Remarques sur l'interpolation des signaux

Some comments on signal interpolation

B. PICINBONO

Laboratoire des Signaux et Systèmes, ESE, Plateau du Moulon,
91190 GIF-SUR-YVETTE, FRANCE

RÉSUMÉ

L'interpolation d'un signal aléatoire à temps discret est l'estimation linéaire en moyenne quadratique de ce signal à un instant donné en fonction de tout son passé et tout son futur. Au lieu d'appliquer à la solution de ce problème des techniques très complexes déduites d'un formalisme beaucoup plus général, une méthode très simple est présentée. La structure du filtre interpolateur est analysée et l'interpolation est comparée à la prédiction. Diverses généralisations sont également présentées.

MOTS CLÉS

Interpolation, Prédiction, Signaux autorégressifs.

SUMMARY

Interpolation of a discrete time random signal is equivalent to the mean square linear estimation of this signal at a given time instant in terms of all its past and its future. Instead of using complex techniques developed for more general problems, a very simple method is presented. The structure of the interpolation filter is analyzed and interpolation is compared to prediction. Some generalizations are also discussed.

KEY WORDS

Interpolation, Prediction, Autoregressive signals.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction

L'interpolation est une technique très couramment utilisée en traitement du signal aussi bien dans le cas déterministe que dans le cas aléatoire qui sera le seul considéré dans la suite. Sous la forme la plus élémentaire, dénommée dans la suite interpolation temporelle simple, il s'agit d'estimer la valeur d'un signal à temps discret $x[k]$ à l'instant k en fonction de tout son passé et de tout son futur. Ce problème peut être considéré dans le cadre de l'estimation linéaire en moyenne quadratique avec contrainte pour lequel des techniques simples sont présentées dans [1]. Mais il peut aussi être traité directement.

Supposant que $x[k]$ est réel, centré et stationnaire du second ordre, il s'agit alors de trouver la réponse percussionnelle (r. p.) $h[k]$ d'un filtre telle que

$$(1.1)\qquad \hat{x}[k]=\sum_{l\neq 0} h[l]\,x[k-l],$$

soit la meilleure estimation linéaire en moyenne quadratique de $x[k]$. La contrainte imposée au filtre est donc $h[0]=0$ et elle est essentielle, sinon le filtre optimal serait évidemment la fonction de Kronecker – delta, $\delta[n]$, restituant $x[k]$ sans erreur. Utilisant des méthodes habituelles de l'estimation linéaire en moyenne quadratique ([2], p. 237), on trouve que $h[l]$ doit satisfaire l'équation de Wiener-Hopf

$$(1.2)\qquad \sum_{l\neq 0} h[l]\,\gamma[k-l]=\gamma[k],\qquad k\neq 0,$$

où $\gamma[k]$ est la fonction de corrélation de $x[k]$. Le fait que cette équation ne soit valable que pour $k\neq 0$ rend impossible d'utiliser une technique de Fourier, situation analogue à celle rencontrée lorsqu'on impose une contrainte de causalité. La solution de ce problème a été abordée par de nombreux auteurs mais avec des procédures très complexes ([3], p. 96-104, [4-7]), liées pour une part au fait que le problème d'interpolation est étudié dans un cadre plus général. On peut simplifier la méthode en appliquant une technique d'estimation sous contrainte développée dans [1] et [8]. Mais même cette méthode peut être encore simplifiée si l'on ne considère que le problème de l'interpolation, et ceci constitue un des objectifs des remarques qui suivent. Il en résulte que les résultats présentés ci-dessous ne sont pas tous originaux. Il nous a cependant paru intéressant de présenter une méthode particulièrement simple et d'en tirer quelques conséquences qui, à notre connaissance, paraissent nouvelles. L'intérêt de la méthode est que l'interpolation est considérée pour elle-même et non comme un cas particulier d'un problème plus général qu'il faut d'abord résoudre. On peut noter pour terminer que l'interpolation dans le cas d'un passé et d'un futur fini a été abordée dans [9] et que certains résultats de cet article sont retrouvés différemment ci-après.

2. Interpolation temporelle simple

2.1. Solution générale

Il s'agit de résoudre le problème posé dans l'introduction, c'est-à-dire l'équation (1.2). Pour ceci on introduit l'innovation $\tilde{x}[k]$ définie par

$$(2.1)\qquad \tilde{x}[k]\triangleq x[k]-\hat{x}[k]=\sum_{l} r[l]\,x[k-l]$$

où la réponse percussionnelle $r[k]$ est liée à $h[k]$ par

$$(2.2)\qquad r[k]=\delta[k]-h[k].$$

La contrainte sur $h[k]$ se traduit par une autre sur $r[k]$, définie par $r[0]=1$. Pour calculer $r[l]$ on applique le principe d'orthogonalité

$$(2.3)\qquad \mathrm{E}\{\tilde{x}[n]\,x[n-k]\}=\alpha\delta[k],$$

qui précise que l'innovation $\tilde{x}[n]$ est orthogonale aux observations $x[n]$ à des instants différents. Par contre ceci n'est pas vrai pour $k=0$, et la constante α sera déduite de la contrainte $r[0]=1$. En prenant les transformées de Fourier, (2.3) devient

$$(2.4)\qquad \mathrm{R}(\nu)\,\Gamma(\nu)=\alpha$$

où $\mathrm{R}(\nu)$ est le gain complexe du filtre d'innovation apparaissant dans (2.1) et $\Gamma(\nu)$ la densité spectrale de $x[k]$. La contrainte $r[0]=1$ s'écrit

$$(2.5)\qquad \int \mathrm{R}(\nu)\,d\nu=1,$$

où les bornes d'intégration sont, comme dans toute la suite, $\pm 1/2$. Il en résulte donc que

$$(2.6)\qquad \alpha=\left[\int \mathrm{C}(\nu)\,d\nu\right]^{-1},$$

où $C(\nu) \triangleq [\Gamma(\nu)]^{-1}$. On a donc finalement

$$H(\nu) = 1 - \alpha C(\nu), \tag{2.7}$$

qui, avec (2.6), définit le filtre d'interpolation. L'erreur d'interpolation est la variance de l'innovation, soit

$$\varepsilon^2 = \int |R(\nu)|^2 \Gamma(\nu) \, d\nu, \tag{2.8}$$

et avec (2.4) et (2.5) on obtient

$$\varepsilon^2 = \alpha. \tag{2.9}$$

En particulier on dit que l'interpolation est régulière si $\varepsilon^2 > 0$, ce qui se caractérise par

$$\int \frac{d\nu}{\Gamma(\nu)} \triangleq \int C(\nu) \, d\nu < \infty \tag{2.10}$$

qui est la condition (10.33) donnée dans [3]. Dans le cas contraire on dit que le signal est interpolable sans erreur.

2.2. Conséquences directes

a. Expression temporelle du filtre interpolateur

On déduit immédiatement de (2.7) que

$$h[k] = \delta[k] - \frac{c[k]}{c[0]}, \tag{2.11}$$

où $c[k]$ est la transformée de Fourier à temps discret de $C(\nu)$, inverse de la densité spectrale $\Gamma(\nu)$. On vérifie évidemment que la contrainte $h[0]=0$ est satisfaite. Il convient de noter que, comme $\Gamma(\nu)$, $C(\nu)$ est une fonction positive et paire. Il en résulte que $c[k]$ est définie positive et paire, ce qui entraine que $|c[k]| < c[0]$. On en déduit donc que le filtre d'interpolation satisfait

$$|h[k]| < 1, \tag{2.12}$$

et de plus est pair. Ceci signifie que dans l'interpolation le passé et le futur jouent le même rôle, ce qui est une conséquence de la stationnarité.

b. Structure de l'innovation

Le filtre $R(\nu)$ générant l'innovation $\tilde{x}[k]$ est défini par (2.4) et (2.6). On en déduit donc que la densité spectrale de l'innovation d'interpolation vaut

$$\Gamma_{\tilde{x}}(\nu) = \alpha^2 C(\nu) = \alpha R(\nu). \tag{2.13}$$

Il en résulte que cette innovation n'est absolument pas un bruit blanc, contrairement à l'innovation de prédiction.

On peut également noter que si l'on appelle $R'(\nu)$ le filtre calculant l'innovation d'interpolation de $\tilde{x}[k]$, on obtient à l'aide des formules précédentes $R'(\nu) = \beta\alpha^{-2}\Gamma(\nu)$, avec $\beta = \alpha^2 \left[\int \Gamma(\nu) \, d\nu\right]^{-1}$. Il en résulte que

$$R(\nu) R'(\nu) = \varepsilon^2 / \sigma_x^2 \tag{2.14}$$

où ε^2 est donné par (2.9) et σ_x^2 est la variance de $x[k]$.

c. Interpolation et factorisation forte

Soit $\hat{x}_p[k]$ le signal de prédiction à un pas et avec passé infini de $x[k]$ et $\tilde{x}_p[k] = x[k] - \hat{x}_p[k]$ l'innovation de prédiction. Il est bien connu que cette innovation est un bruit blanc et que le filtre de fonction de transfert $B(z)$ qui génère $\tilde{x}_p[k]$ à partir de $x[k]$ est à minimum de phase (*voir* [3] p. 257 et [8]). Appelons η^2 l'erreur de prédiction, c'est-à-dire la variance de $\tilde{x}_p[k]$. On en déduit que

$$\eta^2 = B(z) B(z^{-1}) \Gamma(z), \tag{2.15}$$

ou $\Gamma(z)$ est la transformée en z bilatérale de $\gamma[k]$. De plus il résulte de la définition de l'innovation que la réponse percussionnelle de $B(z)$ satisfait $b[0]=1$. On déduit de (2.15) que

$$C(z) \triangleq \frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\eta^2} B(z) B(z^{-1}), \tag{2.16}$$

qui est la factorisation forte de $C(z)$. Par transformation en z inverse on obtient

$$c[k] = \frac{1}{\eta^2} \sum_{l=0}^{\infty} b[l] \, b[l+k]. \tag{2.17}$$

Il convient de noter que la réponse percussionnelle du prédicteur à un pas et à passé infini est

$$a[k] = 1 - b[k]. \tag{2.18}$$

En comparant (2.11), (2.17) et (2.18) on voit le lien existant entre la prédiction et l'interpolation. En particulier si $x[k]$ est un signal autorégressif d'ordre r, $a[k]=0$ si $k>r$. On en déduit immédiatement que $c[k]=0$ si $k>r$, et le filtre d'interpolation est donc à réponse impulsionnelle finie (filtre RIF).

d. Comparaison entre les erreurs d'interpolation et de prédiction

De (2.6) et (2.9) il résulte que $\varepsilon^2 = \alpha = \{c[0]\}^{-1}$. Utilisant alors (2.17) on obtient

$$\frac{\varepsilon^2}{\eta^2} = \frac{1}{\sum_0^\infty b^2[k]} = \frac{1}{1 + \sum_1^\infty a^2[k]}. \tag{2.19}$$

On voit donc que $\varepsilon^2 < \eta^2$, ce qui est normal puisque l'interpolation prend en compte le passé et le futur, alors que la prédiction n'utilise que le passé.

e. Signaux autorégressifs à erreur d'interpolation minimum

Considérons un signal autorégressif d'ordre r défini par un vecteur de régression $\mathbf{a}$ et un bruit générateur de variance σ_u^2. D'après (2.19) l'erreur d'interpolation s'écrit

$$\varepsilon^2 = \sigma_u^2 [1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a}]^{-1}. \tag{2.20}$$

On peut alors se demander quels sont les vecteurs $\mathbf{a}$ donnant une erreur ε^2 minimale. D'après (2.20), ce sont les vecteurs de régression de dimension r et de norme maximale. Pour définir un modèle AR (r) du second ordre il est nécessaire que le vecteur $\mathbf{a}$ soit tel que le filtre associé soit stable, c'est-à-dire ait tous ses pôles à l'intérieur du cercle unitaire. Les vecteurs de norme maximale et satisfaisant cette contrainte ont été calculés dans [10] à l'aide des coefficients de reflexion. On montre que deux vecteurs distincts sont possibles et l'erreur d'interpolation minimale vaut

$$\varepsilon^2 = \sigma_u^2 \frac{(r!)^2}{(2r)!}. \tag{2.21}$$

On voit ainsi que pour un ordre 4 l'erreur d'interpolation peut être 70 fois plus petite que l'erreur de prédiction. Des résultats similaires sont indiqués dans [9].

f. Signaux interpolables et non prédictibles

Comme d'après (2.19) $\varepsilon^2 < \eta^2$, il est clair que si un signal est prédictible, c'est-à-dire si $\eta^2 = 0$, il est aussi interpolable. Il est par contre tout à fait possible d'avoir $\varepsilon^2 = 0$ et $\eta^2 \neq 0$. Pour le comprendre il suffit de se rappeler que (*voir* [2] p. 261)

$$\eta^2 = \exp\left\{ \int \operatorname{Log} \Gamma(\nu)\, d\nu \right\} \tag{2.22}$$

alors que, d'après (2.6),

$$\varepsilon^2 = \left[\int \frac{d\nu}{\Gamma(\nu)} \right]^{-1}. \tag{2.23}$$

On voit alors par exemple que le signal de densité spectrale triangulaire $\Gamma(\nu) = (1/2) - |\nu|$ est tel que $\varepsilon^2 = 0$ et $\eta^2 \neq 0$. Pour plus de détails sur ce type de signaux ont peut se reporter à [11], [12] et [13].

3. Estimation à trou temporel

Il s'agit d'un problème très voisin de celui d'interpolation. La différence est que le signal à estimer à l'instant k n'est pas $x[k]$, mais un signal $y[k]$ stationnairement corrélé à $x[k]$. En d'autres termes on cherche l'estimateur

$$\hat{y}[k] = \sum_{l \neq 0} h[l]\, x[k-l]. \tag{3.1}$$

L'expression « trou temporel » provient du fait que la réponse percussionnelle $h[k]$ est soumise à la contrainte $h[0] = 0$. Si l'on n'impose pas cette contrainte on retrouve le filtrage de Wiener stationnaire (*voir* [2], p. 245) dont le gain complexe vaut

$$H_w(\nu) = \Gamma_{yx}(\nu) [\Gamma_x(\nu)]^{-1} = \Gamma_{yx}(\nu)\, C_x(\nu). \tag{3.3}$$

La contrainte de trou temporel peut parfois être imposée parce que l'on ne veut pas prendre en compte l'observation au même instant, si l'on pense que par exemple cet échantillon contient un signal parasite créant un biais sur l'estimation.

Introduisant comme ci-dessus l'innovation

$$\tilde{y}[k] \triangleq y[k] - \hat{y}[k], \tag{3.3}$$

le principe d'orthogonalité donne, comme pour (2.3),

$$E\{\tilde{y}[l]\, x[k-l]\} = \alpha \delta[k]. \tag{3.4}$$

En utilisant (3.3) et en prenant les transformées de Fourier on obtient aisément

$$\Gamma_{yx}(\nu) - H(\nu)\, \Gamma_x(\nu) = \alpha, \tag{3.5}$$

d'où l'on tire

$$H(\nu) = C_x(\nu) [\Gamma_{yx}(\nu) - \alpha] = H_w(\nu) - \alpha\, C_x(\nu). \tag{3.6}$$

La contrainte imposée est

$$h[0] = \int H(\nu)\, d\nu = 0, \tag{3.7}$$

et l'on déduit que

$$\alpha = \frac{\int H_w(\nu)\, d\nu}{\int C_x(\nu)\, d\nu} = \frac{h_w[0]}{c_x[0]}, \tag{3.8}$$

ce qui détermine complètement le filtre $H(\nu)$ avec (3.6). Il est clair que l'on retrouve l'interpolation comme un cas particulier lorsque $x = y$, ce qui donne évidemment $H_w(\nu) = 1$ et $h_w[0] = 1$.

L'erreur d'estimation est le variance de $\tilde{y}[k]$, et en raison de l'orthogonalité elle s'écrit

$$\varepsilon^2 = \sigma_y^2 - E\{y[k]\, \hat{y}[k]\}. \tag{3.9}$$

En passant dans le domaine spectral on obtient aisément

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_w^2 + \varepsilon_c^2, \tag{3.10}$$

où ε_w^2 est l'erreur obtenue dans le filtrage sans contrainte et ε_c^2 un terme additionel dû à la contrainte et valant

$$\varepsilon_c^2 = \frac{\left| \int \Gamma_{xy}(\nu)\, C_x(\nu)\, d\nu \right|^2}{\int C_x(\nu)\, d\nu}, \tag{3.11}$$

Lorsque $x = y$, on a alors $\varepsilon_w^2 = 0$ et le numérateur de (3.11) vaut 1, ce qui redonne l'expression (2.9).

4. Interpolation dans une direction donnée

Il s'agit d'une généralisation du problème d'interpolation étudié au paragraphe 2. Soit un signal déterministe $u[k]$ de transformée de Fourier $U(\nu)$. Considérons alors la « projection » de $x[k]$ étudié en 2 sur $u[k]$ définie par

$$y_u[k] = \sum_l u[l]\, x[k-l], \tag{4.1}$$

qui est plus exactement le signal aléatoire déduit de x par un filtrage linéaire de réponse percussionnelle $u[k]$. Il s'agit alors d'estimer $y_u[k]$ à partir de $x[k]$ et au moyen d'un filtre dont la réponse percussionnelle est évidemment orthogonale à $u[k]$.
En d'autres termes

$$\hat{y}_u[k] = \sum_l h[l]\, x[k-l] \tag{4.2}$$

avec

$$\sum_k h[k]\, u[k] = 0. \tag{4.3}$$

L'interpolation simple apparaît si $u[k] = \delta[k]$ et la relation d'orthogonalité (4.3) est simplement la contrainte utilisée dans 2. Introduisant l'innovation

$$\tilde{y}_u[k] \triangleq y_u[k] - \hat{y}_u[k], \tag{4.4}$$

il suffit d'écrire que, quel que soit $v[k]$ orthogonal à $u[k]$, on a

$$E\{\sum_l v[l]\, x[k-l]\, \tilde{y}_u[k]\} = 0. \tag{4.5}$$

Passant dans le domaine de Fourier, cette relation devient

$$\int V^*(\nu)\{\Gamma_{yx}(\nu) - H(\nu)\,\Gamma_x(\nu)\}\, d\nu = 0, \tag{4.6}$$

quel que soit $V(\nu)$ satisfaisant à

$$\int V^*(\nu)\, U(\nu)\, d\nu = 0. \tag{4.7}$$

Il en résulte que

$$\Gamma_{yx}(\nu) - H(\nu)\,\Gamma_x(\nu) = \alpha\, U(\nu), \tag{4.8}$$

où α est déterminé par la contrainte (4.3). Notant que, d'après (4.1),

$$\Gamma_{yx}(\nu) = U(\nu)\,\Gamma_x(\nu) = U(\nu)\,\Gamma(\nu), \tag{4.9}$$

nous obtenons

$$H(\nu) = U(\nu)\,[1 - \alpha\, C(\nu)], \tag{4.10}$$

où $C(\nu) \triangleq [\Gamma(\nu)]^{-1}$. La relation (4.3) donne alors aisément

$$\alpha = \frac{\int U^*(\nu)\, U(\nu)\, d\nu}{\int U^*(\nu)\, C(\nu)\, U(\nu)\, d\nu}. \tag{4.11}$$

On retrouve évidemment l'interpolation temporelle simple lorsque $u[k] = \delta[k]$, ou $U(\nu) = 1$.
L'erreur d'interpolation s'écrit

$$\varepsilon_u^2 = \sigma_u^2 - E\{y[k]\,\hat{y}[k]\} \tag{4.12}$$

et en utilisant les mêmes méthodes que précédemment on trouve aisément

$$\varepsilon_u^2 = \frac{\left[\int U^*(\nu)\, U(\nu)\, d\nu\right]^2}{\int U^*(\nu)\, C(\nu)\, U(\nu)\, d\nu}, \tag{4.13}$$

qui prend une forme particulièrement simple lorrsque, comme pour l'interpolation temporelle, le signal $u[k]$ est normé. D'après l'inégalité de Schwarz, on a $\varepsilon_u^2 \leq \sigma_u^2$, où σ_u^2 est la variance de $y_u[k]$. L'égalité est atteinte si $\Gamma(\nu) = \lambda$, ce qui signifie que $x[k]$ est un bruit blanc. Il est alors évident que l'estimation de $y_u[k]$ est impossible, quel que soit u.
Enfin on peut se poser le problème inverse qui consiste à trouver la direction, c'est-à-dire le vecteur signal unitaire $u[k]$, tel que l'erreur d'estimation soit minimale. On voit sur (4.13) que le signal est tel que

$$|U(\nu)|^2 = \delta(\nu - \nu_0) \tag{4.14}$$

où ν_0 est la fréquence où $\Gamma(\nu)$ est minimal.

5. Conclusion

Au lieu de placer le problème de l'interpolation dans un cadre beaucoup plus général, nous avons présenté une méthode directe de solution de l'équation de base (1.2). Ceci permet d'obtenir très simplement la structure du filtre et l'erreur d'interpolation. Ces résultats étaient déjà connus, mais l'intérêt se trouve dans la méthode de résolution.

Partant de là, nous avons déduit toute une série de conséquences sur la structure du filtre optimal d'interpolation, sur la comparaison entre interpolation et prédiction, et en particulier des formules explicites dans le cas des signaux autorégressifs.

La méthode de résolution appliquée à l'interpolation peut être généralisée et des exemples en sont donnés dans l'estimation à trou temporel ou l'interpolation dans une direction donnée.

Manuscrit arrivé le 7 *mai* 1986.

Remerciements

Ce travail a été soutenu par la Direction des Constructions Navales sous le n° C.86.48.826.220.000 passé par le GERDSM (Groupe d'Étude et de Recherche en Détection Sous-Marine) du Brusc.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Picinbono et M. Bouvet, Constrained Wiener filtering, *IEEE Trans. Inf. Theor.* (à paraître January 1987).

[2] A. Blanc-Lapierre et B. Picinbono, *Fonctions aléatoires*, Masson, Paris, 1981.

[3] Y. A. Rozanov, *Stationary random processes*, Holden Day, San Francisco, 1967.

[4] Y. A. Rozanov, Interpolation of stationary processes with discrete time, *Soviet Math. Dokl.*, 1, 1960, p. 91-93.

[5] A. M. Yaglom, On a problem of linear interpolation of stationary random sequences and processes, *Amer. Math. Soc. Sel. Trans. Math. Statist.*, 4, 1963, p. 339-344.

[6] Y. A. Rozanov, Some problems in the linear theory of random functions, *Theor. Prob. Appl.*, 4, 1980, p. 689-702.

[7] P. Pavon, A new algorithm for optimal interpolation of discrete time stationary processes, in *Analysis and optimization of systems*, A. Bensoussan et J.-L. Lions éd.,*Springer Lecture Notes on Control and Information Sciences*, 44, 1882, p. 701-718.

[8] B. Picinbono, Signaux déterministes et aléatoires, analyse et modélisation, *Cours des Houches*, 1985.

[9] S. Kay, Some results in linear interpolation theory, *IEEE Trans. ASSP*, 31, 1983, p. 746-749.

[10] B. Picinbono et M. Benidir, Some properties of lattice AR filters, *IEEE Trans. ASSP*, 34, 1986, p. 342-349.

[11] A. Papoulis, Predictable processes and Wold's decomposition: a review, *IEEE Trans. ASSP*, 33, 1985, p. 933-938.

[12] A. Papoulis, Levinson's algorithm, Wold's decomposition and spectral estimation, *SIAM Review*, 27, 1985, p. 405-441.

[13] B. Picinbono et J. Kerilis, Some properties of linear prediction error, *Rapport interne L2S*.