

Bornes de Cramer-Rao

en traitement d'antenne

Première partie : Formalisme

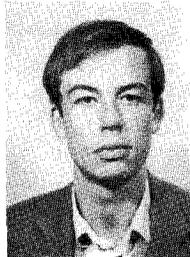
Cramer-Rao bounds and array processing Part one : Formalism



Laurent KOPP

THOMSON-SINTRA (ASM), BP n° 53, 06801 CAGNES-SUR-MER
CEDEX

X (71), Ingénieur ENST. A THOMSON depuis 1980 en tant qu'Ingénieur d'études en traitement du signal.
Thèmes de recherche: méthodes adaptatives et Haute-Résolution dans le domaine du sonar passif, Évaluation des performances des systèmes sonars.



Dominique THUBERT

THOMSON-SINTRA, Activités Sous-Marines, 1, avenue Aristide-Briand,
94117 ARCUEIL CEDEX

Diplômé ESPCI, spécialisation Automatique ESE, Ingénieur d'études Travaux de recherche sur l'évaluation des performances en traitement d'antenne pour des applications sonar.

RÉSUMÉ

Pour définir un traitement d'antenne il est souvent utile d'avoir une idée *a priori* des limites de précision pouvant être atteintes, telles qu'elles peuvent être calculées par le théorème de Cramer-Rao. La technique de calcul de ces bornes pour un processus vectoriel gaussien n'est pas nouvelle (en particulier elle est bien connue Outre-Atlantique) mais peut être le formalisme associé à l'utilité des résultats qu'on peut en obtenir sont-ils insuffisamment connus.

Cet article constitue la première partie d'un essai de synthèse sur le sujet dans laquelle le formalisme est présenté, la seconde partie fera l'objet d'un second article et aura trait à quelques applications en acoustique sous-marine.

MOTS CLÉS

Traitement d'antenne, bornes de Cramer-Rao, bruiteur.

SUMMARY

When designing an array processing method it is often useful to have an a priori idea about the limitations of the accuracies which may be achieved as provided by the Cramer-Rao theorem. The general technic of computation of these bounds for gaussian multivariate process is certainly not new (specially in USA) but may be the formalism and the usefulness of the results deserve a bit of advertising.

This paper is the first of a tutorial on the subject where we have tried to introduce the formalism in closed form; a second paper will discuss a few applications of interest in underwater acoustic.

KEY WORDS

Array processing, Cramer-Rao bound.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction

2. Formalisme général

- 2.1. Théorème de Cramer-Rao
- 2.2. Cas gaussien
- 2.3. Sonar passif

3. Problème à un bruiteur

- 3.1. Modèle général de propagation
- 3.2. Cas du modèle « retard pur »
- 3.3. Cas de l'antenne rectiligne à capteurs équidistants

4. Conclusions

5. Remerciements

Bibliographie

Annexes

Annexe A: Matrice de Fisher dans le cas gaussien

Annexe B: Matrice de Fisher pour le cas d'un seul bruiteur dans le modèle « retard pur » (en passif)

Annexe C: Liaison entre la matrice de Fisher et l'ambiguïté

Annexe D: Matrice de Fisher pour l'antenne rectiligne périodique

1. Introduction

D'une façon générale la borne de Cramer-Rao permet de fixer une limite inférieure à la précision qu'il est possible d'atteindre dans l'estimation d'un ou de plusieurs paramètres, sur la base d'une observation de distribution statistique connue (en fonction paramètres).

Le calcul de cette borne en traitement du signal est souvent intéressant :

- Dans des problèmes théoriques, pour s'assurer qu'un estimateur est de variance minimale ou bien qu'au contraire il y a place pour des améliorations.
- Dans les applications pratiques où il s'agit de concevoir un système devant répondre à des spécifications, il s'agit alors de s'assurer que les performances demandées ne sont pas *a priori* hors d'atteinte avec les observations envisagées.

De plus il est souvent plus simple de calculer les bornes de Cramer-Rao que la variance d'un estimateur.

L'objet de cet article est le calcul pratique de ces bornes dans les problèmes de traitement d'antenne. Pour fixer les idées les situations décrites seront relatives aux problèmes sonar (et plus particulièrement le sonar passif) mais la méthode est de portée plus générale et peut s'appliquer à d'autres domaines (acoustique aérienne, antennes radio-électriques, analyse spectrale,...) partout où est utilisée une observation vectorielle gaussienne (les composantes étant indicées par le temps où les positions spatiales) et où le modèle des signaux entre dans le cadre présenté plus loin.

Dans le contexte du traitement d'antenne en acoustique sous-marine on cherche à estimer des paramètres géométriques (angles, distances) de cibles ou de bruiteurs à partir d'une observation composée des

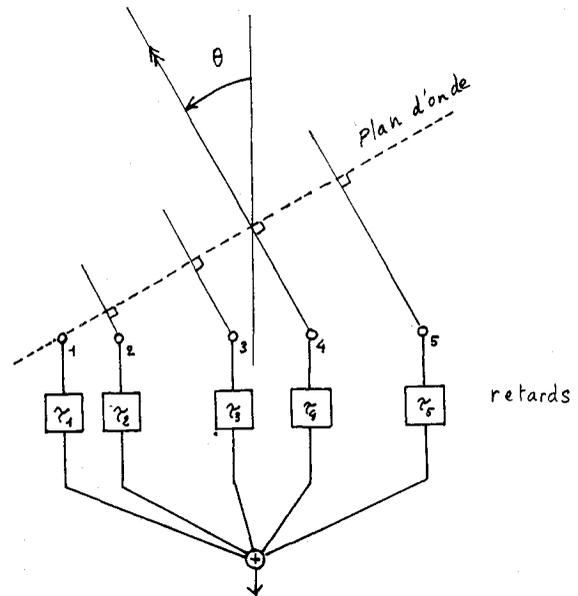


Fig. 1 a. — Une voie « classique » préformée dans la direction θ , les retards τ_1, \dots, τ_5 sont choisis de manière à compenser les retards différentiels de propagation entre capteurs.

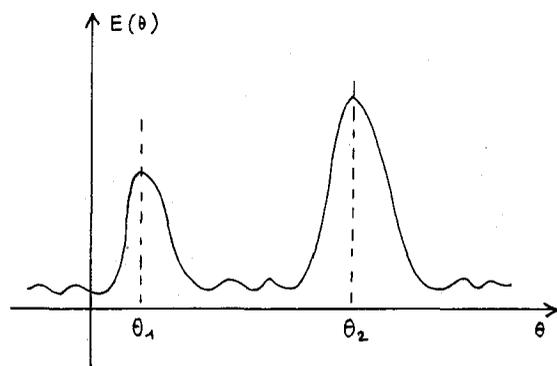


Fig. 1 b. — Énergie de sortie d'une voie préformée en fonction de sa direction; θ_1 et θ_2 sont des estimations des directions des bruiteurs.

signaux reçus par l'ensemble des capteurs constituant l'antenne sur un intervalle de temps limité.

Le traitement (dit « classique ») pour estimer, par exemple, le gisement d'un bruiteur par un sonar passif consiste à comparer l'énergie de sortie d'un ensemble de « voies » préformées dans des directions spécifiées et à choisir comme estimation du gisement la direction de la voie correspondant à l'énergie maximale.

Une voie est préformée dans une direction en sommant, après remise en phase, les signaux reçus par les capteurs, les lois de remise en phase étant entièrement déterminées par la propagation, la géométrie de l'antenne et la direction de « pointage » désirée (fig. 1 a).

Lorsque ces « voies » balayent toutes les directions de l'espace et qu'on enregistre l'énergie de sortie de ces voies, on forme ainsi une sorte d'image du champ sonore (fig. 1 b) d'une façon assez analogue à l'image réalisée par un système optique tel qu'un télescope.

Plus généralement, quand le bruiteur est à une distance finie (c'est-à-dire dans la zone de Fresnel de l'antenne ou en champ propre) les voies pourront être préformées non seulement en gisement mais également en distance (focalisation).

Le traitement décrit ci-dessus est l'estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance (signaux gaussiens) de la position d'un bruiteur par une antenne passive (c'est-à-dire en utilisant uniquement les signaux rayonnés par les bruiteurs) dans les conditions suivantes :

- le bruiteur est ponctuel et unique;
- le bruit de fond est spatialement « blanc » (c'est-à-dire incohérent (équidistribué et non corrélé sur les capteurs));
- l'échantillonnage de l'espace par les voies est infiniment fin;
- les capteurs sont ponctuels, transparents et omnidirectionnels.

On peut alors montrer que cet estimateur est sans biais et de variance minimale (c'est un estimateur efficace); sa précision est alors donnée par la borne de Cramer-Rao.

Dans des situations plus complexes (en particulier lorsqu'il y a plusieurs bruiteurs), le traitement classique précédent n'est plus efficace (il n'est d'ailleurs pas adapté) et la borne de Cramer-Rao n'est pas atteinte: ceci montre qu'il y a mieux à faire.

Cet article est organisé en deux parties :

- tout d'abord la présentation d'un essai de synthèse sur le formalisme de calcul utilisé pour évaluer la borne de Cramer-Rao;
- ensuite la discussion de quelques exemples pratiques où l'utilisation du formalisme permet d'aboutir de façon simple à des réponses utiles: ceci fera surtout l'objet de la seconde partie de cette synthèse présentée dans un autre article.

Historiquement, les premiers calculs de la borne de Cramer-Rao en traitement d'antenne se trouvent dans la référence [1], la lourdeur du formalisme utilisé

explique probablement la lenteur de diffusion des résultats.

Une partie significative de cet article est donc consacrée à la présentation d'un formalisme matriciel qui nous semble bien adapté au problème posé, l'effort (marginal) nécessaire pour assimiler les notations sera largement récompensé par le degré de généralité obtenu.

Pour introduire ce formalisme, nous sommes partis du cas général gaussien que nous avons ensuite « spécialisé » de plus en plus jusqu'à aboutir aux formules permettant de calculer les précisions de mesure de la distance ou du gisement d'un bruiteur. Cette façon de faire permet de limiter à chaque étape les calculs à faire et il nous semble que la lourdeur du formalisme initial peut s'expliquer par la volonté de vouloir traiter directement le problème « spécialisé » final noyant ainsi la généralité du résultat dans les détails non significatifs.

Disposant alors d'un formalisme adapté, nous avons ensuite essayé d'en illustrer l'intérêt sur des exemples pratiques. Dans la première partie qui constitue le présent article, seuls seront détaillés quelques points concernant le problème à un bruiteur. La seconde partie, qui fera l'objet d'un second article, considérera un plus grand nombre d'applications.

Enfin, avant d'entrer dans le vif du sujet, nous voudrions insister sur ce qui nous semble significatif dans cette présentation: ce ne sont pas tant les résultats qui nous intéresseront ici que la démarche suivie. C'est pourquoi nous demandons aux lecteurs de nous pardonner d'avoir bien souvent évité de développer la discussion de certains points.

2. Formalisme général

On commence par rappeler, en toute généralité, le théorème de Cramer-Rao puis on considère le cas des statistiques gaussiennes et complexe-gaussiennes pour finalement discuter du problème du sonar passif.

2.1. THÉORÈME DE CRAMER-RAO

Pour plus de détails et de rigueur concernant les conditions d'utilisation de ce théorème, il est conseillé de consulter des ouvrages spécialisés [2-3].

Si une observation χ (scalaire, vectorielle, matricielle) est distribuée sur un espace d'observation Ω suivant une loi de probabilité possédant une densité notée :

$$p_{\chi}(\chi/\beta); \chi \in \Omega$$

dépendant d'un ensemble (fini) de paramètres $\{\beta_1, \dots, \beta_q\}$ mis sous forme d'un vecteur β et Ω étant indépendant de β , alors pour tout estimateur sans biais $\hat{\beta}(\chi)$, de matrice de covariance :

$$V = E \{ (\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T \}$$

$(\hat{\beta} - \beta)^T$ désignant le vecteur ligne transposé de $(\hat{\beta} - \beta)$ on a :

$$(1) \quad V - F^{-1} \geq 0,$$

abus de notation pour dire que la matrice $V - F^{-1}$ est définie non négative où F est la matrice de Fisher d'ordre q (q est le nombre de paramètres β) dont les composantes s'écrivent en fonction de la vraisemblance logarithmique :

$$(2) \quad \mathcal{L} = \text{Ln}(p_x(\chi/\beta))$$

sous la forme :

$$(3) \quad F_{kl} = -E \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta_k \partial \beta_l} \right\}$$

Par la suite on utilisera souvent la notation :

$$(4) \quad F(\beta_k, \beta_l) = F_{kl}$$

De plus on notera :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_k \chi = \frac{\partial \chi}{\partial \beta_k} \\ \text{et} \\ \partial_{kl}^2 \chi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \beta_k \partial \beta_l} \end{array} \right.$$

La formule (3) s'écrit donc :

$$(6) \quad F(\beta_k, \beta_l) = -E \{ \partial_{kl}^2 \mathcal{L} \}$$

2. 2. CAS GAUSSIEN

Partant de la formule (6) générale on s'intéresse ici au cas où l'observation est un vecteur gaussien de moyenne m et de covariance C .

Il est compréhensible que dans ce cas la matrice de Fisher ne dépende que des propriétés de m et C .

On démontre de façon précise (annexe A) que le terme général de la matrice de Fisher peut s'écrire :

$$(7) \quad F(\beta_k, \beta_l) = \partial_k m^T C^{-1} \partial_l m - \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (\partial_k C^{-1}) (\partial_l C) \}$$

Cette formule fait apparaître la contribution de deux termes, en écrivant :

$$(8) \quad F(\beta_k, \beta_l) = F_{kl}^{(A)} + F_{kl}^{(P)}$$

avec

$$(9) \quad F_{kl}^{(A)} = \partial_k m^T C^{-1} \partial_l m$$

et

$$(10) \quad F_{kl}^{(P)} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ (\partial_k C^{-1}) (\partial_l C) \}$$

Il semble judicieux, dans le contexte du sonar, de dénommer « actif pur » le terme $F_{kl}^{(A)}$ et « passif pur » le terme $F_{kl}^{(P)}$.

En effet, dans un sonar actif, l'information utile pour localiser un écho est contenue dans les moments d'ordre 1 de l'observation tandis que les moments d'ordre 2 correspondent au bruit (de fond ou de réverbération) et on a $F_{kl}^{(P)} = 0$.

Par contre dans un sonar passif, les moments d'ordre 1 sont nuls (signaux centrés) et ne contiennent aucune information sur les positions des bruiteurs, on a donc $F_{kl}^{(A)} = 0$. Enfin, dans certaines applications les deux termes peuvent intervenir simultanément.

2. 3. SONAR PASSIF

Nous allons maintenant nous intéresser de façon détaillée au cas du sonar passif : c'est-à-dire préciser la structure de la matrice C (m étant nul) et décrire les paramètres β .

Il est en pratique plus simple de travailler dans le domaine fréquentiel plutôt que temporel. L'observation qui sera utilisée ici est schématisée sur la figure 2 : le signal est échantillonné (avec les précautions d'usage concernant le repliement spectral), numérisé (on néglige les effets de la quantification), puis transformé linéairement à l'aide d'une TFD (Transformation de Fourier Discrète) sur une tranche temporelle de longueur T correspondant à N échantillons.

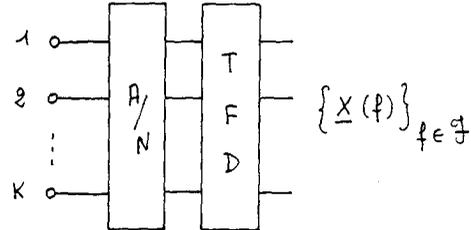


Fig. 2. - Définition de l'observation. Les sorties des K capteurs sont échantillonnées, numérisées, et transformées par TFD sur une tranche T : on obtient une suite de vecteurs complexes.

On obtient ainsi un ensemble de vecteurs $\{ \chi(f) \} f \in F$ F complexes pour un ensemble F de fréquences.

Pourvu que la tranche temporelle T soit assez longue (c'est-à-dire la résolution spectrale assez fine) on a deux propriétés intéressantes :

- les vecteurs $\chi(f_1)$ et $\chi(f_2)$ sont non corrélés pour $f_1 \neq f_2$;

- les vecteurs $\chi(f)$ sont distribués suivant une loi de probabilité « complexe-gaussienne ».

Rappelons [10, 14] que pour qu'un vecteur complexe :

$$\chi = \chi_R + i \chi_I$$

soit distribué suivant une loi complexe-gaussienne, il faut tout d'abord que χ_R et χ_I soient gaussiens conjointement (ce qui est le cas ici en raison de l'hypothèse que les signaux sont gaussiens et du fait de

la linéarité de la TFD), mais il faut aussi que les matrices de covariances vérifient :

$$\begin{aligned} E\{\chi_R \chi_R^T\} &= E\{\chi_I \chi_I^T\} \\ E\{\chi_R \chi_I^T\} &= -E\{\chi_I \chi_R^T\} \end{aligned}$$

Remarque : Nous utilisons ici la dénomination « complexe-gaussienne » au lieu de « complexe-circulaire ».

Cette condition de symétrie n'est pas réalisée exactement par une TFD de longueur finie cependant l'approximation est très bonne dès que T est « assez grand » (en pratique une valeur $N > 100$ est généralement suffisante).

Cette condition permet une écriture de la densité de probabilité du couple (χ_R, χ_I) sous une forme compacte :

$$(11) \quad \begin{cases} p_{\chi}(\mathbf{x}) = |\pi \Gamma|^{-1} \exp(-\text{Tr}(\hat{\Gamma} \Gamma^{-1} \mathbf{x} \mathbf{x}^+)) \\ \hat{\Gamma} = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^+ \end{cases}$$

Ici, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ et \mathbf{x}^+ désignera le vecteur ligne transposé et complexe conjugué de \mathbf{x} .

La matrice Γ est la matrice de covariance $\chi(f)$ soit :

$$(12) \quad \Gamma = E\{\chi(f) \chi^+(f)\} = E\{\hat{\Gamma}\}$$

Si T est assez grand (problème du biais d'estimation), cette matrice est la matrice interspectrale des signaux hydrophoniques.

Le lecteur pourra sans difficultés étendre les résultats de la section 2.2 à ce cas particulier; le terme général de la matrice de Fisher s'écrira :

$$(13) \quad F(\beta_k, \beta_l) = -\text{Tr}[(\partial_k \Gamma^{-1})(\partial_l \Gamma)]$$

Ceci quand on utilise seulement une fréquence. Si on utilise l'ensemble des fréquences d'une bande B, de par la propriété d'indépendance des observations aux diverses fréquences, la vraisemblance logarithmique s'écrit :

$$(14) \quad \mathcal{L}_B = \sum_{f \in B} \mathcal{L}(f)$$

d'où la même propriété pour la matrice de Fisher :

$$(15) \quad F_B = \sum_{f \in B} F(f)$$

Approximant dans (15) la somme discrète par une intégrale on peut écrire

$$F_B = \frac{1}{\delta f} \sum_{f \in B} F(f) \delta f = T \int_B F(f) df$$

$\delta f = 1/T$ est la résolution de l'analyse spectrale. Ce qui s'écrit encore :

$$(16) \quad F_B = BT \langle F(f) \rangle$$

où la notation $\langle F(f) \rangle$ se lit « moyenne en fréquence » :

$$\langle F(f) \rangle = \frac{1}{B} \int_B F(f) df$$

En bref, pour calculer la borne de Cramer-Rao en passif il faut s'intéresser au terme (13) à la fréquence f puis l'intégrer suivant (16) dans la bande B d'intérêt.

Le calcul peut maintenant être poursuivi en précisant la nature des paramètres contrôlant l'observation, c'est-à-dire la dépendance de Γ vis-à-vis des paramètres. Pour alléger l'écriture la fréquence f est sous-entendue partout où elle n'est pas indispensable.

Nous nous plaçons dans une situation dans laquelle le champ de bruit est engendré d'une part par p bruiteurs ponctuels rayonnant des signaux non corrélés et d'autre part par un bruit de fond.

Les signaux reçus par les K hydrophones (ponctuels, transparents mais pas nécessairement omnidirectionnels) sont donc la somme des contributions des bruiteurs et du bruit de fond (milieu linéaire et invariant, par la suite il sera généralement isocélère).

La matrice interspectrale des signaux reçus par les capteurs s'écrit alors sous la forme :

$$(17) \quad \Gamma = \sum_{i=1, p} \gamma_i \mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{d}^+(\boldsymbol{\theta}_i) + \sigma J$$

où on reconnaît dans cette formule :

(a) La contribution des bruiteurs

$$(18) \quad \gamma_i \mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{d}^+(\boldsymbol{\theta}_i); \quad i = 1, p$$

γ_i désigne la densité spectrale du signal issu du i -ième bruiteur reçu par le premier capteur pris comme référence.

$\mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}_i)$ est un vecteur dénommé « vecteur position » du i -ième bruiteur : ses composantes décrivent les fonctions de transfert relatives entre le bruiteur de position $\boldsymbol{\theta}_i$ et les divers capteurs (fonctions de transfert normalisées par rapport au capteur de référence).

$\boldsymbol{\theta}_i$ est un vecteur qui rassemble les r paramètres géométriques nécessaires pour décrire la position du i -ième bruiteur (gisement, immersion, distance).

L'hypothèse physique sous-jacente dans cette modélisation est ce qui est nommé la « cohérence spatiale parfaite » (les signaux reçus par tous les capteurs sont des versions filtrées du signal émis par le bruiteur par des filtres linéaires invariants) le vecteur $\mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}_i)$ décrit en fait la surface d'onde échantillonnée par l'antenne.

C'est une hypothèse usuelle en traitement d'antenne où, en général, on se restreint même au cas des ondes planes ou sphériques dans la zone de Fresnel ou de Fraunhofer, non nécessaire ici.

(b) Et la contribution du bruit de fond :

$$(19) \quad \sigma J$$

où σ désigne la densité spectrale de puissance du bruit de fond, mesuré sur le capteur de référence, et J la matrice de cohérence spatiale du bruit de fond.

Ici on supposera toujours que le bruit de fond est incohérent ($J=I$, la matrice identité). Dans la pratique cette hypothèse n'est pas toujours réaliste mais elle n'est pas contraignante dans le présent contexte: si le bruit de fond n'était pas incohérent on pourrait réaliser un « blanchiment spatial » en effectuant un changement de base de capteurs c'est-à-dire une transformation matricielle linéaire inversible dans laquelle l'observation utilisée $\chi(f)$ est transformée en $Y(f)$ par:

$$Y(f) = \mathcal{H} \chi(f)$$

\mathcal{H} étant choisie telle que $\mathcal{H} J \mathcal{H}^+ = I$, ce qui est toujours possible si J est inversible et positive (c'est toujours le cas).

La matrice de covariance de $Y(f)$ s'écrit:

$$\Gamma_y = E\{Y(f)Y^+(f)\} = \mathcal{H} \Gamma \mathcal{H}^+$$

soit

$$(20) \quad \sum_{i=1, p} \gamma_i (\mathcal{H} \mathbf{d}(\theta_i)) (\mathcal{H} \mathbf{d}(\theta_i))^+ + \sigma I$$

En posant: $\mathbf{d}^B(\theta_i) = \mathcal{H} \mathbf{d}(\theta_i)$, on obtient:

$$\Gamma_y = \sum_{i=1, p} \gamma_i \mathbf{d}^B(\theta_i) (\mathbf{d}^B(\theta_i))^+ + \sigma I$$

c'est-à-dire une forme analogue à (17).

Finalement les paramètres du problème sont ceux qui contrôlent la matrice Γ , c'est-à-dire:

$$\sigma, \quad (\gamma_i)_{i=1, p} \quad \text{et} \quad (\theta_i)_{i=1, p}$$

Pour obtenir les termes de la matrice de Fisher (13) il suffit maintenant de calculer les diverses dérivées:

D'après la forme de (17) on a:

$$(21 a) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma} = I$$

$$(21 b) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_i} = \mathbf{d}_i \mathbf{d}_i^+$$

$$(21 c) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial (\theta)_j} = \gamma_j \{ \mathbf{d}_j \mathbf{U}_{i,j}^+ + \mathbf{U}_{i,j} \mathbf{d}_j^+ \}$$

où on note $\mathbf{d}_i = \mathbf{d}(\theta_i)$ et

$$(22) \quad \mathbf{U}_{i,j} = \left(\frac{\partial \mathbf{d}(\theta)}{\partial (\theta)_j} \right)_{\theta=\theta_i}$$

En reportant les expressions (21 a-c) dans (13), on obtient les résultats du tableau I.

Dans le cadre du modèle symbolisé par (17) ces relations permettent de calculer la matrice de Fisher d'un problème de traitement passif d'antenne pour des configurations générales de bruiteurs, des géométries

TABEAU I

Matrice de Fisher, cas général (sonar passif)
[Modèle de la formule (17)]

$$F(\sigma, \sigma) = \text{Tr}(\Gamma^{-2})$$

$$F(\sigma, \gamma_k) = |\Gamma^{-1} \mathbf{d}_k|^2$$

$$F(\sigma, (\theta)_j) = 2 \gamma_j \Re \{ \mathbf{d}_j^+ \Gamma^{-1} \mathbf{U}_{i,j} \}$$

$$F(\gamma_k, \gamma_l) = |\mathbf{d}_k^+ \Gamma^{-1} \mathbf{d}_l|^2$$

$$F(\gamma_k, (\theta)_j) = 2 \gamma_j \Re \{ (\mathbf{d}_k^+ \Gamma^{-1} \mathbf{d}_j) (\mathbf{U}_{i,j}^+ \Gamma^{-1} \mathbf{d}_k) \}$$

$$F((\theta)_p, (\theta)_q) = 2 \gamma_p \gamma_q \Re \{ (\mathbf{U}_{i,p}^+ \Gamma^{-1} \mathbf{d}_q) \times (\mathbf{U}_{k,i} \Gamma^{-1} \mathbf{d}_p) + (\mathbf{d}_i^+ \Gamma^{-1} \mathbf{d}_q) (\mathbf{U}_{k,i}^+ \Gamma^{-1} \mathbf{U}_{i,j}) \}$$

Notations

$|x| = (x^+ x)^{1/2}$, norme de x .

$\Re \{ z \}$, partie réelle de $z \in \mathcal{C}$

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{d}(\theta_k)$$

$$\mathbf{U}_{i,j} = \left(\frac{\partial \mathbf{d}(\theta)}{\partial (\theta)_j} \right)_{\theta=\theta_i}$$

$(\theta)_j = j$ -ième composante de θ_p , vecteur paramétrant la position du i -ième bruiteur.

d'antenne quelconques et des conditions complexes de propagation. En particulier aucune hypothèse n'est nécessaire à ce stade sur la position des bruiteurs qui peuvent se trouver en champ proche ou lointain. La propagation peut aussi comporter plusieurs trajets à condition qu'ils soient totalement corrélés. Si les trajets ne sont pas totalement corrélés, le formalisme peut être généralisé, la seconde partie de cet article en donnera un exemple pour deux trajets décorrélés.

3. Problème à un bruiteur

Pour l'instant, les formules obtenues ne sont pas très faciles à interpréter et leur utilisation est plutôt du ressort de calculs sur ordinateur. Dans cette section, ces formules générales vont être exploitées pour aboutir à des expressions explicites des variances limites d'estimation dans des cas particuliers.

3. 1. MODÈLE GÉNÉRAL DE PROPAGATION

Dans le cas particulier où seul un bruiteur est présent, la matrice interspectrale s'écrit:

$$(23) \quad \Gamma = \gamma \mathbf{d} \mathbf{d}^+ + \sigma I$$

L'expression de la matrice de Fisher devient plus explicite car on dispose d'une expression de Γ^{-1} par le lemme d'inversion de Sherman-Morrisson [11] (il suffit de vérifier que l'expression de Γ^{-1} ci-dessous est correcte):

$$(24) \quad \Gamma^{-1} = \frac{1}{\sigma} \left(I - s \frac{\mathbf{d} \mathbf{d}^+}{1 + s \mathbf{d}^+ \mathbf{d}} \right)$$

SYNTHÈSES

avec

$$s = \frac{\gamma}{\sigma}$$

De plus Γ possède $(K-1)$ valeurs propres toutes égales à σ et une valeur propre égale à :

$$(25) \quad \lambda = \sigma + \gamma \mathbf{d}^+ \mathbf{d}$$

Reportant (24) et (25) dans le tableau I on trouve :

$$(26a) \quad \text{Tr}(\Gamma^{-2}) = (K-1) \sigma^{-2} + \lambda^{-2}$$

$$(26b) \quad \Gamma^{-1} \mathbf{d} = \lambda^{-1} \mathbf{d}$$

A partir de (26a-b), on obtient le tableau II qui permet d'obtenir la matrice de Fisher dans la situation la plus générale à un seul bruiteur [toujours dans le cadre du modèle symbolisé par (17)].

TABLEAU II
<i>Éléments de la matrice de Fisher dans le problème à un bruiteur</i>
$F(\sigma, \sigma) = (K-1) \sigma^{-2} + \lambda^{-2}$
$\lambda = (\sigma + \gamma \mathbf{d}^+ \mathbf{d})$
$F(\sigma, \gamma) = (\mathbf{d}^+ \mathbf{d}) \lambda^{-2}$
$F(\sigma, \theta)_j = 2\gamma \lambda^{-2} \Re \{ \mathbf{U}_j^+ \mathbf{d} \}$
$F(\gamma, \gamma) = (\mathbf{d}^+ \mathbf{d})^2 \lambda^{-2}$
$F(\gamma, \theta)_j = 2\gamma \lambda^{-2} (\mathbf{d}^+ \mathbf{d}) \Re \{ \mathbf{U}_j^+ \mathbf{d} \}$
$F((\theta)_k, (\theta)_l) = 2\gamma^2 \lambda^{-2} \Re \{ (\mathbf{U}_k^+ \mathbf{d})(\mathbf{U}_l^+ \mathbf{d}) + \frac{\lambda}{\sigma} (\mathbf{d}^+ \mathbf{d})(\mathbf{U}_l^+ \mathbf{U}_k) - \frac{\gamma}{\sigma} (\mathbf{d}^+ \mathbf{d})(\mathbf{U}_l^+ \mathbf{d})(\mathbf{d}^+ \mathbf{U}_k) \}$

Remarque

Comparé au tableau I, \mathbf{U}_j est une forme contractée de $\mathbf{U}_{i,j}$ puisque l'indice i réfère nécessairement au seul bruiteur présent.

3.2. CAS DU MODÈLE « RETARD PUR »

Pour aller un peu plus loin, il faut préciser la forme du vecteur $\mathbf{d}(\theta)$. On supposera que les capteurs sont omnidirectionnels, les gains des capteurs indépendants de la fréquence et les atténuations différentielles entre capteurs négligeables (bruiteurs suffisamment lointains). La propagation se réduit alors à un retard pur et on peut écrire :

$$\mathbf{d} = \text{col} \{ \exp(i \omega \tau_j(\theta)) \}_{j=1, K}$$

où

$$\omega = 2\pi f$$

$\tau_j(\theta)$ désigne le retard de propagation de l'onde rayonnée par le bruiteur de position θ entre le capteur j et un point de référence (par exemple le premier capteur, ou bien le barycentre des capteurs).

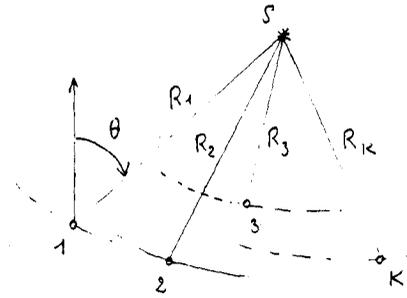


Fig. 3. — Propagation isocèle modèle « retard-pur »

$$\mathbf{d} = \text{col} [\exp(i \omega \tau_k(\theta))]_{k=1, K}$$

$$\tau_k(\theta) = \frac{R_k - R_1}{C}$$

R_k : distance du capteur k au bruiteur S ; C : célérité du son.

On démontre alors (Annexe B) que dans la matrice de Fisher il y a un découplage entre les termes de puissance (σ et γ) et les termes géométriques θ (les résultats sont résumés sur le tableau III).

TABLEAU III
<i>Éléments de la matrice de Fisher pour le problème à un bruiteur pour des capteurs omnidirectionnels et un bruiteur « lointain ».</i>
$F(\sigma, \sigma) = \frac{K-1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2(1+KS)^2}$
$S = \frac{\gamma}{\sigma}; \quad \mathbf{d}^+ \mathbf{d} = K$
$F(\sigma, \gamma) = \frac{K/\sigma^2}{(1+KS)^2}$
$F(\sigma, \theta) = F(\gamma, \theta) = 0$
$F(\gamma, \gamma) = \frac{K^2/\sigma^2}{(1+KS)^2}$
$F(\theta_k, \theta_l) = \frac{2S^2}{1+KS} \Re \{ K \mathbf{U}_l^+ \mathbf{U}_k - (\mathbf{U}_l^+ \mathbf{d})(\mathbf{d}^+ \mathbf{U}_k) \}$

La sous-matrice de Fisher relative aux termes géométriques θ s'écrit :

$$(27) \quad F(\theta, \theta) = \eta(f) \mathcal{G}$$

avec :

$$(28) \quad \eta(f) = \frac{8\pi^2 f^2 S^2}{1+KS}$$

où $S = \gamma/\sigma$ et \mathcal{G} est une matrice purement « géométrique » indépendante de la fréquence et des niveaux spectraux [voir (B.9)].

Ce découplage disparaît dès que le nombre de bruiteurs est supérieur à deux.

L'intérêt de ce découplage apparaît lorsqu'on veut calculer la matrice de Fisher correspondant à une observation dans une bande B de fréquences.

D'après (16) et (27), on obtient :

$$(29) \quad F_B(\theta, \theta) = B \langle \eta(f) \rangle \mathcal{G}$$

Il est intéressant de relier \mathcal{G} à la notion sans doute plus familière de diagramme d'ambiguïté spatiale (ou fonction de directivité). La directivité d'une formation de voie classique pointée vers θ_0 est la fonction de θ :

$$(30) \quad \mathcal{D}(\theta, \theta_0) = \frac{1}{K^2} |\mathbf{d}^+(\theta) \mathbf{d}(\theta_0)|^2$$

En annexe C, on relie la matrice \mathcal{G} à la matrice $(\partial^2 \mathcal{D})$ dites « Hessienne » de $\mathcal{D}(\theta, \theta_0)$ par rapport à θ en θ_0 par (C. 8).

$$(31) \quad \mathcal{G} = -\frac{K^2}{2\omega^2} (\partial^2 \mathcal{D})$$

La matrice \mathcal{G} semble dépendre de la fréquence, mais en fait $(\partial^2 \mathcal{D})$ est proportionnelle à ω^2 (Annexe C).

Dans le cas où on a un seul paramètre géométrique, il est usuel de définir la quantité notée $2\theta_3$ qui mesure la largeur à mi-hauteur (ou à 3 dB) du diagramme d'ambiguïté. Cet « angle » est aussi connu sous le nom d'angle de « Cramer-Rao » [13].

Dans une approximation parabolique de la fonction $\mathcal{D}(\theta, \theta_0)$, on peut écrire, pour des écarts en θ vérifiant $|\theta - \theta_0| \ll \theta_3$:

$$(32) \quad \mathcal{D}(\theta, \theta_0) = 1 - \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2\theta_3^2}$$

Ce qui fait apparaître :

$$(33) \quad \partial^2 \mathcal{D} = \frac{1}{\theta_3^2}$$

et donc :

$$(34) \quad \mathcal{G} = \frac{K^2}{2\omega^2} \frac{1}{(\theta_3)^2}$$

La quantité $(2\theta_3)$ est reliée (par le critère de Rayleigh) à la résolution spatiale du traitement classique, elle résume de façon compacte, mais parfois grossière (champ proche), le diagramme d'ambiguïté.

A partir de (34) et (27), on obtient l'expression très simple de la matrice de Fisher pour un paramètre géométrique unique :

$$(35) \quad F(\theta, \theta) = \frac{K^2 S^2}{1 + KS} \frac{1}{(\theta_3)^2}$$

L'écart-type limite de mesure de θ est donné par le théorème de Cramer-Rao par :

$$(36) \quad \sigma_\theta^{\text{CR}} = \frac{\theta_3}{KS} \sqrt{1 + KS}$$

Expression à rapprocher de la formule de Woodward souvent utilisée et donnée sous la forme [4]

$$(37) \quad \sigma_\theta^{\text{W}} = \frac{\theta_3}{\sqrt{KS}}$$

Cette formule (37) est démontrée avec les mêmes approximations (paraboliques) du diagramme d'ambiguïté mais elle suppose que le signal utile est déterministe (cas de l'actif) et le bruit blanc. La formule (37) apparaît comme une approximation à fort rapport signal sur bruit de (36) [$KS \gg 1$].

Le problème traité ici concerne le sonar passif; dans le cas d'un sonar actif, on trouve que la variance limite est donnée par (37) et donc qu'il y a identité entre la variance limite donnée par la borne de Cramer-Rao et la formule de Woodward. Ce point sera discuté plus en détail dans la seconde partie de l'article.

3.3. CAS DE L'ANTENNE RECTILIGNE À CAPTEURS ÉQUIDISTANTS

Pour terminer la chaîne de problèmes traités jusqu'à présent (de généralité décroissante) nous allons maintenant préciser la géométrie de l'antenne et le modèle de propagation.

L'antenne est ici constituée de K capteurs alignés répartis de façon périodique (avec un pas d) et le milieu isocèle : il s'agit de localiser un bruiteur de gisement θ et de distance R (fig. 4); le point de référence de l'antenne est pris en son milieu (pour simplifier les calculs).

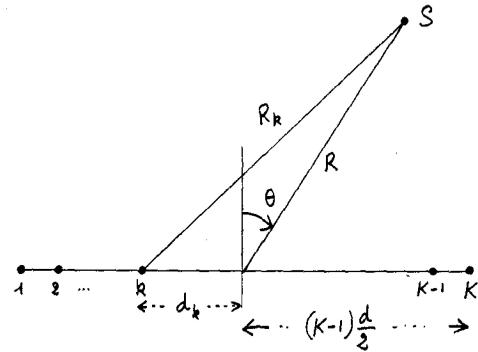


Fig. 4. — Géométrie de l'antenne rectiligne périodique de pas d . Les capteurs sont omnidirectionnels, la référence est prise au centre de l'antenne. Les paramètres de localisation du bruiteur (S) sont $\sin \theta$ et R^{-1} .

Dans ces conditions, on peut préciser l'expression des retards $\tau_k(\theta)$ qui apparaissent dans la section 3.2 précédente.

On a (θ est omis des notations) :

$$(38) \quad \tau_k = \frac{1}{C} (R_k - R)$$

SYNTHÈSES

où

$$(39) \quad R_k = (R^2 + d_k^2 + 2R d_k \sin \theta)^{1/2}$$

d_k est la distance séparant le capteur k de la position de référence (comptée algébriquement).

$$(40) \quad d_k = \left(k - 1 - \frac{K-1}{2} \right) d$$

On peut alors calculer la matrice \mathcal{G} (Annexe D). On trouve :

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{C^2} \frac{K^2(K^2-1)}{12} & 0 \\ 0 & \frac{(d^2 \cos^2 \theta)^2}{2C} \frac{K^2(K^2-1)(K^2-4)}{180} \end{pmatrix}$$

On en déduit l'expression de la matrice de Fisher du tableau IV.

TABLEAU IV

Éléments de la matrice de Fisher pour l'antenne rectiligne périodique de pas d à K capteurs omnidirectionnels pour le problème à un bruiteur lointain dans un milieu isocélère.

$$F(\sigma, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \{ (K-1) + (1+KS)^{-2} \}$$

$$F(\sigma, \gamma) = \frac{1}{\sigma^2} K(1+KS)^{-2}$$

$$F(\sigma, \theta) = F(\gamma, \theta) = 0$$

$$F(\gamma, \gamma) = [K \sigma^{-1} (1+KS)^{-1}]^2$$

$$F(\theta, \theta) = \frac{2S^2 \omega^2}{1+KS} \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2 K^2(K^2-1)}{12} & 0 \\ 0 & \beta^2 \frac{K^2(K^2-1)(K^2-4)}{180} \end{pmatrix}$$

$$\omega = 2\pi f, \quad S = \frac{\gamma}{\sigma}, \quad \alpha = \frac{d}{C}$$

$$\beta = \frac{d^2 \cos^2 \theta}{2C}, \quad K \text{ capteurs}$$

Paramètres géométriques $\sin \theta, R^{-1}$.

Cette matrice correspond aux paramètres du problème $\sin \theta$ et $1/R$ et non pas θ et R (gisement-distance).

On remarquera le découplage entre le gisement et la distance (matrice \mathcal{G} diagonale).

On obtient alors les expressions des écarts-types limites de l'estimation de $\sin \theta$ et R^{-1} par

$$\sigma_{\sin \theta}^{\text{CR}} = \left(\frac{(1+KS) 6C^2}{S^2 \omega^2 d^2 K^2 (K^2-1)} \right)^{1/2}$$

et

$$\sigma_{R^{-1}}^{\text{CR}} = \left(\frac{(1+KS) 360C^2}{S^2 \omega^2 (d^2 \cos^2 \theta)^2 K^2 (K^2-1)(K^2-4)} \right)^{1/2}$$

Formules qu'on peut également mettre sous la forme :

$$(41) \quad \sigma_{\sin \theta}^{\text{CR}} = \frac{\theta_3 \sqrt{1+KS}}{KS}$$

avec :

$$(42) \quad 2\theta_3 = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{\lambda}{L} \left(\frac{K-1}{K+1} \right)^{1/2}$$

où $L = (K-1)d$ est la longueur de l'antenne et de même :

$$(43) \quad \sigma_{R^{-1}}^{\text{CR}} = \frac{\alpha_3 \sqrt{1+KS}}{KS}$$

avec

$$(44) \quad 2\alpha_3 = \frac{6\sqrt{10}}{\pi} \frac{\lambda}{L^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{K-1}{(K+1)(K^2-4)} \right)^{1/2}$$

Lorsqu'on compare (41) et (43) à la formule (36), on est conduit à interpréter les quantités $2\theta_3$ et $2\alpha_3$ comme des mesures de la résolution spatiale de l'antenne (respectivement en $\sin \theta$ et en R^{-1}).

On voit par exemple que $2\theta_3$, dans la formule (42) est contrôlé par l'ouverture de l'antenne λ/L à un facteur près de l'ordre de l'unité.

De même $2\alpha_3$ correspond à la résolution en distance de l'antenne : l'intérêt de paramétrer le problème en R^{-1} plutôt qu'en R apparaît ici puisque $2\alpha_3$ est indépendant de R . En fait, c'est une approximation qui n'est valable que pour R « assez grand » devant le diamètre de l'antenne (validité de l'approximation parabolique : voir fig. 5 b).

On remarquera aussi que pour $K=1$ ou 2 la quantité définie par $2\alpha_3$ n'a pas de sens (il faut au moins trois capteurs pour mesurer une distance).

A titre d'illustration, on a tracé sur les figures 5 a et 5 b les diagrammes correspondant à l'antenne focalisée à différentes distances. L'antenne choisie possède $K=32$ capteurs distant de 2 m et la fréquence d'analyse est $f=325$ Hz, ce qui correspond à une distance de Fresnel de :

$$D_F = \frac{L^2}{\lambda} = \frac{(31 \times 2)^2}{1500} \times 325 \sim 833 \text{ m}$$

Sur la figure 5 a, la fonction d'ambiguïté en distance est tracée en fonction de R . Sur la figure 5 b, la même fonction est tracée en fonction de R^{-1} . On peut voir sur ces figures que l'approximation parabolique est discutable pour un diagramme en R , par contre elle semble plus raisonnable en paramétrant par R^{-1} .

La largeur à mi-hauteur du lobe d'ambiguïté en R^{-1} est donnée approximativement par :

$$2\alpha_3 \sim 5,7 \frac{\lambda}{L^2} \sim 6,8 \cdot 10^{-3}$$

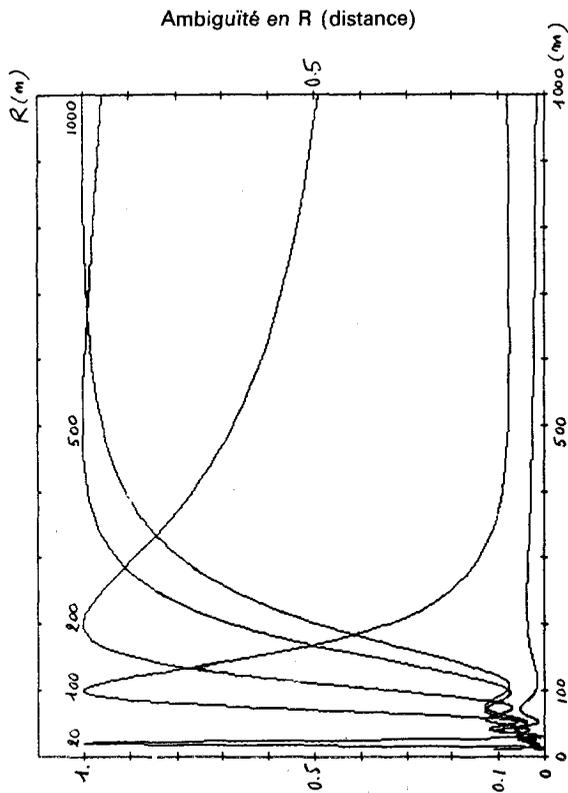


Fig. 5a

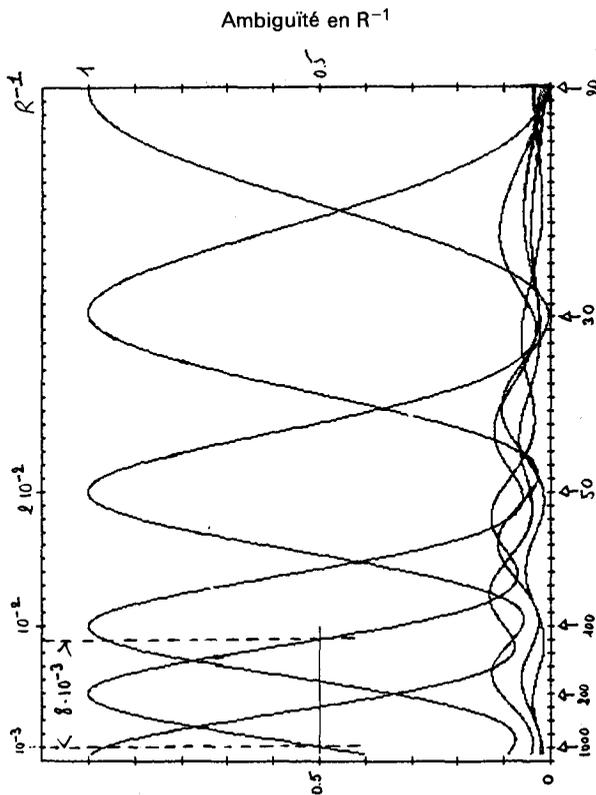


Fig. 5b

Quantité qu'on mesure assez grossièrement sur le diagramme d'ambiguïté pour une focalisation à 200 m. L'approximation apparaît visible sur les diagrammes de la figure 5 b, où on voit que le lobe s'élargit pour des distances de focalisation faible. De toute façon il est vrai que nous avons supposé ici être dans les conditions de « champ lointain ».

Il nous semble intéressant de poursuivre la discussion de cet exemple à titre d'illustration du genre de conclusions qu'on peut tirer des formules donnant la précision limite (41) à (44).

Si par exemple on a $K=3$ dans la formule (44), on obtient :

$$(45) \quad 2\alpha_3 \sim 4 \frac{\lambda}{L^2}$$

Ce cas correspond au problème du télémètre à trois capteurs et on peut reconnaître dans la quantité :

$$(46) \quad D_F = \frac{L^2}{\lambda},$$

la distance connue sous le nom de Fresnel qui permet de séparer la zone de Fresnel (en deçà) de la zone de Fraunhofer (au-delà). Si K est grand on obtient :

$$(47) \quad 2\alpha_3 \sim 6 \frac{\lambda}{L^2}$$

Si on compare deux manières de répartir K capteurs sur une longueur L fixée, l'une consistant à répartir les K capteurs uniformément, l'autre à les répartir en trois groupes de $K/3$ capteurs équidistants de $L/2$, on conclut que la seconde méthode permet de gagner un facteur 1,4 sur la précision de mesure de la distance par rapport à la première méthode (ce résultat est connu depuis [7]) (voir fig. 6 a et 6 b).

Le même raisonnement pour la mesure du gisement conseille d'utiliser deux groupes de $K/2$ capteurs séparés de L (fig. 6 c).

Enfin une analyse plus fine du problème de l'optimisation de la répartition des capteurs pour la mesure de la position (gisement et distance) montrerait qu'il est conseillé de répartir les capteurs en trois groupes équidistants de $L/2$, les deux groupes extérieurs comprenant $K/4$ capteurs et le groupe central en comprenant $K/2$ (fig. 6 d).

D'après les formules (41) à (44), il existe une liaison entre les précisions limites de mesure en gisement et en distance; on a

$$\frac{\sigma_{\sin \theta}^{CR}}{\sigma_R^{CR}} = \frac{2\theta_3}{2\alpha_3}$$

Si $K \gg 1$, on obtient :

$$\frac{2\theta_3}{2\alpha_3} \sim \frac{L \cos^2 \theta}{\sqrt{60}}$$

On prendra $\theta=0$.

SYNTHÈSES

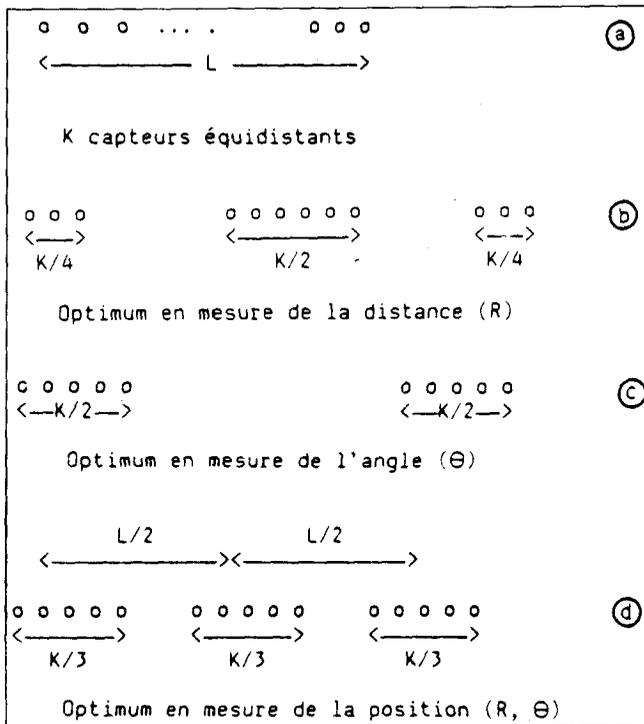


Fig. 6. — Différentes méthodes de répartition de K capteurs dans une ouverture géométrique de diamètre L selon [7].

La précision relative de mesure de la distance s'en déduit :

$$\frac{\sigma_R^{CR}}{R} = R \sigma_{R^{-1}}^{CR} = \frac{R}{L} \sqrt{60} \sigma_{\sin \theta}^{CR}$$

Si par exemple, on désire une précision relative de 10% sur la mesure de la distance à 10 km, il faudra une précision angulaire de :

$$\sigma_{\theta}^{CR} \sim 0,1 \times \frac{L}{10^4 \times \sqrt{60}}$$

soit environ, pour $L = 60$ m

$$\sigma_{\theta}^{CR} \sim 5 \cdot 10^{-3} \text{ rad } (0,27^\circ)$$

Ces chiffres peuvent déjà donner une idée des difficultés qui peuvent être rencontrées dans la réalisation d'une bonne télémétrie à de telles distances.

4. Conclusions

Le formalisme matriciel décrit dans cet article se révèle très agréable à utiliser sur ordinateur, en particulier les formules générales du tableau I (toutes celles qui suivent n'en sont que des cas particuliers). Il suffit pour cela de programmer les fonctions à valeurs vectorielles qui correspondent à $\mathbf{d}(\theta)$ et $\{\partial \mathbf{d}(\theta) / \partial (\theta)_k\}$, ensuite l'algèbre est toujours la même. On constate en pratique que la programmation de problèmes plus simples (comme le problème à un

bruiteur) est en fait plus pénible (en ce sens qu'elle est moins systématique) et moins générale.

Pour l'instant nous n'avons tiré que peu de conclusions sur l'application de ce formalisme à des problèmes pratiques : ceci fera l'objet de la seconde partie de l'article entièrement consacré à des applications.

5. Remerciements

Cet article utilise les résultats d'études financées en partie par la DRET (Direction des Recherches et Études Techniques).

Nous remercions les Experts anonymes pour les remarques constructives ayant permis d'améliorer la lisibilité de cet article.

Manuscrit reçu le 19 novembre 1985.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. BANGS, Array Processing with Generalized Beamformers, *Ph. D. Dissertation*, Yale University, New Haven, CT, 1971.
- [2] H. L. VANTREES, Detection, Estimation and Modulation Theory, 1, J. Wiley, 1968.
- [3] C. FOURGEAUD et A. FUCHS, *Statistique*, Dunod, Paris, 1967.
- [4] J. FREEDMAN, Resolution in Radar Systems, *Proc. IRE*, 39, July 1951, p. 813-818.
- [5] J. MUNIER, Pouvoir séparateur en estimation non-linéaire en présence de bruit faible, *GRETSI 1977*, Nice, 26/30 avril, p. 20/1-20/8.
- [6] H. DEBART, Estimation de paramètres à l'aide d'une antenne. Limites de précision, *Traitement du Signal*, 2, n° 2, 1985, p. 121-128.
- [7] G. C. CARTER, Variance Bounds for Passively Locating an Acoustic Source with a Symmetric Line Array, *JASA*, 62, n° 4, Oct. 1977, p. 922-926.
- [8] P. M. SCHULTEISS, Locating a Passive Source with Array Measurements: a Summary of Results, *Proc. of ICASSP 1979 Conf.*
- [9] P. M. SCHULTEISS et E. WEINSTEIN, Detection and Estimation: A Summary of Results, *Proc. of NATO ASI*, Copenhagen, Denmark, August 18-29, 1980, L. BJORNØD éd., D. Reidel, 1981.
- [10] N. R. GOODMAN, Statistical Analysis Based on a Certain Multivariate Complex Gaussian Distribution (An Introduction), *Ann. Math. Stat.*, 34, 1963, p. 152-177.
- [11] A. S. HOUSEHOLDER, *The theory of Matrices in Numerical Analysis*, Dover, 1964.
- [12] G. BIENVENU et L. KOPP, Optimality of High Resolution Array Processing Using the Eigensystem Approach, *IEEE Trans. on ASSP*, 31, n° 5, Oct. 1983, p. 1235-1248.
- [13] R. O. SCHMIDT, A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation, *Ph. D. Thesis*, Nov. 1981, Stanford University.
- [14] D. R. BRILLINGER, *Time series, Data Analysis and Theory*, Holden Day, 1981.

Annexes

Annexe A : Matrice de Fischer dans le cas gaussien

Le terme général de la matrice de Fischer s'écrit :

$$(A.1) \quad F_{kl} = -E \{ \partial_{kl}^2 \mathcal{L} \}$$

\mathcal{L} est la vraisemblance logarithmique.

Dans le cas particulier où l'observation est un vecteur gaussien à K dimensions, de moyenne \mathbf{m} et de matrice de covariance C elle admet une loi de probabilité de densité (C inversible).

$$(A.2) \quad p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-K/2} |C|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{C}C^{-1})\right)$$

où

$$\hat{C} = (\mathbf{x} - \mathbf{m})(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T, \quad E\{\hat{C}\} = C$$

$$\text{Tr}(A) = \sum_{k=1, K} A_{kk}, \quad \text{la trace de } A$$

C^{-1} , $|C|$, l'inverse et le déterminant de C .

Cette façon d'écrire la densité, faisant apparaître la trace, peut paraître artificielle mais simplifie la suite.

On obtient \mathcal{L} à partir de (A.2) par :

$$(A.3) \quad \mathcal{L} = \text{Ln}(p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}))$$

$$= -\frac{K}{2} \text{Ln}(2\pi) - \frac{1}{2} (\text{Ln}|C| + \text{Tr}(\hat{C}C^{-1}))$$

Il s'agit d'abord de calculer $\partial_k \mathcal{L}$, puis $\partial_{kl}^2 \mathcal{L}$ dont l'espérance fournira F_{kl} (A.1).

Pour calculer $\partial_k \mathcal{L}$, on utilise deux résultats intermédiaires classiques sur les dérivées de C^{-1} et $|C|$

$$(A.4) \quad \partial C^{-1} = -C^{-1}(\partial C)C^{-1}$$

$$(A.5) \quad \partial |C| = |C| \text{Tr}(C^{-1}(\partial C))$$

où la notation ∂X est une forme simplifiée de :

$$\partial_k X = \frac{\partial X}{\partial \beta_k}$$

Pour démontrer (A.4), il suffit de dériver l'identité :

$$I = C(C^{-1})$$

où I est la matrice identité d'ordre K . On obtient :

$$0 = (\partial C)C^{-1} + C(\partial C^{-1})$$

Pour démontrer (A.5), il suffit d'introduire la décomposition de C en éléments propres, ce qu'on écrit :

$$(A.6) \quad C = U \Lambda U^T$$

où Λ est la matrice diagonale des valeurs propres ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$) réelles positives et U la matrice

orthogonale dont la k -ième colonne est le vecteur propre associé à la valeur propre λ_k .

La décomposition (A.6) est toujours possible C étant une matrice symétrique, donc toujours diagonalisable par une transformation orthogonale.

On a :

$$(A.7) \quad U U^T = U^T U = I$$

et

$$|C| = |U \Lambda U^T| = |\Lambda|$$

d'où

$$(A.8) \quad \text{Ln}|C| = \sum_{i=1, K} \text{Ln}(\lambda_i)$$

Dérivant (A.8), on obtient :

$$\partial \text{Ln}|C| = \sum_{i=1, K} \frac{\partial \lambda_i}{\lambda_i}$$

ce qui s'écrit :

$$(A.9) \quad \partial \text{Ln}|C| = \text{Tr}(\Lambda^{-1} \partial \Lambda)$$

remplaçant alors dans (A.9) Λ^{-1} et $\partial \Lambda$ par leurs valeurs données par (A.6)

$$\Lambda^{-1} = U^T C^{-1} U$$

$$\partial \Lambda = (\partial U)^T C U + U^T (\partial C) U + U^T C (\partial U)$$

On trouve :

$$(A.10) \quad \partial \text{Ln}|C| = \text{Tr} \{ (U^T C^{-1} U) \times (\partial U^T C U + U^T \partial C U + U^T C \partial U) \}$$

Utilisant alors la linéarité de la trace :

$$\text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$$

et son invariance par permutation circulaire :

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

On obtient :

$$(A.11) \quad \partial \text{Ln}|C| = \text{Tr} \{ (\partial U^T) U + U^T (\partial U) + C^{-1} \partial C \}$$

Mais, d'après (A.7) :

$$(\partial U)^T U + U^T (\partial U) = \partial (U^T U) = 0$$

d'où le résultat annoncé :

$$(A.12) \quad \partial \text{Ln}|C| = \text{Tr}(C^{-1}(\partial C))$$

Utilisant ce résultat dans (A.3), il vient :

$$(A.13) \quad \partial \mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{Tr}(C^{-1}(I - \hat{C}C^{-1}) \partial C)$$

$$- \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \partial \hat{C} C^{-1} \}$$

Remarquons que (A. 13) est une expression utile pour calculer un estimateur qui maximise la fonction de vraisemblance : en particulier cette formule permet d'étudier de façon simple l'optimalité des méthodes « Haute-Résolution » [12].

On peut aussi préciser que :

$$(A. 14) \quad \partial \hat{C} = -(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \partial \mathbf{m}^T - \partial \mathbf{m} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T$$

est une matrice de moyenne nulle

$$E \{ \partial \hat{C} \} = 0$$

Pour terminer le calcul de la matrice de Fisher (A. 1), il faudra dériver une seconde fois (A. 13) puis en prendre l'espérance statistique : il est donc inutile de calculer les termes d'espérance nulle, c'est-à-dire ceux où resteront les matrices $(\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1})$ et $\partial \hat{C}$.

De façon précise partant de :

$$\partial_k \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr} [\mathbf{C}^{-1} (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{-1}) \partial_k \mathbf{C}] - \frac{1}{2} \text{tr} [(\partial_k \hat{\mathbf{C}}) \mathbf{C}^{-1}]$$

et dérivant par rapport à β_p , on obtient les termes d'espérance non nulle :

$$\frac{1}{2} \text{Tr} [\mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{C}} (\partial_i \mathbf{C}^{-1}) (\partial_k \mathbf{C})] - \frac{1}{2} \text{Tr} [(\partial_{ki}^2 \hat{\mathbf{C}}) \mathbf{C}^{-1}]$$

dont l'espérance est :

$$\frac{1}{2} \text{Tr} [(\partial_k \mathbf{C}) (\partial_i \mathbf{C}^{-1})] - \partial_k \mathbf{m}^T \mathbf{C}^{-1} \partial_i \mathbf{m}$$

d'où le résultat :

$$\begin{aligned} F_{ki} &= -E \{ \partial_{ki}^2 \mathcal{L} \} \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} [(\partial_k \mathbf{C}) (\partial_i \mathbf{C}^{-1})] + \partial_k \mathbf{m}^T \mathbf{C}^{-1} \partial_i \mathbf{m} \end{aligned}$$

qu'on peut également écrire sous la forme :

$$F_{ki} = \frac{1}{2} \text{Tr} [\mathbf{C}^{-1} (\partial_k \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} (\partial_i \mathbf{C})] + \partial_k \mathbf{m}^T \mathbf{C}^{-1} \partial_i \mathbf{m}$$

Annexe B : Matrice de Fisher pour le cas d'un seul bruiteur dans le modèle « retard pur » (en passif)

Il s'agit ici du calcul de la matrice de Fisher pour les situations à un seul bruiteur dans le cas particulier où le vecteur position d'un bruiteur de position θ est donné par :

$$(B. 1) \quad \mathbf{d} = \text{col} \{ \exp(i \omega \tau_j(\theta)) \}_{j=1, K}$$

où la signification physique des paramètres est donnée dans le texte.

Il s'agit d'appliquer les résultats généraux du tableau II à ce cas particulier.

De façon précise, nous allons montrer que la matrice de Fisher possède dans ce cas une structure diagonale par blocs, les termes correspondant aux niveaux spectraux γ et σ se découplant de ceux correspondant aux paramètres géométriques θ . Si on note $F(\theta, \theta)$ le sous-bloc de la matrice de Fisher associé à θ , on montrera que :

$$F(\theta, \theta) = \eta(f) G$$

avec

$$\eta(f) = \frac{8 \pi^2 f^2 (\gamma/\sigma)^2}{1 + K(\gamma/\sigma)}$$

et \mathcal{G} est une matrice indépendante de la fréquence et des niveaux spectraux, mais dépendant seulement de la géométrie du problème.

D'après les résultats généraux du tableau II, il nous faut calculer les quantités :

$$\lambda = \sigma + \gamma \mathbf{d}^+ \mathbf{d}$$

$$\mathbf{U}_j = \frac{\partial \mathbf{d}(\theta)}{\partial (\theta)_j}$$

$$\mathbf{U}_{j+} \mathbf{d} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_k^+ \mathbf{U}_l$$

d'après

$$(B. 1) \quad \mathbf{d}^+ \mathbf{d} = K$$

et

$$\mathbf{U}_j = \text{co} \left\{ i \omega \left(\frac{\partial \tau_k(\theta)}{\partial (\theta)_j} \right) \exp(i \omega \tau_k(\theta)) \right\}_{k=1, K}$$

Ce qu'on écrit simplement :

$$(B. 2) \quad \mathbf{U}_j = i \omega \Delta \mathbf{t}_j$$

où on a introduit la matrice diagonale Δ et le vecteur \mathbf{t}_j :

$$(B. 3) \quad \begin{cases} \Delta = \text{diag} (\exp(i \omega \tau_k(\theta)))_{k=1, K} \\ \mathbf{t}_j = \text{col} \left\{ \frac{\partial \tau_k(\theta)}{\partial (\theta)_j} \right\}_{k=1, K} \end{cases}$$

on notera que la matrice Δ est unitaire :

$$\Delta^+ \Delta = \Delta \Delta^+ = \mathbf{I}$$

avec les mêmes notations, on peut aussi écrire :

$$(B. 4) \quad \mathbf{d} = \Delta \mathbf{1}$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur à K composante toutes égales à 1. On en déduit alors :

$$(B. 5. a) \quad \mathbf{U}_k^+ \mathbf{d} = -i \omega \mathbf{t}_k^T \mathbf{1}$$

$$(B. 5. b) \quad \mathbf{U}_k^+ \mathbf{U}_l = \omega^2 \mathbf{t}_k^T \mathbf{t}_l$$

On a (tableau II) :

$$F((\theta)_k, (\theta)_l) = \frac{2\gamma^2}{(\sigma + K\gamma^2)^2} \times \operatorname{Re} \left\{ -\omega^2 (\mathbf{t}_k^T \mathbf{1}) (\mathbf{1}^T \mathbf{t}_l) + \frac{K(\sigma + K\gamma)}{\sigma} \omega^2 (\mathbf{t}_k^T \mathbf{t}_l) - \frac{K\gamma}{\sigma} \omega^2 (\mathbf{t}_k^T \mathbf{1}) (\mathbf{1}^T \mathbf{t}_l) \right\}$$

qui se simplifie pour donner :

$$(B. 6) \quad F((\theta)_k, (\theta)_l) = \frac{2\omega^2 (\gamma/\sigma)^2}{(1 + K(\gamma/\sigma))} \mathbf{t}_k^T (\mathbf{K}\mathbf{I} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T) \mathbf{t}_l$$

En définissant la matrice \mathcal{F} par :

$$(B. 7) \quad \mathcal{F} = [\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_r]$$

où r est la dimension du vecteur θ (nombre de paramètres géométriques nécessaires pour décrire la position du bruitier).

$F((\theta)_k, (\theta)_l)$ apparaît comme le terme (k, l) de la matrice.

$$(B. 8) \quad \frac{2\omega^2 (\gamma/\sigma)^2}{1 + K(\gamma/\sigma)} \mathcal{G}$$

où

$$(B. 9) \quad \mathcal{G} = \mathcal{F}^T (\mathbf{K}\mathbf{I} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T) \mathcal{F}$$

Posant alors $(\omega = 2\pi f)$:

$$(B. 10) \quad \eta(f) = \frac{8\pi^2 f^2 (\gamma/\sigma)^2}{1 + K(\gamma/\sigma)}$$

On obtient le résultat cherché :

$$(B. 11) \quad F(\theta, \theta) = \eta(f) \mathcal{G}$$

La séparation de la matrice complète en sous-blocs diagonaux résulte de la relation :

$$(B. 12) \quad \operatorname{Re} \{ \mathbf{U}_j^+ \mathbf{d} \} = 0$$

puisque, d'après (B. 5. a) $\mathbf{U}_j^+ \mathbf{d}$ est imaginaire pure. Par conséquent, on a dans le tableau II :

$$F((\theta)_k, \gamma) = F((\theta)_k, \sigma) = 0$$

Annexe C : Liaison entre la matrice de Fisher et l'ambiguïté

Il est commode de relier la matrice de Fisher à l'ambiguïté spatiale de l'antenne (ou fonction de directivité) qui est une notion sans doute plus familière.

La directivité d'une formation de voie classique pointée en θ_0 est, par définition, la fonction de θ définie par :

$$(C. 1) \quad \mathcal{D}(\theta, \theta_0) = \frac{1}{K^2} |\mathbf{d}^+(\theta) \mathbf{d}(\theta_0)|^2$$

[On se placera dans le contexte où la propagation est réduite à des retards purs (pas d'atténuation différentielle entre capteurs).]

Le but du calcul est de relier \mathcal{D} à la matrice de Fisher définie en (B. 11) par :

$$F(\theta, \theta) = - \frac{K^2 \eta(f)}{2\omega^2} (\partial^2 \mathcal{D})$$

où $\partial^2 \mathcal{D}$ est la matrice hessienne en θ_0 de \mathcal{D} par rapport à θ : cette matrice a pour terme général (k, l) :

$$(\partial^2 \mathcal{D})_{kl} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{D}(\theta, \theta_0)}{\partial (\theta)_k \partial (\theta)_l} \right)_{\theta=\theta_0}$$

On montre ceci en calculant d'abord le gradient de \mathcal{D} par rapport à θ ; il a pour k -ième composante :

$$(C. 2) \quad (\partial \mathcal{D})_k = \frac{2}{K^2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{U}_k^+(\theta) \mathbf{d}(\theta_0) \mathbf{d}^+(\theta_0) \mathbf{d} \theta \}$$

d'où l'expression de $(\partial^2 \mathcal{D})_{k,l}$

$$(C. 3) \quad (\partial^2 \mathcal{D})_{kl} = \frac{2}{K^2} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{U}_k(\theta)}{\partial (\theta)_l} \right)^+ \times \mathbf{d}(\theta_0) \mathbf{d}^+(\theta_0) \mathbf{d}(\theta) + \mathbf{U}_k^+(\theta) \mathbf{d}(\theta_0) \mathbf{d}^+(\theta_0) \mathbf{U}_l(\theta) \right\}$$

$$(C. 4) \quad (\vec{\partial} \mathcal{D}) = 0$$

et d'après (B. 5. a), en $\theta = \theta_0$ on a :

$$(C. 5) \quad (\partial^2 \mathcal{D})_{kl} = \frac{2}{K} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{U}_k(\theta)}{\partial (\theta)_l} \right)^+_{\theta=\theta_0} \mathbf{d}(\theta_0) \right\} + \frac{2\omega^2}{K^2} (\mathbf{t}_k^T \mathbf{1}) (\mathbf{1}^T \mathbf{t}_l)$$

Dérivant deux fois par rapport à $(\theta)_k$ puis $(\theta)_l$, l'identité :

$$\mathbf{d}^+(\theta) \mathbf{d}(\theta) = \mathbf{K}$$

On trouvera :

$$\operatorname{Re} \{ \mathbf{U}_k^+(\theta) \mathbf{d}(\theta) \} = 0$$

puis :

$$(C. 6) \quad \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{U}_k(\theta)}{\partial \theta_l} \right)^+ \mathbf{d}(\theta) \right\} = - \operatorname{Re} \{ \mathbf{U}_k^+(\theta) \mathbf{U}_l(\theta) \}$$

Reportant (C. 6) dans (C. 5) et utilisant (B. 5. b), on obtient :

$$(C. 7) \quad (\partial^2 \mathcal{D})_{kl} = \frac{2\omega^2}{K^2} \{ \mathbf{t}_k^T \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{t}_l - K \mathbf{t}_k^T \mathbf{t}_l \}$$

où on reconnaît dans (C. 7) le terme général de la matrice \mathcal{G} définie en (B. 9); d'où l'expression :

$$(C. 8) \quad \partial^2 \mathcal{D} = - \frac{2\omega^2}{K^2} \mathcal{G}$$

qu'on rapprochera de (B. 11) pour obtenir le résultat cherché :

$$(C. 9) \quad F(\theta, \theta) = -\frac{K^2 \eta(f)}{2\omega^2} (\partial^2 \mathcal{D})$$

Annexe D : Matrice de Fisher pour l'antenne rectiligne périodique

A partir des formules (38) et (39) du texte, on en déduit la matrice \mathcal{F} et la matrice \mathcal{G} (B. 9).

La matrice \mathcal{F} possède ici deux colonnes qui sont les deux vecteurs :

$$(D. 1. a) \quad \mathbf{t}_1 = \text{col} \left\{ \frac{\partial \tau_k}{\partial \sin \theta} \right\}_{k=1, K}$$

$$(D. 1. b) \quad \mathbf{t}_2 = \text{col} \left\{ \frac{\partial \tau_k}{\partial R^{-1}} \right\}_{k=1, L}$$

On a, d'après (38) et (39)

$$(D. 2. a) \quad (\mathbf{t}_1)_k = \frac{\partial \tau_k}{\partial \sin \theta} = \frac{1}{C} \frac{\partial R_k}{\partial \sin \theta} = -\frac{R d_k}{C R_k}$$

$$(D. 2. b) \quad (\mathbf{t}_2)_k = \frac{1}{C} \left(R^2 + \frac{\partial R_k}{\partial R^{-1}} \right) = \frac{R^2}{C} \left(1 + \frac{d_k \sin \theta - R}{R_k} \right)$$

On utilise alors l'approximation suivante ($d_k \ll R$) valable dans la zone de Fresnel mais pas en champ proche

$$(D. 3) \quad R_k \sim R \left(1 - \frac{d_k}{R} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \left(\frac{d_k}{R} \right)^2 \right)$$

Reportant (D.3) dans (D.2.a-b), on obtient les approximations suivantes

$$(D. 4. a) \quad (\mathbf{t}_1)_k \sim -\frac{d_k}{C}$$

$$(D. 4. b) \quad (\mathbf{t}_2)_k \sim \frac{d_k^2 \cos^2 \theta}{2C}$$

On a

$$d_k = \left(k-1 - \left(\frac{K-1}{2} \right) \right) d = v_k d$$

(Référence au centre de phase de l'antenne.)

En définissant les deux vecteurs :

$$\mathbf{q}_1 = \text{Col} \{ v_k \}_{k=1, K}$$

$$\mathbf{q}_2 = \text{col} \{ v_k^2 \}_{k=1, K}$$

On obtient :

$$\mathbf{t}_1 = -\frac{d}{C} \mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{t}_2 = \frac{d^2 \cos^2 \theta}{2C} \mathbf{q}_2$$

On en déduit la matrice \mathcal{F} puis \mathcal{G} par (B. 9) :

$$\mathcal{G} = \mathbf{K} \mathcal{F}^T \mathcal{F} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathcal{F}$$

On a :

$$(D. 5) \quad \mathcal{F}^T = \frac{d^2 \cos^2 \theta}{2C} \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{q}_2^T \end{pmatrix}$$

$$(D. 6) \quad \mathcal{F}^T \mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{C^2} \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{d^2 \cos^2 \theta}{2C} \right)^2 \mathbf{q}_2^T \mathbf{q}_2 \end{pmatrix}$$

d'où le résultat en calculant $\|\mathbf{q}_1\|^2$ et $\|\mathbf{q}_2\|^2$

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{C^2} \frac{K^2(K^2-1)}{12} & 0 \\ 0 & \left(\frac{d^2 \cos^2 \theta}{2C} \right)^2 \frac{K^2(K^2-1)(K^2-4)}{180} \end{pmatrix}$$