of ray theory to acoustic propagation in horizontally stratified oceans, *J.A.S.A.*, 58, n° 1, 1975, p. 97-109.