

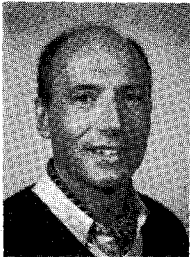
Techniques de modélisation récursives

pour l'analyse spectrale

paramétrique adaptative

Recursive modelling techniques

for adaptive parametric spectral analysis

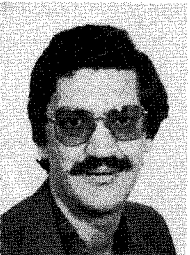


I. D. LANDAU

Laboratoire d'Automatique de Grenoble (UA 228, CNRS-INPG), GRECO Systèmes Adaptatifs (GR 69 CNRS), ENSIEG-INPG, BP 46, 38402 SAINT-MARTIN-D'HÈRES.

I. D. Landau est Directeur de Recherche au CNRS et dirige l'équipe « Systèmes Adaptatifs et Multivariables » au Laboratoire d'Automatique de Grenoble. Il est le responsable du Groupe de Recherche Coordonnée du CNRS « Systèmes Adaptatifs en Robotique Automatique et Traitement du Signal ». Son activité de recherche est centrée sur les systèmes adaptatifs (Théorie et Applications). I. D. Landau est l'auteur de plus d'une centaine de publications. Il est l'auteur, co-auteur et éditeur de plusieurs ouvrages publiés en France, USA, Japon et Chine.

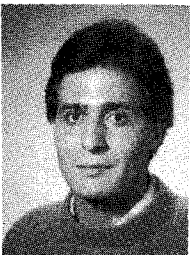
Il a reçu la médaille d'or à l'exposition des inventions, Vienne (1958), la médaille d'argent du CNRS (1982), et le « Best Paper Award » (1981-1984) de la part de l'American Society of Mechanical Engineers. Dans le cadre de l'IFAC, il est le président du groupe de travail « Adaptive Systems in Control and Signal Processing ».



Kouider Nacer M'SIRDI

LAG-CNRS (ENSIEG), BP 46, 38402 SAINT-MARTIN-D'HÈRES

Nacer K. M'Sirdi obtient le doctorat de troisième cycle en 1983 en Électronique (ENSERG). Il a travaillé sur l'automatisation d'un dispositif de mesure de l'aimantation à très basses températures et en champs magnétiques intenses au SNI et CRTBT de Grenoble (CNRS). En juin 1983 il entre au Laboratoire d'Automatique de Grenoble (CNRS) où il prépare sa thèse de Doctorat d'État. Il s'intéresse principalement au traitement adaptatif du signal, à l'analyse spectrale paramétrique et à la mise en œuvre d'algorithmes adaptatifs.



Mohammed M'SAAD

Laboratoire d'Automatique de Grenoble, BP 46, ENSIEG, 38402 SAINT-MARTIN-D'HÈRES

Mohammed M'Saad obtient le diplôme d'Ingénieur de l'EMI (École Mohammadia d'Ingénieurs de Rabat, Maroc) en 1978. Il entre ensuite au LEESA (Laboratoire d'Électronique et d'Étude des Systèmes Automatiques, Faculté des Sciences de Rabat) où il obtient sa thèse de troisième cycle sur la commande et l'identification adaptatives d'un four industriel de séchage de phosphate. Depuis octobre 1982, il prépare une thèse d'État au laboratoire d'Automatique de Grenoble. Son principal intérêt comme chercheur est le développement d'une approche d'implantation des algorithmes de commande adaptative.

RÉSUMÉ

Les techniques de modélisation de processus ARMA(X) sont très souvent utilisées en traitement du signal adaptatif et notamment pour l'analyse spectrale paramétrique. Dans ce papier, nous présentons un panorama des méthodes d'identification paramétrique des modèles AR(X), ARMA et ARMA(X) communément utilisées. Un progiciel interactif de mise en œuvre et d'évaluation de ces méthodes développé sur des micro-ordinateurs (IBM et compatibles, APPLE II) est présenté. Son utilisation est illustrée par des exemples.

MOTS CLÉS

Analyse spectrale paramétrique, modélisation ARMAX, spectre évolutif, filtrage adaptatif, prédiction adaptative.

SUMMARY

Adaptive ARMA(X) modelling techniques are commonly used in adaptive signal processing and particularly in spectral analysis. This paper provides an overview of parametric identification methods of AR(X), ARMA and ARMA(X) models. Their implementation as an interactive software package on personal computers (IBM and compatibles, APPLE II) is presented. Simulation results are presented as an illustration.

KEY WORDS

Parametric spectral analysis, ARMA(X) modelling, evolutionary spectrum, adaptive filtering, adaptive prediction.

TABLE DES MATIÈRES**1. Introduction**

- 1.1. But
- 1.2. Les modèles paramétriques de signaux
- 1.3. Exemple : analyse spectrale paramétrique
- 1.4. Exemple : prédiction et filtrage adaptatif
- 1.5. Exemple : annulation adaptative de bruit
- 1.6. Algorithme d'adaptation paramétrique
- 1.7. Étapes de la modélisation paramétrique

2. Modélisation paramétrique et identification réursive

- 2.1. Principes de base
 - 2.1.1. Modèles et prédicteurs de signaux
 - 2.1.2. Algorithmes d'adaptation paramétrique.
- 2.2. Méthodes d'estimation paramétrique
 - 2.2.1. Méthodes de l'erreur d'équation
 - 2.2.2. Méthodes de l'erreur de sortie
 - 2.2.3. Méthodes de la variable instrumentale.
- 2.3. Validation du modèle identifié
- 2.4. Interprétation fréquentielle de l'erreur de modélisation

3. Présentation du progiciel d'identification de modèles (PIM)

- 3.1. Module d'identification paramétrique
- 3.2. Module de validation des modèles
- 3.3. Module d'étude fréquentielle et temporelle
- 3.4. Module simulateur de signaux et systèmes
- 3.5. Module de gestion de fichiers de données

4. Exemples d'applications**5. Conclusion****1. Introduction****1.1. BUT**

Dans cet article une présentation générale des techniques d'identification récurives est réalisée en vue de leur application en traitement adaptatif du signal. Avant d'entamer l'étude de la modélisation paramétrique adaptative des signaux, quelques exemples d'applications où l'utilisation de ces techniques est très intéressante sont présentés schématiquement à titre d'illustration.

La plupart de ces techniques d'identification ont été développées en Automatique pour l'identification des modèles de transmission entrée-sortie des procédés à commander, quand les paramètres sont, soit inconnus, soit varient dans le temps [1-3]. C'est pour cette raison qu'elles sont plus connues en Automatique que dans le domaine du traitement du signal où elles trouvent de plus en plus d'applications. Elles consistent à déterminer, d'une façon réursive, un modèle mathématique linéaire, basé sur les données d'observation, pour représenter le système considéré. Le modèle ARMA(X) (autorégressif à moyenne mobile avec entrée auxiliaire) en est un exemple type. La plupart des signaux discrétisés en traitement du signal peuvent être représentés par des modèles ARMA(X), ARMA ou AR (autorégressif) [5, 6].

1.2. LES MODÈLES PARAMÉTRIQUES DE SIGNAUX

Les modèles de signaux discrets qui seront considérés ont la forme générale suivante :

$$(1.1) \quad y_k = - \sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^m b_i u_{k-i} + \sum_{i=1}^n c_i w_{k-i} + w_k$$

où y_k est le signal, u_k est une entrée mesurable et w_k l'entrée non mesurable.

APPLICATIONS

Quand $w_k = e_k$, notation réservée au bruit blanc gaussien ($0, \sigma_e$), ce modèle est connu sous le nom ARMA (X) (modèle autorégressif à moyenne mobile et entrée auxiliaire). Pour le cas $u_k = 0$, ce modèle est appelé ARMA et si $c_i = 0$ pour $i = 1, \dots, n$ il est appelé AR (autorégressif).

Le signal (1.1) peut s'écrire aussi sous la forme (où q^{-1} est l'opérateur retard : $q^{-1} \cdot y_k = y_{k-1}$)

$$(1.2) \quad A(q^{-1})y_k = B(q^{-1})u_k + C(q^{-1})w_k$$

où

$$(1.3) \quad A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n} = 1 + q^{-1} \cdot A^*(q^{-1})$$

$$(1.4) \quad B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-m} = q^{-1} \cdot B^*(q^{-1})$$

$$(1.5) \quad C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_n q^{-n} = 1 + q^{-1} \cdot C^*(q^{-1})$$

ou encore :

$$(1.6) \quad y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_k + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} w_k$$

Cette représentation indique clairement l'effet des entrées mesurables et non mesurables sur la sortie (voir fig. 1).

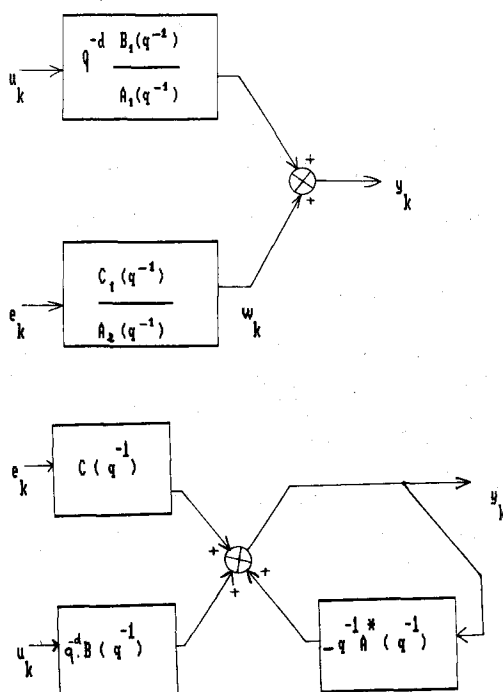


Fig. 1. — Représentation ARMA (X) d'un système ou signal.

Ce type de modèle est particulièrement adapté pour les signaux ayant un spectre rationnel. En effet, on montre en théorie de la réalisation que tout signal

stationnaire à spectre rationnel peut-être considéré comme la sortie d'un filtre générateur de fonction de transfert $H(z) = (C(z)/A(z))$ dont l'entrée est un bruit blanc, c'est-à-dire un modèle ARMA [5].

La connaissance du modèle d'un signal permettrait de réaliser le traitement désiré, à savoir : l'analyse spectrale, le filtrage adaptatif, le lissage, la prédiction, la déconvolution, l'égalisation adaptative, le rejet de perturbations, la suppression d'interférences, le codage différentiel, etc. Si les paramètres du signal ne sont pas connus ou varient lentement dans le temps, alors ils peuvent être ajustés de manière adaptative (récursive).

Nous donnerons plus loin quelques exemples. Pour plus de détails voir [9], [12], [13], [14] et [20].

1.3. APPLICATION A L'ANALYSE SPECTRALE PARAMÉTRIQUE

La recherche de la densité spectrale d'un processus aléatoire stationnaire est un problème qui peut être résolu par les techniques de modélisation paramétrique. Leurs bonnes performances font qu'elles sont de plus en plus utilisées en analyse spectrale de processus stationnaires et faiblement stationnaires en raison de leur capacité d'adaptation. L'emploi de ces méthodes adaptatives [1, 6] permet l'estimation de la densité spectrale d'un signal de manière évolutive. Elles diffèrent des techniques classiques d'analyse spectrale (non paramétriques) en deux points essentiels, à savoir :

1° Le signal est supposé avoir un spectre rationnel et peut donc être considéré comme la sortie d'un filtre générateur de fonction de transfert rationnelle $H(z)$ dont l'entrée est un bruit blanc centré gaussien de variance finie ($0, \sigma_e$) (c'est-à-dire un modèle ARMA). Les paramètres du modèle $H(z) = C(z)/A(z)$ sont estimés point par point à partir des données.

2° A chaque instant, on peut calculer le spectre du signal représenté par le modèle disponible en cet instant en utilisant la formule :

$$(1.7) \quad \hat{S}(\omega) = \frac{\hat{C}(e^{j\omega}) \hat{C}(e^{-j\omega})}{\hat{A}(e^{j\omega}) \hat{A}(e^{-j\omega})} \cdot \sigma_e^2$$

où

$$(1.8) \quad \hat{A}(z^{-1}) = 1 + \hat{a}_1 z^{-1} + \dots + \hat{a}_n z^{-n} = 1 + z^{-1} \hat{A}^*(z^{-1})$$

partie autorégressive (AR),

$$(1.9) \quad \hat{C}(z^{-1}) = 1 + \hat{c}_1 z^{-1} + \dots + \hat{c}_n z^{-n} = 1 + z^{-1} \hat{C}^*(z^{-1})$$

partie moyenne mobile (MA),

les \hat{a}_i et \hat{c}_i étant les estimées des paramètres du modèle ARMA.

Parmi les avantages autres que les bonnes performances offertes par ces techniques on peut compter :

— Le gain de place mémoire pour la représentation du signal puisque seul le modèle est conservé et qu'il est ajusté point par point.

— La possibilité d'obtenir une estimation spectrale rapidement (dès les premiers échantillons) et d'affiner cette estimation au fur et à mesure.

— De plus pour la modélisation du signal, nous avons la possibilité d'utiliser des modèles du type AR, ARMA ou ARMA (X).

Quelques applications de ces techniques à l'analyse spectrale sont présentées dans [15] à [17].

1.4. PRÉDICTION ET FILTRAGE ADAPTATIF

Le signal étudié peut être représenté par un modèle autogressif à moyenne mobile (ARMA) [12-14] :

$$(1.10) \quad y_k = - \sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^n c_i e_{k-i} + e_k$$

où $n = \sup(n_a, n_c)$; n_a et n_c ordre des polynomes $A(q^{-1})$ et $C(q^{-1})$ donné dans (1.3) et (1.5). Comme son nom l'indique, il s'agit là d'une Estimation Adaptative en Ligne d'un Signal en présence de bruit (EAL).

Nous nous intéressons à l'estimation du signal à l'instant k notée \hat{y}_k . Le filtre adaptatif, permettant d'extraire le signal, peut-être considéré comme un prédicteur dont la sortie \hat{y}_k est la valeur du signal estimée à partir des données et de l'erreur de prédiction aux instants précédents. En supposant connus les paramètres du modèle (1.10) la prédiction optimale telle que $E\{(y_k - \hat{y}_k)^2\}$ soit minimale [5], peut s'écrire :

$$(1.11) \quad \hat{y}_k = - \sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^n c_i \varepsilon_{k-i}$$

car :

$$(1.12) \quad \varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k = e_k$$

ε_k est donc l'erreur de prédiction optimale qui est égale à un bruit blanc. En introduisant l'équation (1.12) dans (1.11) on obtient :

$$(1.13) \quad \hat{y}_k = - \sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^n c_i y_{k-i} - \sum_{i=1}^n c_i \hat{y}_{k-i}$$

En regroupant les termes en y_k et \hat{y}_k et tenant compte des équations (1.3) et (1.5), il résulte :

$$(1.14) \quad \hat{y}_k = \frac{C^*(q^{-1}) - A^*(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_k$$

$$y_{k-1} = \frac{R(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_{k-1}$$

où

$$(1.15) \quad \begin{cases} R(q^{-1}) = r_0 + r_1 q^{-1} + \dots + r_{n-1} q^{-n+1}; \\ r_i = c_{i+1} - a_{i+1} \end{cases}$$

\hat{y}_k est le signal obtenu par le filtrage de y_{k-1} à travers un filtre de fonction de transfert $R(z^{-1})/C(z^{-1})$. Ce

filtre est de type RII (réponse impulsionnelle infinie) si $C(q^{-1}) \neq 1$ (signal représenté par un modèle ARMA). En absence de la connaissance des paramè-

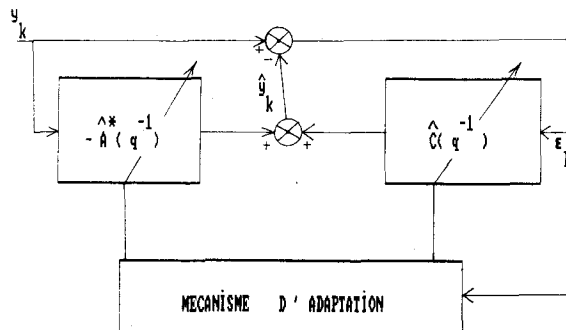


Fig. 2. — Schéma de principe de l'adaptation paramétrique.

tres du modèle, ceux-ci seront remplacés dans l'équation (1.11) par leurs estimées \hat{a}_i , \hat{c}_i qui seront pilotés par le mécanisme d'adaptation.

$$(1.16) \quad \hat{y}_k = - \sum_{i=1}^n \hat{a}_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^n \hat{c}_i \varepsilon_{k-i}$$

Dans ce cas l'équation (1.12) devient :

$$(1.17) \quad \varepsilon_k = -\tilde{A}^*(q^{-1}) y_{k-1} + \tilde{C}^*(q^{-1}) \varepsilon_{k-1} + C^*(q^{-1}) [e_{k-1} - \varepsilon_{k-1}] + e_k$$

où

$$(1.18) \quad \begin{cases} \tilde{A}^*(q^{-1}) = A^*(q^{-1}) - \hat{A}^*(q^{-1}); \\ \tilde{C}^*(q^{-1}) = C^*(q^{-1}) - \hat{C}^*(q^{-1}) \end{cases}$$

On obtient alors de l'équation (1.17) l'équation :

$$(1.19) \quad C(q^{-1}) \cdot (e_k - \varepsilon_k) = \tilde{A}^*(q^{-1}) y_{k-1} + \tilde{C}^*(q^{-1}) \varepsilon_{k-1}$$

Si la structure du modèle est correctement choisie et l'algorithme d'adaptation paramétrique utilisé converge alors $\tilde{A}^*(q^{-1}) = \tilde{C}^*(q^{-1}) = 0$ et donc ε_k converge vers e_k , ce qui signifie que \hat{y}_k tend vers la prédiction optimale.

Quelques applications sont présentées [12, 13, 14, 16] [application au rejet de perturbation, au filtrage adaptatif et au codage MIC différentiel (ou ADPCM Adaptive Differential Pulse Code Modulation)].

1.5. ANNULATION ADAPTATIVE DE BRUIT

Formellement, l'annulateur adaptatif de bruit introduit par WIDROW [16] à la forme donnée en figure 3.

On suppose qu'un signal w_k , doit être extrait d'un signal y_k sujet à l'effet d'un bruit η_k indépendant de w_k et résultant du filtrage d'un bruit $\bar{\eta}_k$ à travers un filtre $B(z^{-1})$ et qu'une mesure (notée u_k) corrélée au

APPLICATIONS

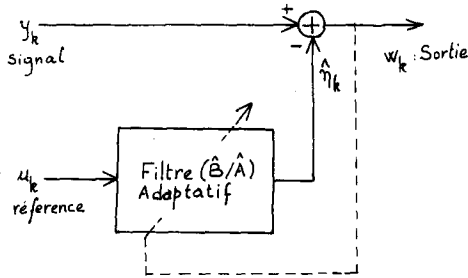


Fig. 3. — Réjecteur adaptatif de perturbation.

bruit $\bar{\eta}_k$ est disponible. Les relations entre η_k , $\bar{\eta}_k$ et u_k sont les suivantes :

$$(1.20) \quad \eta_k = B(q^{-1}) \bar{\eta}_k$$

$$(1.21) \quad u_k = A(q^{-1}) \bar{\eta}_k$$

et respectivement :

$$(1.22) \quad \eta_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_k$$

le signal mesuré y_k s'écrit alors :

$$(1.23) \quad y_k = \eta_k + w_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_k + w_k$$

Si $\hat{A}(q^{-1})$ et $\hat{B}(q^{-1})$ sont des estimées de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ alors une prédiction du terme de bruit et du signal \hat{y}_k est possible :

$$(1.24) \quad \hat{y}_k = \hat{\eta}_k = \frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})} u_k$$

et le signal d'erreur (erreur de sortie) :

$$(1.25) \quad \varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k$$

se rapprochera du signal utile w_k au fur et à mesure que les estimations de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ se rapprochent des valeurs exactes. Il s'agit là en fait de l'identification du filtre générateur du bruit η_k à partir de u_k et sachant qu'on mesure $\eta_k + w_k$.

1.6. ALGORITHME D'ADAPTATION PARAMÉTRIQUE

A chaque pas d'échantillonnage, la nouvelle estimation des paramètres du modèle du signal, sera donnée par une expression générale de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \text{Nouvelle} \\ \text{estimée} \\ \text{des} \\ \text{paramètres} \\ \text{(vecteur)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Estimée} \\ \text{précédente} \\ \text{des} \\ \text{paramètres} \\ \text{(vecteur)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Gain} \\ \text{d'adaptation} \\ \text{paramétrique} \\ \text{(matrice)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Fonction} \\ \text{des} \\ \text{mesures} \\ \text{(vecteur)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Fonction} \\ \text{de} \\ \text{l'erreur} \\ \text{de prédiction} \\ \text{(scalaire)} \end{bmatrix}$$

La mise en œuvre récursive de l'estimation adaptative des paramètres est fortement liée à la nature discrète tant du modèle du signal que de l'Algorithme d'Adaptation Paramétrique.

Le concept d'erreur de prédiction joue un rôle fondamental pour la mise en œuvre des Algorithmes d'Adaptation Paramétrique (AAP). Du fait qu'on adapte les paramètres à chaque pas, on rencontre deux types d'erreur de prédiction : erreur de prédiction *a priori* et erreur de prédiction *a posteriori*. Nous illustrons ces concepts ci-dessous.

Le modèle du signal (1.1) pour $w_k = e_k$ et $c_i = 0$ pour $i = 1, \dots, n$ peut être réécrit sous la forme :

$$(1.26) \quad y_k = \theta^T \varphi_{k-1} + e_k$$

où

$$(1.27) \quad \theta^T = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]$$

est le vecteur des paramètres et

$$(1.28) \quad \varphi_{k-1}^T = [-y_{k-1}, -y_{k-2}, \dots, -y_{k-n}, u_{k-1}, \dots, u_{k-n}]$$

est le vecteur des mesures.

Quand les paramètres a_i et b_i sont connus le prédicteur optimal s'écrit :

$$(1.29) \quad \hat{y}_{k/k-1} = \theta^T \varphi_{k-1}$$

Quand a_i et b_i sont inconnus, le prédicteur linéaire optimal est remplacé par un prédicteur ajustable dont les paramètres vont être remis à jour, à chaque pas, par l'Algorithme d'Adaptation Paramétrique (AAP). La prédiction *a priori* est définie par :

$$(1.30) \quad \hat{y}_k^0 \triangleq \hat{y}(k/\hat{\theta}_{k-1}) = \hat{\theta}_{k-1}^T \varphi_{k-1}$$

où $\hat{\theta}_k$ est le vecteur paramètre ajustable (estimé). Ce prédicteur est entièrement basé sur les informations disponibles à l'instant $k-1$. A l'instant k , \hat{y}_k^0 permet de définir l'erreur de prédictions *a priori* :

$$(1.31) \quad \varepsilon_k^0 = y_k - \hat{y}_k^0 = y_k - \hat{\theta}_{k-1}^T \varphi_{k-1}$$

Cette erreur *a priori* est utilisée pendant la période d'échantillonnage pour calculer une nouvelle estimation du vecteur paramètre $\hat{\theta}_k$. En d'autres termes, $\hat{\theta}_k$ sera disponible durant cette période d'échantillonnage, une fois le calcul de l'AAP terminé.

Avec cette nouvelle estimée ($\hat{\theta}_k$), on peut obtenir une nouvelle prédiction de y_k basée sur les informations contenues dans φ_{k-1} et $\hat{\theta}_k$ qui sera appelée prédiction *a posteriori* :

$$(1.32) \quad \hat{y}_k \triangleq \hat{y}(k/k-1, \hat{\theta}_k) = \hat{\theta}_k^T \varphi_{k-1}$$

On aura alors une erreur de prédiction *a posteriori* définie par :

$$(1.33) \quad \varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - \hat{\theta}_k^T \varphi_{k-1}$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique aura alors la forme :

$$(1.34) \quad \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + F_{k-1} \Psi_{k-1} v_k$$

où

$$(1.35) \quad \Psi_k = f(\varphi_k) \quad \text{et} \quad v_k = f(\varepsilon_k^0)$$

Ψ_k est appelé en général vecteur des observations (ou régresseur) et v_k erreur d'adaptation.

1.7. ÉTAPES DE LA MODÉLISATION PARAMÉTRIQUE

La modélisation paramétrique adaptative des signaux (et des systèmes) se compose des trois principales étapes représentées par la figure 4.

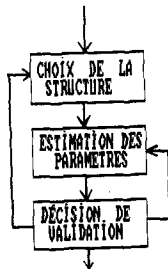


Fig. 4. - Étapes de la modélisation paramétrique.

- Choix de la structure du modèle. Ce choix est le résultat d'un compromis entre la complexité du modèle [ARMA (X) ou AR] et de son aptitude à représenter correctement le système dans le domaine de l'étude.

- Estimation paramétrique. Les paramètres du modèle sont estimés de façon à minimiser un critère représentatif de l'équivalence signal-modèle.

- Test de validation du modèle. L'importance de cette étape réside dans la vérification de l'aptitude du modèle obtenu à représenter la classe de signaux considérés (vérification du choix de la structure et de la méthode d'estimation).

2. Modélisation paramétrique et identification récurrente

2.1. PRINCIPE DE BASE

2.1.1. Modèles et prédicteurs de signaux

Le processus et son environnement stochastique (fig. 1), sont décrits par l'équation :

$$(2.1) \quad y_k = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_k + w_k$$

u_k est un signal mesurable à l'entrée du processus, d'un filtre ou d'un milieu de transmission. w_k étant un processus stationnaire de moyenne nulle et variance finie. Dans le cas où w_k a une densité

spectrale rationnelle le modèle (2.1) peut se représenter sous la forme (2.2) :

$$(2.2) \quad y_k = q^{-d} \frac{B_1(q^{-1})}{A_1(q^{-1})} u_k + \frac{C_1(q^{-1})}{A_2(q^{-1})} e_k$$

e_k est un bruit blanc gaussien $(0, \sigma_e)$, $C_1(q^{-1})$ et $A_2(q^{-1})$ ont leurs zéros à l'intérieur du cercle unité [$A_2(q^{-1})$ et $C_1(q^{-1})$ sont stables] [5]. En ramenant l'équation précédente au même dénominateur on obtient :

$$(2.3) \quad y_k = q^{-d} \frac{B_1(q^{-1}) A_2(q^{-1})}{A_1(q^{-1}) A_2(q^{-1})} u_k + \frac{C_1(q^{-1}) A_1(q^{-1})}{A_1(q^{-1}) A_2(q^{-1})} e_k$$

On aboutit ainsi au modèle de base commun à toutes les techniques de modélisation récurrentes, le modèle de prédiction ARMA (X) :

$$(2.4) \quad y_k = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_k + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e_k$$

où

$$A(q^{-1}) = A_1(q^{-1}) A_2(q^{-1});$$

$$B(q^{-1}) = B_1(q^{-1}) A_2(q^{-1});$$

$$C(q^{-1}) = C_1(q^{-1}) A_1(q^{-1})$$

Dans le cas où il n'y a pas de perturbations mesurables ($B(q^{-1}) \equiv 0; u_k \equiv 0$). Le spectre du signal s'obtient par la formule (1.7). Le spectre de transfert dû à la partie des entrées mesurables (u_k), si elle existe, peut s'obtenir de manière similaire.

Ainsi la connaissance des propriétés du signal y_k revient à celle du modèle représentant ce signal. Le problème se ramène à un problème de prédiction adaptative, qui conduit à l'estimation des paramètres du modèle.

Pour la prédiction adaptative, il existe différentes structures de prédicteurs :

- La structure série-parallèle utilisée par les méthodes d'équation d'erreur (Moindres Carrés Récurrents MCR, Moindres Carrés Étendus MCE, Maximum de vraisemblance MVR...) qui sont basées sur la minimisation d'un critère d'erreur conduisant au blanchissement de l'erreur de prédiction (séquence d'innovation) [1].

- La structure parallèle (utilisée par les méthodes d'erreur de sortie), basées sur le principe des systèmes adaptatifs avec modèle de référence (SAMR) (méthode du modèle d'estimation étendu, méthode d'erreur de sortie avec compensateur fixe ou avec compensateur ajustable) [3]. Ces méthodes sont basées sur le principe d'orthogonalité entre l'estimation optimale et l'erreur de prédiction.

(a) *Prédicteur série-parallèle (erreur d'équation)*

Le signal est représenté par le modèle ARMA (X) où $n = \sup(n_a, n_b, n_c)$, les paramètres du modèle sont

APPLICATIONS

supposés connus et les coefficients de rang supérieur au degré du polynôme considéré sont nuls.

$$(2.5) \quad y_k = - \sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{k-i} + \sum_{i=1}^n c_i e_{k-i} + e_k$$

On désire construire un prédicteur optimal pour $y_k(\hat{y}_k)$ qui a la propriété $E\{(y_k - \hat{y}_k)^2\}$ minimale.

Sachant que $\hat{y}_k = f(y_{k-1}, \dots, y_{k-n}, u_{k-1}, \dots, u_{k-n})$ est indépendant de e_k .

$$(2.6) \quad E\{(\hat{y}_k - y_k)^2\} \\ = E\left\{ \left(\sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{k-i} + \sum_{i=1}^n c_i e_{k-i} - \hat{y}_k \right) \right\} \\ \quad \text{Terme A} \\ + E\{e_k^2\} \\ \quad \text{Terme B}$$

Le prédicteur optimal est celui qui annule le terme A, ce qui signifie que $\varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k = e_k$; l'erreur de prédiction ε_k est une séquence d'innovation. Ceci peut servir de critère pour déterminer le prédicteur optimal, soit :

$$(2.7) \quad \hat{y}_k = -A^*(q^{-1})y_{k-1} + B(q^{-1})u_k + C^*(q^{-1})\varepsilon_{k-1}$$

où $\varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k$ est une séquence d'innovation identique à un bruit blanc gaussien.

En additionnant à l'équation précédente $(C^*(q^{-1})y_{k-1} - C^*(q^{-1})y_{k-1})$ on obtient :

$$(2.8) \quad C(q^{-1})\hat{y}_k = [C^*(q^{-1}) - A^*(q^{-1})] \\ \times y_{k-1} + B(q^{-1})u_k$$

On aboutit à un prédicteur à deux entrées (y_{k-1} et u_k) et une sortie \hat{y}_k qui a une réponse impulsionnelle infinie dans le cas où $C(q^{-1}) \neq 1$.

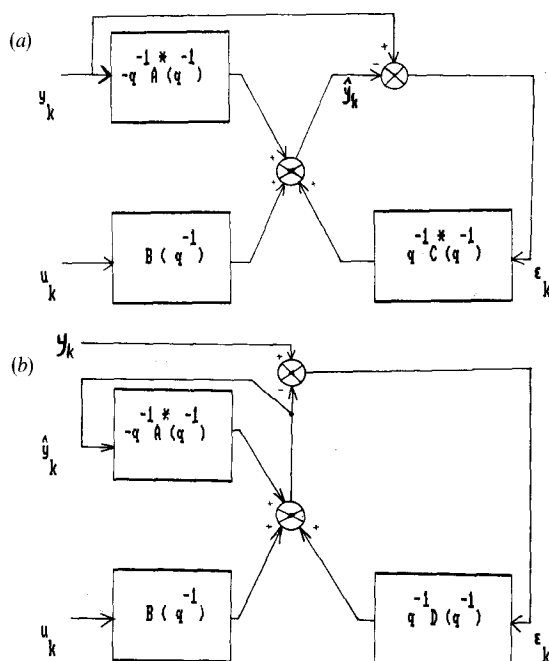


Fig. 5. — (a) Prédicteur série parallèle.
(b) Prédicteur parallèle.

(b) Prédicteur parallèle (erreur de sortie)

Partant de l'équation du prédicteur (2.7) et sachant que pour le prédicteur optimal $y_k = \hat{y}_k + \varepsilon_k$, on tire :

$$(2.9) \quad \hat{y}_k = -A^*(q^{-1})\hat{y}_{k-1} + B(q^{-1})u_k + D^*(q^{-1})\varepsilon_{k-1}$$

avec $D^*(q^{-1}) = C^*(q^{-1}) - A^*(q^{-1})$.

Le concept de prédicteur parallèle se généralise pour le cas où e_k est remplacé par un signal quelconque w_k indépendant de u_k . Dans ce cas le modèle du signal aura la forme.

$$(2.10 a) \quad y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_k + w_k$$

où

$$(2.10 b) \quad \hat{y}_k = -A^*(q^{-1})\hat{y}_{k-1} + B(q^{-1})u_k + A(q^{-1})w_k$$

et le prédicteur parallèle (erreur de sortie), aura la forme

$$(2.11) \quad \hat{y}_k = -A^*(q^{-1})\hat{y}_{k-1} + B(q^{-1})u_k$$

l'erreur de prédiction étant :

$$(2.12) \quad \varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k = A(q^{-1})w_k = w'_k$$

qui sera orthogonale à \hat{y}_k car $w'_k = A(q^{-1})w_k$ et u_k sont indépendants.

En identification récursive, les paramètres du prédicteur utilisé, sont estimés par un mécanisme d'adaptation, commandé par l'erreur de prédiction conformément à un certain critère d'optimisation.

Notations: L'équation du prédicteur (2.7) ou (2.9) peut s'écrire sous la forme :

$$(2.13) \quad \hat{y}_k = \hat{\theta}_k^T \varphi_{k-1}$$

Dans le cas de l'équation (2.7) :

$$\hat{\theta}_k^T = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n]$$

est le vecteur paramètre et

$$\varphi_{k-1}^T = [-y_{k-1}, \dots, -y_{k-n}, \\ u_{k-1}, \dots, u_{k-n}, \varepsilon_{k-1}, \dots, \varepsilon_{k-n}]$$

vecteur des observations (dans ce cas vecteur des mesures).

Dans le cas de l'équation (2.9) :

$$\hat{\theta}_k^T = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n, \hat{d}_1, \dots, \hat{d}_n]$$

est le vecteur paramètre et

$$\varphi_{k-1}^T = [-\hat{y}_{k-1}, \dots, -\hat{y}_{k-n}, \\ u_{k-1}, \dots, u_{k-n}, \varepsilon_{k-1}, \dots, \varepsilon_{k-n}]$$

est le vecteur des observations

2.1.2. *Algorithme d'adaptation paramétrique*

Considérons le modèle de signal (2.7) pour $c_i=0$, $i=1, \dots, n$ qui s'écrit alors sous la forme (1.26):

$$(2.14) \quad y_k = \theta^T \varphi_{k-1} + e_k$$

où

$$\theta^T = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]$$

vecteur paramètres

$$\varphi_{k-1}^T = [-y_{k-1}, \dots, -y_{k-n}, u_{k-1}, \dots, u_{k-n}]$$

vecteur d'observation et e_k est une séquence d'un bruit blanc gaussien.

La méthode d'identification récursive la plus connue pour ce type de structure de modèle est celle des moindres carrés récurrents où le vecteur paramètre $\hat{\theta}_k$ (estimée de θ à l'instant k) minimise le critère suivant:

$$(2.15) \quad J_k = \sum_{i=1}^k (y_i - \hat{\theta}_k^T \varphi_{i-1})^2$$

Le minimum de (2.15) s'obtient pour $\hat{\theta}_k$ tel que:

$$(2.16) \quad \frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = -2 \sum_{i=1}^k (y_i - \hat{\theta}_k^T \varphi_{i-1}) \cdot \varphi_{i-1} = 0$$

ce qui donne comme estimation optimale

$$(2.17) \quad \hat{\theta}_k = \left[\sum_{i=1}^k \varphi_{i-1} \varphi_{i-1}^T \right]^{-1} \sum_{i=1}^k y_i \varphi_{i-1} \\ = F_k^{-1} \cdot \sum_{i=1}^k y_i \varphi_{i-1}$$

On en déduit finalement une formule récursive de mise à jour du vecteur paramètre [1, 3]:

$$(2.18) \quad \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + F_k \varphi_{k-1} \varepsilon_k^0$$

avec

$$(2.19) \quad F_k^{-1} = F_{k-1}^{-1} + \varphi_{k-1} \varphi_{k-1}^T$$

et

$$(2.20) \quad \varepsilon_k^0 = y_k - \hat{y}_k^0 = y_k - \hat{\theta}_{k-1}^T \varphi_{k-1}$$

En utilisant le lemme d'inversion matricielle [1], l'équation (2.19) peut se réécrire:

$$(2.21) \quad F_k = F_{k-1} - \frac{F_{k-1} \varphi_{k-1} \varphi_{k-1}^T F_{k-1}}{1 + \varphi_{k-1}^T F_{k-1} \varphi_{k-1}}$$

Multipliant à gauche et à droite par φ_{k-1} on obtient finalement une nouvelle expression pour $F_k \varphi_{k-1}$ qui introduite dans (2.18) nous donne:

$$(2.22) \quad \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + F_{k-1} \varphi_{k-1} \frac{\varepsilon_k^0}{1 + \varphi_{k-1}^T F_{k-1} \varphi_{k-1}}$$

L'erreur de prédiction *a posteriori* définie dans (1.33) est donné par:

$$(2.23) \quad \varepsilon_k = \varepsilon_k^0 - [\hat{\theta}_{k-1} - \hat{\theta}_k]^T \varphi_{k-1}$$

en utilisant (2.21) pour évaluer $[\hat{\theta}_{k-1} - \hat{\theta}_k]$ on obtient la relation fondamentale liant l'erreur *a priori* et l'erreur *a posteriori*:

$$(2.24) \quad \varepsilon_k = \frac{\varepsilon_k^0}{1 + \varphi_{k-1}^T F_{k-1} \varphi_{k-1}}$$

Ce qui permet de réécrire (2.19) sous la forme:

$$(2.25) \quad \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + F_{k-1} \varphi_{k-1} \varepsilon_k$$

A noter que dans le cas de l'algorithme des moindres carrés récurrents (MCR), le gain d'adaptation F_k est décroissant, ce qui empêche de suivre les variations éventuelles des paramètres du modèle du signal.

La structure générale des algorithmes d'adaptation paramétrique est proche de la forme des (MCR). Les différences proviennent généralement du remplacement de φ_k par $\Psi_k = f(\varphi_k)$, de l'erreur appelée erreur d'adaptation v_k et de l'équation (2.21) par une équation récursive permettant d'obtenir différents profils de variation du gain d'adaptation. Cette forme générale est la suivante:

$$(2.26a) \quad \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + F_{k-1} \Psi_{k-1} v_k$$

$$(2.26b) \quad F_k^{-1} = \lambda_1(k) F_{k-1}^{-1} + \lambda_2(k) \cdot \Psi_{k-1}^T \Psi_{k-1}$$

$$(2.26c) \quad F_k = \frac{1}{\lambda_1(k)} \times \left[F_{k-1} - \frac{F_{k-1} \Psi_{k-1} \Psi_{k-1}^T F_{k-1}}{(\lambda_1(k)/\lambda_2(k)) + \Psi_{k-1}^T F_{k-1} \Psi_{k-1}} \right]$$

$$(2.26d) \quad v_k = \frac{y_k - \hat{\theta}_{k-1}^T \varphi_{k-1} + f(v_{k-1}, v_{k-2}, \dots)}{1 + \Psi_{k-1}^T F_{k-1} \Psi_{k-1}} \\ 0 < \lambda_1(k) \leq 1; \quad 0 \leq \lambda_2(k) \leq \lambda < 2; \\ F(0) > 0$$

$\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$ sont des facteurs introduits pour permettre de fixer un compromis entre la précision de l'estimation et la capacité de poursuite des paramètres dans le cas de systèmes variants dans le temps. $\lambda_1(k) < 1$ tend à augmenter le gain d'adaptation tandis que $\lambda_2(k) > 0$ tend à le diminuer. En fait $\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$ introduisent des pondérations variables dans le temps dans le critère (2.15), en définissant un profil d'oubli sur les mesures et donc permettent de moduler la capacité d'adaptation de l'AAP.

La modélisation et l'identification récursive à partir des informations d'entrée-sortie du système, se justifie en grande partie par la possibilité de changement des paramètres du modèle dans le temps. Aussi se pose le problème de savoir prendre en compte les informations récentes et passées qui d'une part permettent l'identification du modèle et d'autre part, renseignent sur les variations possibles de ces paramè-

APPLICATIONS

tres. Ceci a motivé l'utilisation de facteur d'oubli exponentiel et de fenêtres de pondération, afin de pouvoir poursuivre les variations de paramètres dans le temps.

Dans la suite nous présentons les profils d'oubli pouvant être obtenus à l'aide de facteurs λ_1 et λ_2 et la fenêtre d'observation glissante. D'autres méthodes de détermination du facteur d'oubli en ligne, à partir d'une certaine mesure de la quantité d'information présente dans les données d'entrée-sortie, ont été proposées [21-22] et [25 à 27].

Profil d'oubli

Dans le cas de signaux ou systèmes à paramètres lentement variables dans le temps, nous devons introduire une pondération qui accorde plus de poids aux informations récentes relativement au passé. Le critère (2.15) devient, si $\{\alpha_k\}$ est une séquence de pondérations positives :

$$(2.27) \quad J_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i^k (y_i - \hat{\theta}_k^T \varphi_{i-1})^2$$

On choisit généralement $\alpha_i^k = \lambda_1^{k-i}$ et $\lambda_1 \in [0,95; 1]$.

Cette pondération permet de fixer un compromis entre la précision de l'estimation et la possibilité de suivre des variations de ces derniers en évitant que la matrice de gain F_k ne s'annule. Or avec cette méthode [si $\lambda_1(k) < 1$] le gain d'adaptation ($F_k^{-1} = \lambda_1 F_{k-1}^{-1} + \Psi_{k-1} \Psi_{k-1}^T$) risque de croître énormément (exemple si Ψ_{k-1} est constant ou si certaines composantes de Ψ_{k-1} sont nulles pendant une certaine période). Aussi pour éviter ce problème un second facteur $\lambda_2(k)$ est introduit tel que l'indique la formule (2.26b). Le facteur $\lambda_1(k)$ tend à augmenter le gain et $\lambda_2(k)$ tend à le diminuer, donnant ainsi à F_k une structure générale permettant d'aboutir à plusieurs algorithmes d'adaptation en fonction des choix pour les séquences $\{\lambda_1(k)\}$ et $\{\lambda_2(k)\}$:

$$\lambda_1(k) = \lambda_2(k) = 1, \quad \forall k;$$

algorithme à gain décroissant,

$$\lambda_1(k) = \lambda(k) \quad \text{et} \quad \lambda_2(k) = 1;$$

algorithme avec facteur d'oubli :

– fixe si $\lambda(k) = \text{Cte}$ (oubli exponentiel);

– ou variable

[exemple : $\lambda_1(k) = \lambda_0 \cdot \lambda_1(k-1) + 1 - \lambda_0$],

$$\lambda_1(k) = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2(k) = 0;$$

algorithme à gain d'adaptation constant, (type gradient).

$\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$ peuvent être choisis de manière à contrôler la trace de la matrice de gain F_k . On peut obtenir par exemple l'algorithme à trace constante si on fixe $\lambda_2(k)/\lambda_1(k) = c$, et on choisit de suivre la direction optimale d'adaptation des moindres carrés, mais en conservant la trace de la matrice de gain constante.

Fenêtre d'observation glissante

Très connue en traitement du signal, cette méthode consiste pour la mise à jour du vecteur paramètres, en l'utilisation d'une tranche de données comprise entre l'instant $k-N$ et k , si k est l'indice de l'instant courant et N la longueur de la fenêtre d'observation. Pour l'utilisation d'une fenêtre glissante sur les données, nous devons remplacer, dans l'algorithme d'adaptation paramétrique l'équation (2.26b) par :

$$(2.28) \quad F_k^{-1} = F_{k-1}^{-1} + \Psi_{k-1} \Psi_{k-1}^T - \Psi_{k-N}^T \Psi_{k-N}$$

On retranche de la formule de mise à jour du gain d'adaptation, la contribution des informations qui précèdent l'instant $(k-N)$ d'une manière récursive.

En posant :

$$(2.29) \quad G_k^{-1} = F_{k-1}^{-1} + \Psi_{k-1} \Psi_{k-1}^T$$

et en lui appliquant le lemme d'inversion matriciel on obtient :

$$(2.30) \quad G_k = F_{k-1} - \frac{F_{k-1} \Psi_{k-1} \Psi_{k-1}^T F_{k-1}}{1 + \Psi_{k-1}^T F_{k-1} \Psi_{k-1}}$$

L'équation (2.28) devient :

$$(2.31) \quad F_k^{-1} = G_k^{-1} - \Psi_{k-N} \Psi_{k-N}^T$$

En appliquant une deuxième fois le lemme d'inversion matriciel, on obtient une formule récursive de mise à jour du gain d'adaptation avec fenêtre glissante :

$$(2.32a) \quad F_k = G_k + \frac{G_k \Psi_{k-N} \Psi_{k-N}^T G_k}{1 - \Psi_{k-N}^T G_k \Psi_{k-N}}$$

et

$$(2.32b) \quad G_k = F_{k-1} - \frac{F_{k-1} \Psi_{k-1} \Psi_{k-1}^T F_{k-1}}{1 + \Psi_{k-1}^T F_{k-1} \Psi_{k-1}}$$

G_k contient la contribution des termes $\Psi_{k-N}, \Psi_{k-N+1}, \dots, \Psi_{k-1}$ et l'équation (2.32a) permet d'en retrancher la contribution de Ψ_{k-N} . Cette formule [équation (2.32b)] offre les possibilités d'agrandir la fenêtre d'observation par pas [en prenant $F_k = G_k$ au lieu de l'équation (2.32a)] et de la réduire en ajoutant à F_k les contributions des Ψ_{k-N+i} :

$$(2.33) \quad I(\Psi_{k-N+i}) = \frac{G_k \Psi_{k-N+i}^T \Psi_{k-N+i} G_k}{1 - \Psi_{k-N+i}^T G_k \Psi_{k-N+i}}$$

2.2. MÉTHODES D'ESTIMATION PARAMÉTRIQUE

Malgré sa simplicité, la méthode d'estimation des moindres carrés (MCR) à le grand désavantage de conduire à des estimations biaisées dès que la perturbation e_k dans l'équation (2.14) n'est plus un bruit blanc. En effet, on peut vérifier qu'en utilisant le prédicteur des MCR pour un modèle de signal avec $c_i \neq 0$ pour $i=1, \dots, n$, on a $E\{\varphi_{k-1} \cdot \varepsilon_k\} \neq 0$, même pour $\hat{\theta}_k = \theta$, ce qui implique, tenant compte de l'équation (2.25) que l'estimation des paramètres du

modèle, sera biaisée. Ceci a conduit au développement des différentes méthodes pour éliminer ce biais.

Elles diffèrent par :

- la structure du prédicteur;
- le choix des vecteurs de mesure et d'observation;
- la signification du vecteur paramètre (type de modèle);
- l'erreur d'adaptation.

Elles peuvent être groupées en trois classes différentes :

- les méthodes d'équation de l'erreur [1];
- les méthodes de l'erreur de sortie [3];
- les méthodes de la variable instrumentale [2].

Toutes ces méthodes utilisent la même structure pour l'algorithme d'adaptation paramétrique (AAP).

Nous nous limiterons par la suite à décrire la structure de ces méthodes, les types de modèles de signaux pouvant être traités et les conditions de convergence. Pour l'étude théorique de ces algorithmes, se reporter aux références [1] à [4], [11], [19] et [23].

2.2.1. Méthodes de l'erreur d'équation

(a) *Méthode des Moindres Carrés Récursifs (MCR ou MCS: Moindres Carrés Simples)*

Il s'agit de la méthode décrite précédemment, le modèle du signal étant :

$$(2.34) \quad y_k = -A^*(q^{-1})y_{k-1} + B(q^{-1})u_k + e_k$$

On choisit un prédicteur de la forme :

$$(2.35) \quad \hat{y}_k^0 = \hat{\theta}_{k-1}^T \Phi_{k-1}$$

pour cette méthode le vecteur d'observation et le vecteur de mesure sont identiques et on utilise l'algorithme d'adaptation présenté par les équations (2.26) avec :

$$(2.36) \quad \hat{\theta}_k^T = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n]$$

vecteur paramètre estimé

et

$$(2.37) \quad \Phi_{k-1} = \Psi_{k-1} = [-y_{k-1}, \dots, -y_{k-m}, u_{k-1}, \dots, u_{k-n}]$$

$$(2.38) \quad \varepsilon_k = y_k - \hat{\theta}_k^T \Phi_{k-1} = v_k = \frac{y_k - \hat{\theta}_{k-1}^T \Phi_{k-1}}{1 + \Psi_{k-1}^T F_{k-1} \Psi_{k-1}}$$

Le signal mesuré peut être représenté par :

$$(2.39) \quad y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_k + \frac{1}{A(q^{-1})} e_k$$

Cette méthode donne des estimations non biaisées uniquement pour des signaux modélisables par des équations de la forme (2.34) ou (2.39). De (2.39) on tire deux conclusions à savoir que cette méthode permet d'estimer sans biais, soit le modèle du filtre engendrant y_k à partir de u_k pour une perturbation

AR particulière, soit dans le cas $u_k \equiv 0$ d'estimer le modèle d'un signal du type AR.

(b) *Méthode des Moindres Carrés Étendus (MMCE)*

Cette méthode est appropriée, pour l'identification des modèles de signaux de la forme :

$$(2.40) \quad y_k = - \sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{k-i} + \sum_{i=1}^n c_i e_{k-i} + e_k$$

Le prédicteur ajustable est donné par :

$$(2.41) \quad \hat{y}_k^0 = - \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(k-1) y_{k-1} + \sum_{i=1}^n \hat{b}_i(k-1) u_{k-1} + \sum_{i=1}^n \hat{c}_i(k-1) \varepsilon_{k-i} = \hat{\theta}_{k-1}^T \Phi_{k-1}$$

$$(2.42) \quad \hat{y}_k = - \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(k) y_{k-i} + \sum_{i=1}^n \hat{b}_i u_{k-i} + \sum_{i=1}^n \hat{c}_i \varepsilon_{k-i} = \hat{\theta}_k^T \Phi_{k-1}$$

avec

$$(2.43) \quad \varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k \quad \text{et} \quad \varepsilon_k^0 = y_k - \hat{y}_k^0 = y_k - \hat{\theta}_{k-1}^T \Phi_{k-1}$$

Ces équations sont à comparer avec (1.11) :

$$(2.44) \quad \Phi_{k-1}^T = [-y_{k-1}, \dots, -y_{k-m}, u_{k-1}, \dots, u_{k-n}, \varepsilon_{k-1}, \dots, \varepsilon_{k-n}]$$

vecteur de mesure,

$$\Psi_{k-1}^T = \Phi_{k-1}^T$$

vecteur d'observation,

$$(2.45) \quad \hat{\theta}_k^T = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n]$$

vecteur paramètre estimé à l'instant k .

L'algorithme d'adaptation paramétrique (AAP) utilisé est identique à celui présenté par les équations (2.26) avec $v_k = \varepsilon_k$.

Cette méthode assure une estimation non biaisée des paramètres d'un modèle stationnaire de la forme (2.40) ou de la forme équivalente (2.4). La convergence quasi certaine a lieu pour des gains décroissants asymptotiquement [$\lambda_1(k)$ tendant vers 1] sous la condition (suffisante) que

$$H(z^{-1}) = (1/C(z^{-1}) - \lambda/2)$$

soit une fonction de transfert à partie réelle strictement positive (SPR), pour tout z tel que $|z|=1$ (i.e. pour toutes les fréquences) [25, 11].

(c) *Méthode du Maximum de Vraisemblance (MMVR)*

Cette méthode est identique à la précédente, sauf que le vecteur d'observation Ψ_k est obtenu en filtrant le

APPLICATIONS

vecteur de mesure φ_k par $1/D(q^{-1})$:

$$(2.46) \quad \psi_k = \frac{1}{D(q^{-1})} \varphi_k$$

tel que

$$\frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})} = \frac{\lambda}{2}$$

soit strictement réelle positive (SPR).

La condition de stricte positivité (SPR) se trouve ainsi modifiée, et elle peut être éliminée si on choisit $D(q^{-1}) = C(q^{-1})$. En pratique, on remplace $C(q^{-1})$ par

$$\hat{C}(q^{-1}, k) = 1 + c_1(k)q^{-1} + \dots + c_n(k)q^{-n};$$

son estimée à l'instant k . Cette méthode est une approximation de la méthode du maximum de vraisemblance classique, dans le sens où $C(q^{-1})$ est remplacé par son estimée à l'instant k . Elle est sensible à l'initialisation du vecteur paramètre [car il faut avoir une assez bonne estimation de $C(q^{-1})$ pour le filtrage]. Pour pallier cet inconvénient on démarre généralement l'identification par les moindres carrés étendus (MMCE), puis on commute soit directement, soit progressivement sur la MMVR en préfiltrant [équation (2.46)] par $D(q^{-1}) = \hat{C}(q^{-1})$. Ce filtrage ne peut se faire que pour les valeurs de $\hat{C}(q^{-1})$ qui sont stables d'où la nécessité d'un test de stabilité de $\hat{C}(z^{-1})$ et d'une procédure de stabilisation soit par contraction des zéros de $\hat{C}(z^{-1})$ soit par gel des paramètres dans les cas d'instabilité.

Cette méthode permet d'améliorer dans certains cas les résultats obtenus avec la méthode des MCE [1].

(d) *Méthode des Moindres Carrés Généralisés (MMCG)*

Cette méthode est destinée à l'identification des modèles de la forme:

$$(2.47a) \quad A(q^{-1})y_k = B(q^{-1})u_k + \frac{1}{G(q^{-1})}e_k$$

ou encore:

$$(2.47b) \quad y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_k + \frac{1}{A(q^{-1})G(q^{-1})}e_k$$

Elle diffère de la méthode des moindres carrés étendus par la modélisation des perturbations non mesurables ici, modélisées par un modèle AR long au lieu d'un ARMA, comme le montre l'équation (2.4b).

Le prédicteur ajustable est donné par:

$$(2.48a) \quad \hat{y}_k^0 = - \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(k-1)y + \sum_{i=1}^n \hat{b}_i(k-1)u_{k-i} + \sum_{i=1}^n \hat{q}_i(k-1)\alpha_{k-i}^T = \theta_{k-1}^T \varphi_{k-1}$$

$$(2.48b) \quad \hat{y}_k = - \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(k)y_{k-i} + \sum_{i=1}^n \hat{b}_i(k)u_{k-i} + \sum_{i=1}^n \hat{q}_i(k)\alpha_{k-i} = \hat{\theta}_k^T \varphi_{k-1}$$

et

$$(2.49) \quad \alpha_k = - \sum_{i=1}^n \hat{a}_i(k)y_{k-i} + \sum_{i=1}^n \hat{b}_i(k)u_{k-i}$$

$$(2.50) \quad \hat{\theta}_k^T = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n]$$

vecteurs paramètres estimés à l'instant k ,

$$(2.51) \quad \theta_{k-1}^T = [-y_{k-1}, \dots, -y_{k-n}, u_{k-n}, \dots, u_{k-1}, \alpha_{k-n}, \dots, \alpha_{k-1}]$$

vecteur de mesure,

$$\Psi_{k-1} = \varphi_{k-1}$$

Les estimations des paramètres du modèle sont fournies par l'algorithme d'adaptation paramétrique (AAP) (2.26) avec $v_k = \varepsilon_k$.

La convergence de cette méthode est assurée (condition suffisante) si la fonction de transfert

$$H(z^{-1}) = G(z^{-1}) - \frac{\lambda}{2}$$

est strictement positive réelle.

2.2.2. Méthodes de l'Erreur de sortie

L'objectif de ces méthodes est de construire un prédicteur adaptatif capable de s'affranchir des hypothèses sur la structure AR ou ARMA des perturbations pour obtenir des estimations non biaisées des paramètres du modèle du signal. L'idée fondamentale est la suivante: étant donné que dans la méthode des moindres carrés simples, en absence de bruit, y_k converge vers y_k , on peut considérer de remplacer dans le prédicteur les valeurs mesurées y_{k-1}, y_{k-2}, \dots par leur prédiction *a posteriori* $\hat{y}_{k-1}, \hat{y}_{k-2}, \dots$. Les performances en présence de perturbation seront améliorées, car la sortie du prédicteur adaptatif ne dépendra qu'indirectement des mesures (et donc de la perturbation) à travers l'algorithme d'adaptation. Cette dépendance peut par ailleurs disparaître asymptotiquement quand on utilise un gain d'adaptation décroissant.

(a) *Méthode d'Erreur de Sortie avec Filtre Fixe (MESFF)* [19]

Dans ce cas le modèle du signal est de la forme:

$$(2.52a) \quad y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_k + w_k$$

et respectivement:

$$(2.52b) \quad y_k = -A^*(q^{-1})y_{k-1} + B(q^{-1})u_k + A(q^{-1})w_k$$

où w_k est un signal de moyenne nulle et variance finie, indépendant de u_k . Le prédicteur adaptatif dans ce cas est de la forme.

$$(2.53) \quad \hat{y}_k^0 = -\hat{A}^*(k-1, q^{-1}) \hat{y}_{k-1} + \hat{B}(k-1, q^{-1}) u_k = \hat{\theta}_{k-1}^T \Phi_{k-1}$$

et respectivement

$$(2.54) \quad \hat{y}_k = -\hat{A}^*(k, q^{-1}) \hat{y}_{k-1} + \hat{B}(k, q^{-1}) u_k = \hat{\theta}_k^T \Phi_{k-1}$$

où

$$(2.55) \quad \hat{\theta}_k^T = [\hat{a}_1(k), \dots, \hat{a}_n(k), \hat{b}_1(k), \dots, \hat{b}_n(k)]$$

est le vecteur paramètre à l'instant k et

$$(2.56) \quad \Phi_{k-1}^T = [-\hat{y}_{k-1}, \dots, -\hat{y}_{k-n}, u_{k-1}, \dots, u_{k-n}]$$

le vecteur de mesure

$$\Psi_{k-1} = \Phi_{k-1}$$

L'erreur de prédiction *a posteriori* est définie par :

$$(2.57) \quad \varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k = \frac{y_k - \hat{y}_k}{1 + \Psi_{k-1}^T F_{k-1} \Psi_{k-1}}$$

et dans l'algorithme d'adaptation on utilise une erreur d'adaptation en général donnée par :

$$(2.58) \quad v_k = F(q^{-1}) \cdot \varepsilon_k = \frac{\varepsilon_k^0}{1 + \Psi_{k-1}^T F_{k-1} \Psi_{k-1}} + \sum_{i=1}^r f_i \varepsilon_{k-i}$$

où

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_r q^{-r}$$

(erreur de prédiction filtrée).

L'introduction du filtre $F(q^{-1})$ provient des conditions suffisantes de convergence qui s'expriment par la condition que $H(z^{-1}) = F(z^{-1})/A(z^{-1}) - \lambda/2$ soit strictement positive réelle (SPR). En pratique ce filtre est éventuellement nécessaire pour des ordres de $A(z^{-1})$ supérieur à 2 et dans le cas où on n'utilise pas un gain décroissant [$F(q^{-1})$ peut être par exemple une première estimation de $A(q^{-1})$ par les moindres carrés (MCR)].

Le grand intérêt de cette méthode est la possibilité d'obtenir des estimées non biaisées des paramètres a_i et b_i , quel que soit le type de perturbations w_k à moyenne nulle, variance finie et indépendantes de u_k , sans la nécessité d'augmenter le nombre de paramètres à estimer. Il faut noter aussi qu'à la convergence $\varepsilon_k = w_k$ (récupération de la perturbation), c'est donc le type de méthode à utiliser pour les problèmes d'annulation adaptative de bruit ou des problèmes se

formulant d'une manière similaire (à savoir l'estimation du modèle d'un signal relié à une excitation mesurable sans qu'il soit nécessaire de modéliser les perturbations).

Cette méthode ne peut pas être utilisée dans les cas où il n'y a pas d'entrée u_k mesurable.

(b) Méthodes d'Erreur de Sortie avec Filtre Ajustable (MESFA)

Dans ce cas on adapte aussi le filtre sur l'erreur de prédiction évitant ainsi un choix *a priori* de $F(q^{-1})$.

Le prédicteur est donné par les équations (2.53)-(2.54) et l'équation (2.58) est remplacée par :

$$(2.59) \quad v_k = \varepsilon_k + \sum_{i=1}^r \hat{f}_i(k) \varepsilon_{k-i}$$

Dans ce cas les vecteurs $\hat{\theta}_k$ et Ψ_{k-1} deviennent :

$$(2.60) \quad \hat{\theta}_k^T = [\hat{a}_1(k), \dots, \hat{a}_n(k), \hat{b}_1(k), \dots, \hat{b}_n(k), \hat{f}_1(k), \dots, \hat{f}_r(k)]$$

$$(2.61) \quad \Psi_{k-1}^T = [-\hat{y}_{k-1}, \dots, -\hat{y}_{k-n}, u_{k-1}, \dots, u_{k-n}, \varepsilon_{k-1}, \dots, \varepsilon_{k-n}]$$

Le filtre ajustable permet de s'affranchir de la condition de stricte réelle positivité, pour assurer la stabilité globale de la méthode, pourvu que $F(k, q^{-1})$ soit stable. Il est donc nécessaire d'inclure dans l'algorithme un test de stabilité. Théoriquement le modèle de perturbation pour lequel une estimation non biaisée est obtenue est de la forme :

$$w_k = \frac{1}{C(q^{-1})} e_k$$

Des études en simulation ont néanmoins montré la robustesse de cet algorithme vis-à-vis du modèle de la perturbation [4, 8].

(c) Méthode d'Erreur de Sortie avec Modèle d'Estimation Étendu (MESMEE)

Dans les méthodes d'erreur de sortie précédentes, on a utilisé un filtre compensateur (fixe ou ajustable), pour satisfaire la condition de stricte positivité (SPR) assurant la stabilité globale; dans ce cas là on utilise un modèle de prédicteur ajustable étendu pour lever cette condition [18]. Cette méthode adapte, en plus du modèle du système, un modèle pour les perturbations non mesurables. Le prédicteur ajustable est de la forme :

$$(2.62a) \quad \hat{y}_k^0 = -\hat{A}(k-1, q^{-1}) \hat{y}_{k-1} + \hat{B}(k-1, q^{-1}) u_k + \hat{D}^*(k-1, q^{-1}) \varepsilon_{k-1} = \hat{\theta}_{k-1}^T \Phi_{k-1}$$

et respectivement :

$$(2.62b) \quad \hat{y}_k = -\hat{A}^*(k, q^{-1}) \hat{y}_{k-1} + \hat{B}(k, q^{-1}) u_k + \hat{D}^*(k, q^{-1}) \varepsilon_{k-1} = \hat{\theta}_k^T \Phi_{k-1}$$

APPLICATIONS

Les erreurs de prédiction *a priori* et *a posteriori* sont données par :

$$(2.63) \quad \varepsilon_k^0 = y_k - \hat{y}_k^0 = y_k - \hat{\theta}_{k-1}^T \Phi_{k-1}$$

$$(2.64) \quad \varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k = \frac{\varepsilon_k^0}{(1 + \Psi_{k-1}^T F_{k-1} \Psi_{k-1})};$$

$$(2.65) \quad \Psi_{k-1}^T = \Phi_{k-1}^T = [-\hat{y}_{k-1}, \dots, -\hat{y}_{k-n}, \\ u_{k-1}, \dots, u_{k-n}, \varepsilon_{k-1}, \dots, \varepsilon_{k-n}]$$

est le vecteur d'observation.

$$(2.66) \quad \hat{\theta}_k^T = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n, \hat{d}_1, \dots, \hat{d}_n]$$

est le vecteur paramètres estimé à l'instant k où $\hat{d}_i = \hat{c}_i - \hat{a}_i$; sont les coefficients de

$$(2.67) \quad D(q^{-1}) = C^*(q^{-1}) - A^*(q^{-1})$$

dont le degré est $n_d = \max(n_a, n_c)$.

Cette méthode possède les mêmes propriétés asymptotiques que la méthode des MMCE [4] et contrairement aux deux méthodes précédentes, elle reste applicable si $u_k \equiv 0$ (cas d'un signal). Elle offre souvent de meilleures performances que la MMCE durant l'étape transitoire (horizon d'estimation court).

2.2.3. Méthodes de la Variable Instrumentale (MVI)

Considérons un signal donné par l'équation (2.4) ou (2.52a). Le prédicteur ajustable utilisé par la méthode des moindres carrés récurrents (MCR) est de la forme :

$$(2.68) \quad \hat{y}_k^0 = -\hat{A}^*(k-1, q^{-1}) y_{k-1} \\ + \hat{B}(k-1, q^{-1}) u_k = \hat{\theta}_{k-1}^T \Phi_{k-1}$$

où $\hat{\theta}_{k-1}$ et Φ_{k-1} sont donnés par les équations (2.36) et (2.37).

L'utilisation de ce prédicteur et d'un vecteur d'observation $\Psi_{k-1} = \Phi_{k-1}$ conduit à des estimations paramétriques biaisées. On montre aisément que pour des modèles de la forme (2.4) ou (2.52a), $E(\Psi_{k-1} \cdot \varepsilon_k) > 0$ ce qui implique en prenant compte de l'équation (2.25) de l'algorithme d'adaptation sur un certain horizon qu'un biais va apparaître (même si on utilise une estimation exacte). Pour obtenir une estimation non biaisée il faut donc assurer $E\{\Psi_{k-1} \cdot \varepsilon_k\} = 0$. Ceci peut s'obtenir soit en blanchissant ε_k (comme pour les MCE ou MMVR) soit en cherchant un vecteur Ψ_{k-1} qui est fortement corréllé avec les variables non entachées de bruit mais non corréllé à la perturbation. Ce type de vecteur s'appelle vecteur des variables instrumentales et il est noté $\Psi_{IV}(k)$.

Dans l'algorithme d'adaptation on remplace le vecteur d'observation par la variable instrumentale $\Psi_{IV}(k)$. La variable instrumentale peut être choisie de diverses manières donnant lieu à diverses méthodes [10]; nous en présentons deux :

— la variable instrumentale symétrique à observations retardées;

— la variable instrumentale symétrique à modèle auxiliaire parallèle.

Ces méthodes comme celles de l'erreur de sortie (à filtre fixe ou filtre ajustable) sont particulièrement adaptées pour les problèmes d'annulation adaptative de bruit ou en général pour l'estimation du modèle d'un signal relié à une excitation mesurable sans qu'il ne soit nécessaire de modéliser les perturbations.

(a) Méthode de la Variable Instrumentale symétrique à Observation Retardée (MVIOR)

Si le modèle de signal est de la forme

$$(2.69) \quad y_k = - \sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{k-i} + \sum_{i=1}^n c_i e_{k-i} + e_k$$

et on remplace dans Ψ_{k-1} donné par l'équation (2.37) y_{k-i} par y_{k-i-r} , on aura alors un vecteur de variable instrumentale

$$(2.70) \quad \Psi_{IV}^T(k-1) \\ = [y_{k-1-r}, \dots, y_{k-n-r}, u_{k-1}, \dots, u_{k-n}] = \Psi_{k-1}^T$$

qui aura la propriété souhaitée, à savoir $E\{\Psi_{IV}^T(k-1) \cdot \varepsilon_k\} = 0$ à l'équilibre si $r \geq n_c$. Pour que cette méthode donne des bons résultats il faut encore que y_{k-r} soit proche du signal non bruité à l'instant k . Il en résulte que cette approche ne fonctionnera que dans le cas où la fréquence d'échantillonnage est élevée par rapport à la dynamique $B(q^{-1})/A(q^{-1})$ et le bruit se trouve dans une bande haute fréquences par rapport à cette même dynamique.

Dans le cas de l'absence du signal d'excitation u_k , cette méthode permet d'obtenir une estimation non biaisée de la partie AR du spectre d'un signal ARMA. Il faut noter que pour cette méthode si $B(q^{-1}) = 0$, elle est équivalente à la méthode de corrélation de Yule Walker, très souvent utilisée pour l'estimation autorégressive en traitement du signal [6, 19, 30].

(b) Méthode de la Variable Instrumentale à Modèle Auxiliaire (symétrique) (MVIMA)

Dans cette méthode, le vecteur des observations Ψ_{k-1} utilisé dans les moindres carrés équation (2.37) est remplacé par le vecteur suivant :

$$(2.71) \quad \Psi_{IV}^T(k-1) = [\hat{y}_{IV}(k-1), \dots, -\hat{y}_{IV}(k-n), \\ u_{k-1}, \dots, u_{k-n}] = \Psi_{k-1}$$

où les variables \hat{y}_{IV} sont engendrées par un modèle auxiliaire du signal non bruité construit à partir des estimés \hat{a}_i et \hat{b}_i .

$$(2.72) \quad \hat{y}_{IV}(k) = -\hat{A}^*(k, q^{-1}) \hat{y}_{IV}(k-1) + \hat{B}(k, q^{-1}) u_k$$

Mais les variables instrumentales ne seront significatives que si les estimées de A, B sont assez proches des vraies valeurs. Pour cette raison, cette méthode nécessite un horizon d'initialisation en moindres carrés simples permettant d'obtenir une première estima-

tion de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$. A la fin de l'horizon d'initialisation la méthode instrumentale est effectivement démarrée.

Dans le cas déterministe, seule la stabilité locale peut être assurée, et la convergence locale est assurée de manière quasi certaine (avec probabilité : = 1 en environnement stochastique, si les perturbations sont indépendantes des entrées u_k pour le cas (b), à modèle auxiliaire ou si $n_c < r$ pour le cas de perturbations type ARMA dans le cas (a) à observations retardées.

Le caractère local de la stabilité et la convergence de cette méthode, nécessite l'emploi d'un test de stabilité et le démarrage de l'identification par la méthode des moindres carrés pour obtenir une bonne initialisation du vecteur paramètre θ_{k_0} et du gain d'adaptation F_{k_0} .

2.2.4. Validation du modèle identifié

La validation du modèle identifié a une grande importance car elle permet de juger son aptitude à représenter un certain type de signal. La validation porte essentiellement sur deux aspects :

- (a) La variance de l'erreur de prédiction résiduelle R_0 .
- (b) Les propriétés statistiques des erreurs de prédiction résiduelle.

Le premier test qui porte sur le calcul de R_0 (N est le nombre de données) :

$$(2.73) \quad R_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{\theta}^T \varphi_{i-1})^2$$

permet de choisir les ordres des polynômes A, B et éventuellement C (en règle générale on choisit $n_a = n_c$) en absence d'information *a priori*. La règle de base consiste à augmenter les ordres d'une unité tant que la diminution de R_0 est significative. (Réduction de R_0 d'au moins 30 à 50%.) On peut aussi utiliser les critères de choix d'ordre type FPE (Erreur de Prédiction Finale) ou AIC (critère d'information de Akaike) [30-32].

Le deuxième test est particulièrement destiné à apprécier la qualité de l'estimation des paramètres et permet de déterminer la méthode appropriée pour chaque application.

En effet si la méthode d'estimation utilisée est approprié pour un type de signal, les propriétés statistiques de l'erreur de prédiction résiduelle sont celles qui correspondent à la convergence de l'algorithme. En concret, on teste :

– Soit la blancheur des erreurs résiduelles, pour les méthodes d'estimation basées sur le blanchissement asymptotique de l'erreur de prédiction (moindres carrés simples, moindres carrés étendus, moindres carrés généralisés, maximum de vraisemblance récursif, erreur de sortie avec modèle d'estimation étendu), par calcul des autocorrélations.

– Soit la décorrélation entre l'erreur de prédiction résiduelle et le signal prédit par le modèle, pour les méthodes basées sur la décorrélation asymptotique du

vecteur des observations et de l'erreur de prédiction (variable instrumentale, erreur de sortie), par calcul des intercorrélations.

2.5. INTERPRÉTATION FRÉQUENTIELLE DE L'ERREUR DE MODÉLISATION

On montre dans [2] et [5] que les erreurs de modélisation dans le domaine temporel ont un équivalent dans le domaine fréquentiel.

Nous nous limiterons ici à indiquer les principaux résultats et leur interprétation.

Définissons par $\varphi_u(\omega)$, $\varphi_y(\omega)$ les spectres de u et de y puis par $\varphi_{yu}(\omega)$ le spectre d'intercorrélation entre y et u .

Rappelons que la fonction de cohérence $\Gamma(\omega)$ est définie par :

$$(2.74) \quad \Gamma(\omega) = \frac{|\varphi_{yu}(\omega)|^2}{\varphi_u(\omega) \cdot \varphi_y(\omega)}$$

Pour un modèle de type ARMAX la minimisation de $E\{\varepsilon_k^2\}$ où ε_k est l'erreur de prédiction (égale à un bruit blanc dans le cas optimal) est équivalente à la minimisation du critère fréquentiel suivant :

$$(2.75) \quad E\{\varepsilon_k^2\} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi_y(\omega)}{|C(e^{j\omega})/A(e^{j\omega})|^2} (1 - \Gamma(\omega)) d\omega + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi_u(\omega)}{|C(e^{j\omega})/A(e^{j\omega})|^2} \times \left[\frac{\varphi_{yu}(\omega)}{\varphi_u(\omega)} - \frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})} \right]^2 d\omega$$

– Le premier terme [dans (2.75)] correspond au résidu de spectre (incohérent) non interprété par la fonction de transfert.

– Le second terme correspond au carré de la différence (ou distance) entre la vraie fonction de transfert qui est donnée par $(\varphi_{yu}(\omega)/\varphi_u(\omega))$ et la fonction de transfert estimée $(B(z^{-1})/A(z^{-1}))$. Cette distance ou différence est pondérée par un facteur qui peut être relié au rapport signal sur bruit

$$(2.76) \quad \left(S/B = \frac{\varphi_u(\omega)}{|C(e^{j\omega})/A(e^{j\omega})|^2} \right)$$

C'est-à-dire que l'identification du modèle de transmission de u à y sera meilleur dans les zones de fréquences où le rapport S/B est grand, dans le cas où il n'y a pas d'entrée $u_k \equiv 0$ et $B(z^{-1}) = 0$ (cas d'un signal), $\Gamma(\omega) = 0$ et le critère devient :

$$(2.77) \quad E(\varepsilon_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi_y(\omega)}{|C(e^{j\omega})/A(e^{j\omega})|^2} d\omega$$

ce qui correspond à minimiser le rapport entre la densité spectrale du signal ($\varphi_y(\omega)$) et la densité

APPLICATIONS

spectrale donnée par le modèle qui le représente ($|C(e^{j\omega})/A(e^{j\omega})|^2 \cdot \sigma_e^2$).

Ceci souligne, d'une part l'équivalence entre les techniques fréquentielles et les techniques paramétriques, d'autre part leur complémentarité du point de vue souplesse d'utilisation, relativement aux conditions expérimentales et aux exigences exprimées par l'utilisateur.

3. Présentation du Progiciel d'Identification de Modèles (PIM)

Le progiciel interactif (PIM) (Adaptech) ⁽¹⁾ pour l'identification des modèles paramétriques des signaux et systèmes, supporté par les micro-ordinateur IBM-PC XT/AT (et compatibles) et APPLE II a été développé avec l'objectif de mettre les techniques d'identification paramétrique à la portée de tous ceux concernés par les problèmes de modélisation de systèmes ou de signaux [28]. Deux idées principales ont été retenues pour la conception de ce progiciel.

1. Il n'existe pas de structure de modèle et de méthode d'identification uniques pour résoudre la variété des problèmes de modélisation rencontrés en pratique. Il convient donc de mettre à la disposition des utilisateurs l'ensemble des techniques connues.

2° Étant donné le grand choix de variantes possible (structures de modèle, méthodes d'identification, profil des gains d'adaptation) il faut assurer un haut degré de convivialité au progiciel pour que les utilisateurs soient débarrassés des aspects « techniques » et qu'ils puissent se concentrer sur la qualité des résultats obtenus pour un problème donné et leur interprétation.

En dehors des fonctions d'identification paramétrique et validation des modèles identifiés, le progiciel comporte des modules pour l'acquisition des données et leur traitement éventuel en temps réel, la gestion de données, la simulation de données, le calcul des spectres et un graphique pour la visualisation des spectres et réponses temporelles. Un organigramme est donné dans la figure 6.

3.1 MODULE D'IDENTIFICATION PARAMÉTRIQUE

Ce module intègre quatre types de structures de modèle, neuf méthodes d'identification et sept profils de gain d'adaptation.

Il permet à l'utilisateur :

- de choisir une structure (parmi quatre) pour le modèle, soit en fonction des connaissances *a priori* qu'il possède sur le système, soit d'une façon arbitraire (qui sera validée par la suite en fonction des résultats obtenus);
- de choisir une méthode d'identification, parmi celles applicables à la structure choisie, méthodes qui

⁽¹⁾ Développé en collaboration par le Laboratoire d'Automatique de Grenoble (INPG-ENSIEG, UA 228-CNRS) et Adaptech.

sont présélectionnées par l'ordinateur et affichées à l'écran;

- de choisir le type de gain d'adaptation parmi les sept possibilités offertes par le logiciel, en fonction des caractéristiques du signal à modéliser (stationnaire, non stationnaire).

Pour les divers choix, des indications sont données à l'écran et diverses options sont présélectionnées par défaut. L'utilisateur peut améliorer les résultats obtenus (et tester par le module validation) lors d'un second passage en modifiant les choix proposés par défaut.

Par ailleurs, l'utilisateur peut suivre, s'il le désire, l'évolution du traitement à l'écran et décider de continuer, arrêter ou changer d'expérience. En effet, les valeurs de la trace du gain d'adaptation, du facteur d'oubli, des erreurs d'adaptation et des paramètres du modèle sont imprimées à chaque itération.

3.2 MODULE DE VALIDATION DES MODÈLES

Ce module a pour objectif de tester la qualité des modèles identifiés et de permettre de choisir la meilleure structure et la meilleure méthode pour un processus donné.

Ainsi pour l'analyse de la validité du modèle on teste soit la blancheur de l'erreur d'identification en calculant plusieurs fonctions d'autocorrélation (cas de la méthode des moindres carrés et ses variantes et de la méthode d'erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu), soit la décorrélation entre l'erreur d'identification et la sortie du modèle par calcul de leur fonction d'intercorrélacion (cas des méthodes d'erreur de sortie avec filtre compensateur et des méthodes de la variable instrumentale).

3.3 MODULE D'ÉTUDE FRÉQUENTIELLE ET TEMPORELLE

Ce module permet le calcul de caractéristiques temporelles et fréquentielles des modèles des systèmes identifiés et la densité spectrale des modèles de signaux identifiés. Une partie graphique appelé par ce module permet de visualiser les courbes calculées (réponse indicelle, caractéristiques fréquentielles ou densité spectrale d'un signal).

3.4 MODULE SIMULATEUR DE SIGNAUX ET SYSTÈMES

Ce module permet d'engendrer des fichiers de données d'entrée-sortie pour des modèles de signaux ou systèmes donnés, en présence de perturbations simulées. Pour le cas des systèmes (avec entrée auxiliaire ou perturbations mesurables), l'entrée du système est une séquence binaire pseudo-aléatoire dont on choisit *a priori* et la longueur du registre de bruit en fonction du processus simulé. Par ailleurs, la moyenne et la variance du bruit affectant le système peuvent être choisies de manière à obtenir un certain rapport signal sur bruit.

ANALYSE SPECTRALE PARAMÉTRIQUE ADAPTATIVE

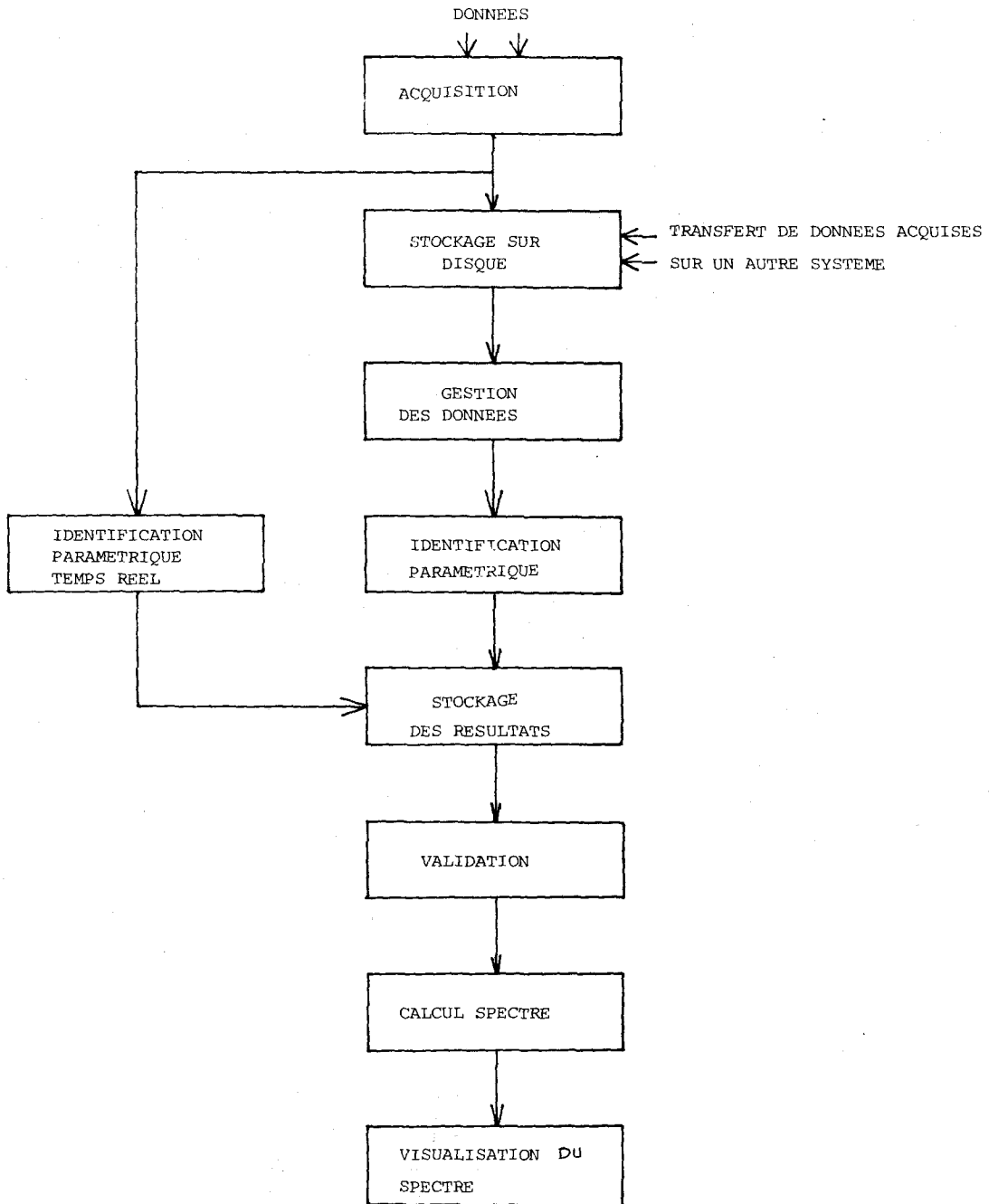


Fig. 6. — Structure du progiciel PIM.

3.5 MODULE DE GESTION DE FICHIER DE DONNÉES

Il permet de lire, d'imprimer et de normaliser les données et si besoin est, d'extraire les composantes continues des signaux d'entrée-sortie. On peut aussi changer la fréquence d'échantillonnage (en prenant un pas d'échantillonnage multiple du pas initial).

3.6 MODULES D'ACQUISITION DES DONNÉES

Ce module permet l'échantillonnage des données d'entrée-sortie du processus ou du signal. Les données

peuvent être sauvegardées sur disquette ou utilisées en temps réel pour l'identification du signal ou système.

4. Exemples d'application

Le progiciel PIM a été déjà utilisé pour de nombreuses applications en Automatique et Traitement du Signal. Parmi les applications en traitement

APPLICATIONS

du signal nous mentionnerons : détection, repérage et suivi des modes de vibrations sur des structures mécaniques souples (robots, scies) [20, 29], filtrage optimal de bruits des capteurs. Analyse spectrale de perturbations agissant sur différents procédés.

A titre d'illustration des méthodes d'identification décrites précédemment, nous présentons quelques résultats d'analyse spectrale, obtenus pour des signaux de test simulés et des essais sur une structure mécanique souple (robot). La densité spectrale du signal est calculée à l'aide du modèle estimé pour le signal, $(C(z^{-1})/A(z^{-1}))$. Les simulations ont été effectuées sur micro-ordinateur (APPLE II et IBM PC) et pour l'identification nous avons utilisé le logiciel PIM [28], décrit précédemment. Ces résultats ont pour objectif de mettre en évidence quelques propriétés des différentes méthodes plutôt que de les comparer. L'étude comparative de ces méthodes ainsi que d'autres techniques d'Analyse Spectrale est l'objectif d'un groupe de travail du GRECO « Système Adaptatifs » (SARTA 69 CNRS).

Premier cas : Dans ce cas, le signal est constitué de deux sinusoïdes et d'un bruit gaussien simulé $\{b_k\}$ avec un rapport signal sur bruit de 13,5 dB;

$$\left(\text{RSB} = 10 \log \left\{ \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)}{\left(\sum_{i=1}^N b_i^2 \right)} \right\} \right)$$

$$y_k = x_k + b_k$$

avec

$$x_k = A_1 \sin(2\pi \cdot 0,1 \cdot k) + A_2 \sin(2\pi \cdot 0,25 k + P)$$

Les sinusoïdes sont de même amplitude le déphasage est nul ($P=0$). On identifie pour le signal un modèle ARMA (4,4) (4 pôles et 4 zéros) sur 512 points de données sans facteur d'oubli (gain décroissant). L'introduction de zéros dans le modèle a pour but de réduire l'influence du bruit pour améliorer la précision de l'estimation de la partie AR sans avoir à surestimer son ordre.

La figure 7 montre que les fréquences sont détectées par toutes les méthodes (Méthode du Maximum de Vraisemblance [MMVR], Méthode des Moindres Carrés Étendus [MMCE], Méthode des Moindres Carrés Généralisés [MMCG] et Méthode d'Erreur de Sortie avec Modèle d'Estimation Étendu [MES-MEE]). Par contre la résolution ou finesse des pics est meilleure pour la MES-MEE et la MMCE que celle de la MMCG et la MMVR. On peut obtenir une bonne estimation à l'aide de la MMVR en repassant plusieurs fois les mêmes données, chaque itération permettra d'améliorer les résultats. Mais un tel signal possède une représentation ARMA avec des pôles et zéros très proches du cercle unité, ce qui fait que la méthode MMVR possède un transitoire d'autant plus long que les zéros de $C(z^{-1})$ sont proches du cercle unité ($\Psi_k = (1/\hat{C}(q^{-1})) \phi_k$). La durée de ce transitoire peut être sensiblement réduite par l'introduction d'une contraction sur les zéros de $\hat{C}(q^{-1})$ avant le préfiltrage [7]. Pour les autres méthodes une bonne

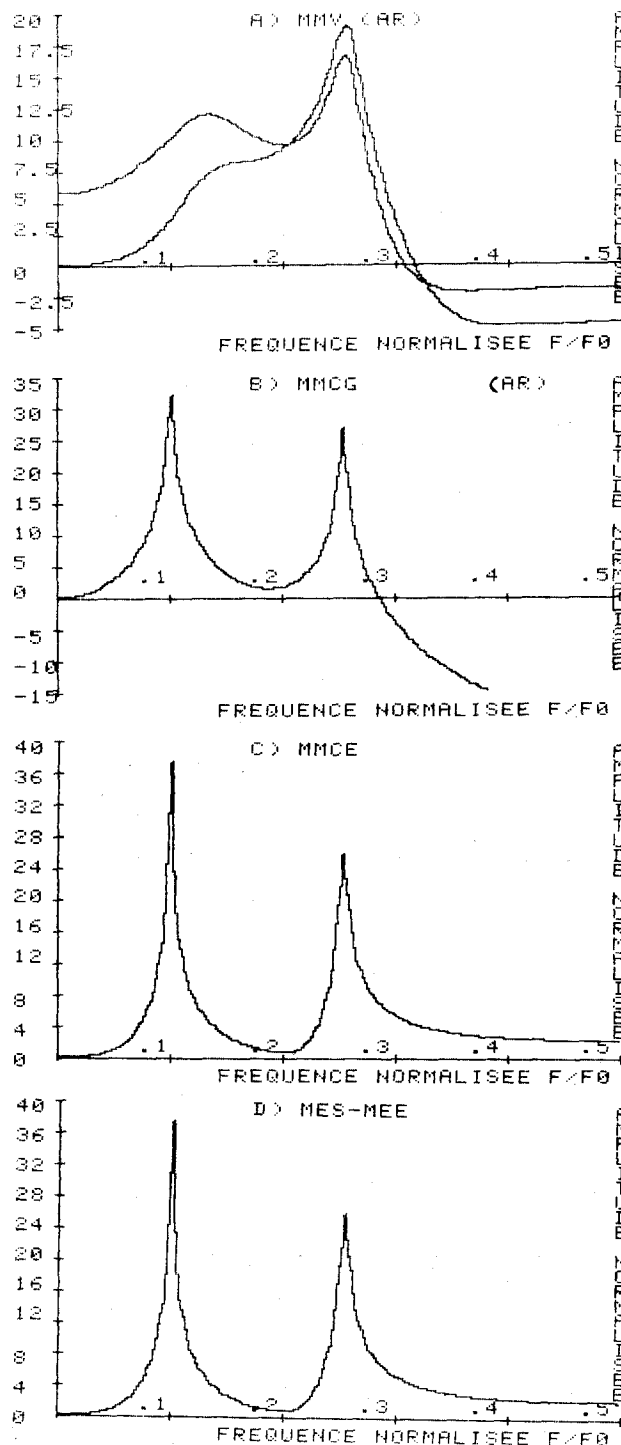


Fig. 7. — Densités spectrales obtenues par : (a) MMVR; (b) MMCG; (c) MMCE; (d) MES-MEE.

estimation est obtenue dès les 128 premiers échantillons.

Deuxième cas : Le signal est composé de 3 sinusoïdes bruitées et comporte 128 points. Le rapport signal sur bruit est 10 dB; ce signal a été proposé par le

GRECO 69 SARTA (CNRS) comme signal de test pour l'analyse spectrale.

$$y_k = \sum_{i=1}^3 A_i \cos(2\pi f_i k + \varphi_i) + b_k$$

$f_1=0,2$; $f_2=0,25$ et $f_3=0,35$, fréquences réduites;

$A_1=5$; $A_2=10$ et $A_3=5$, amplitudes;

$\varphi_1=\pi/4$; $\varphi_2=\pi/2$ et $\varphi_3=0$, déphasages.

Pour la plupart des méthodes de modélisation auto-ressives, il est nécessaire de surestimer l'ordre du modèle [6]. Un ordre de $N=6$ ne permet pas de détecter la fréquence ($f_1=0,2$) par la méthode (MCR), tandis qu'avec un ordre de $N=8$, on obtient 3 pics distincts sur un bloc de 128 points (fig. 8 a).

Si on utilise les méthodes de la variable instrumentale symétrique, l'emploi du modèle auxiliaire (MVI-MA)

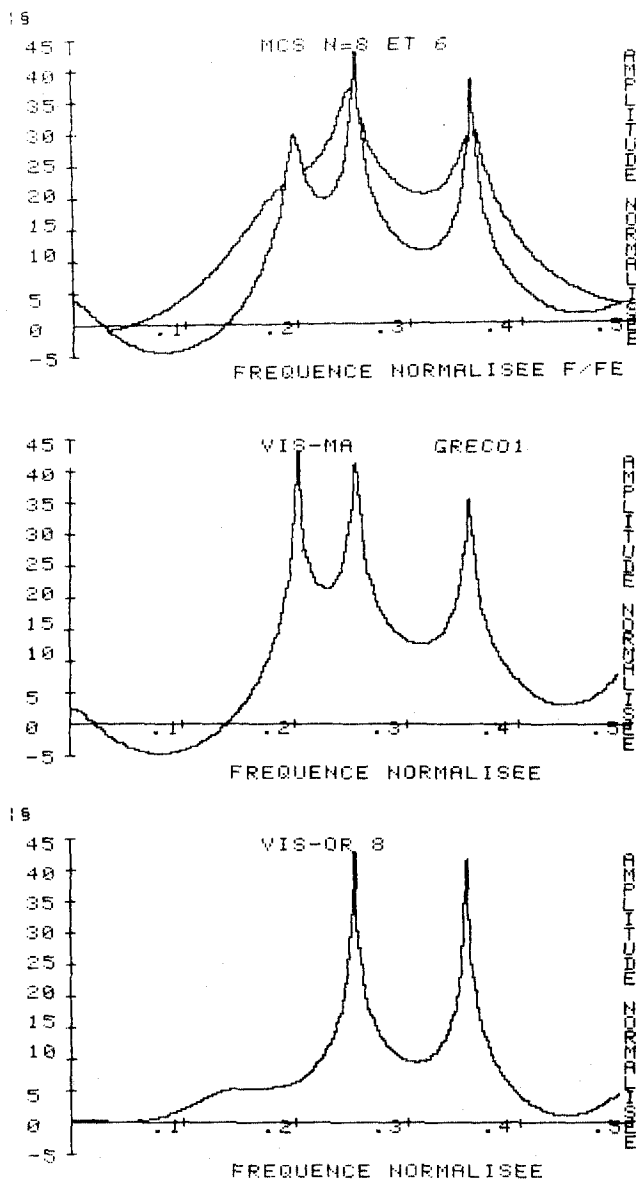


Fig. 8. - Densités spectrales obtenues par :
(a) MCR; (b) MVI-MA; (c) MVI-OR.

a permis d'améliorer la résolution ou finesse des pics (avec $N=8$ sur 128 points, fig. 8 b et c), tandis qu'avec les observations retardées (MVI-OR, retard $R=8$), une fréquence est mal détectée. Ceci est dû au choix du retard; avec un retard $R=0$, on retrouve la méthode MCS. Mais pour les deux MVI, le biais sur les fréquences détectées est plus faible que celui de la MCR.

Troisième cas : Ces résultats sont extraits de [17] et concernent deux autres signaux-test proposés par le GRECO « Systèmes Adaptatifs ». Le premier se compose d'une fréquence constante sur 128 points ($f=0,2$) puis croissante linéairement sur 128 points (de 0,2 à $f=0,4$), avec un rapport de signal-bruit $RSB=20$ dB. Le second est composé d'une sinusoïde, sans bruit, dont la fréquence varie paraboliquement (de 0,2 à 0,4). Le modèle estimé est un modèle ARMA (2,2) avec contrainte [17]. On impose à la partie (MA) la structure :

$$C(q^{-1}) = 1 + a_1 \cdot r \cdot q^{-1} + \dots + a_n r^n q^{-n} = A(rq^{-1})$$

avec $0 < r < 1$.

Nous avons utilisé le gain à trace constante et initialisé le vecteur paramètre à zéro pour le premier signal et tel que la fréquence initiale $f(0)=0,2$ pour le second signal (fig. 9). Ceci montre qu'en utilisant un modèle bien approprié, on peut poursuivre des fréquences variant dans le temps. Pour ce type de modèles sélectifs, la largeur de bande des pics et imposée [de l'ordre de $BP=\pi(1-r)$].

MODÉLISATION D'UN BRAS MANIPULATEUR SOUPLE

Dans cette partie nous présentons les résultats d'identification d'un bras flexible [29]. L'identification des modes propres a été réalisée en fixant une extrémité et provoquant la vibration du bras en lui appliquant soit une condition initiale (en déformation) soit un coup à la base de façon que tous les modes soient excités. Le déplacement de l'extrémité mobile, dû à la vibration, est mesuré grâce à un système muni d'une cellule à infrarouge. Le signal de déplacement ainsi obtenu est échantillonné après un filtrage anti-repliement.

L'identification par la méthode des moindres carrés (MCR) avec un gain décroissant (sur 256 points), d'un modèle AR d'ordre 8, réalisé sur le signal échantillonné à 20 Hz, a permis de détecter les 4 premiers modes propres du bras souple. Les fréquences propres obtenues ont permis de confirmer les résultats de modélisation par les éléments finis et coïncident avec celles données par un analyseur de spectre. La figure 10 montre le spectre obtenu à l'aide d'un modèle AR d'ordre 8 et la figure 11 concerne la densité spectrale donnée par un analyseur de spectre (FFT).

Une seconde identification sur le signal échantillonné à 10 Hz, a permis d'améliorer la précision en fréquence des deux premiers modes (0,48 et 2,1 Hz) à l'aide d'un modèle AR d'ordre 6 (voir fig. 12).

APPLICATIONS

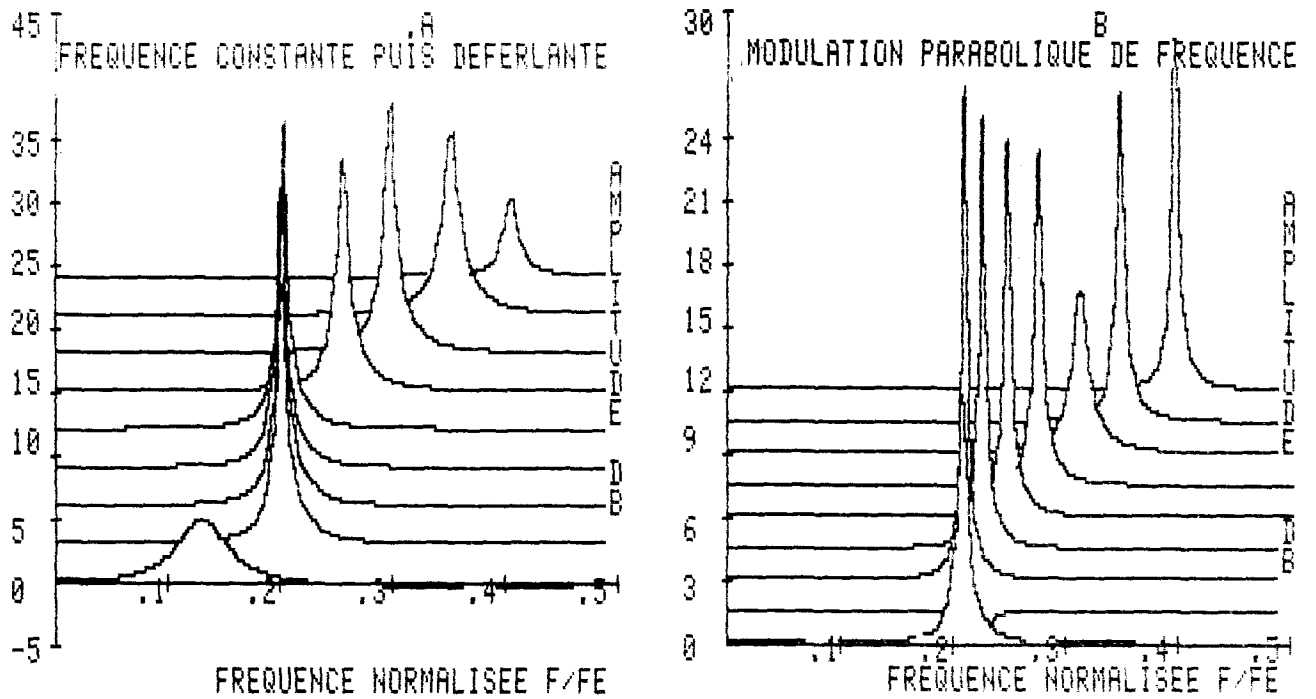


Fig. 9. - Cas de fréquence variant dans le temps : (a) linéairement; (b) paraboliquement.

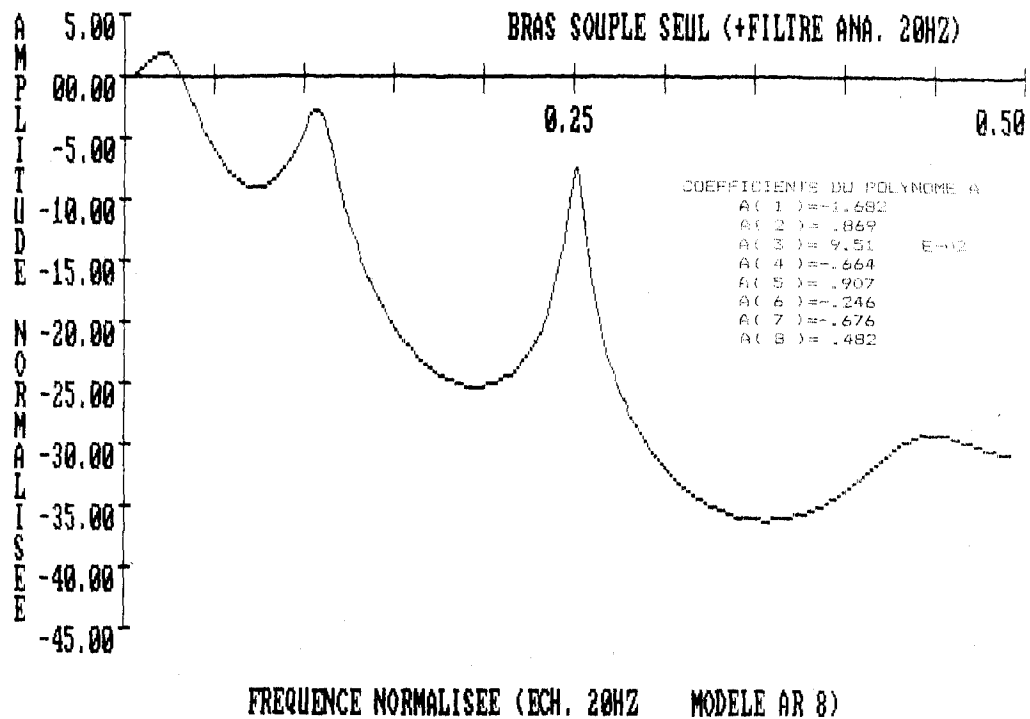


Fig. 10. - Densité spectrale du robot souple [modèle AR(8), signal échantillonné à 20 Hz].

ANALYSE SPECTRALE PARAMÉTRIQUE ADAPTATIVE

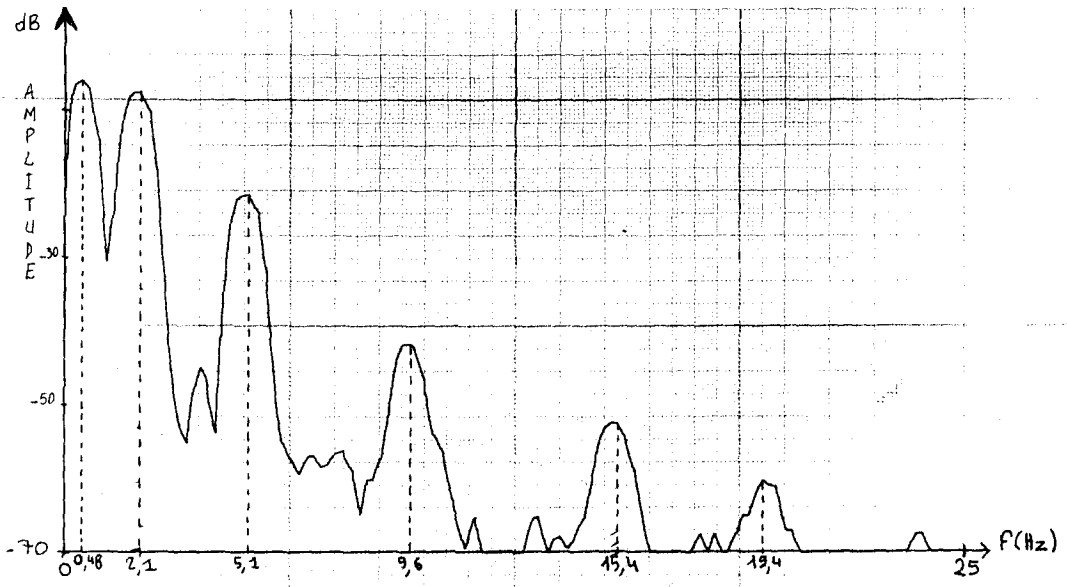


Fig. 11. — Densité spectrale donnée par un analyseur de spectre (FFT).

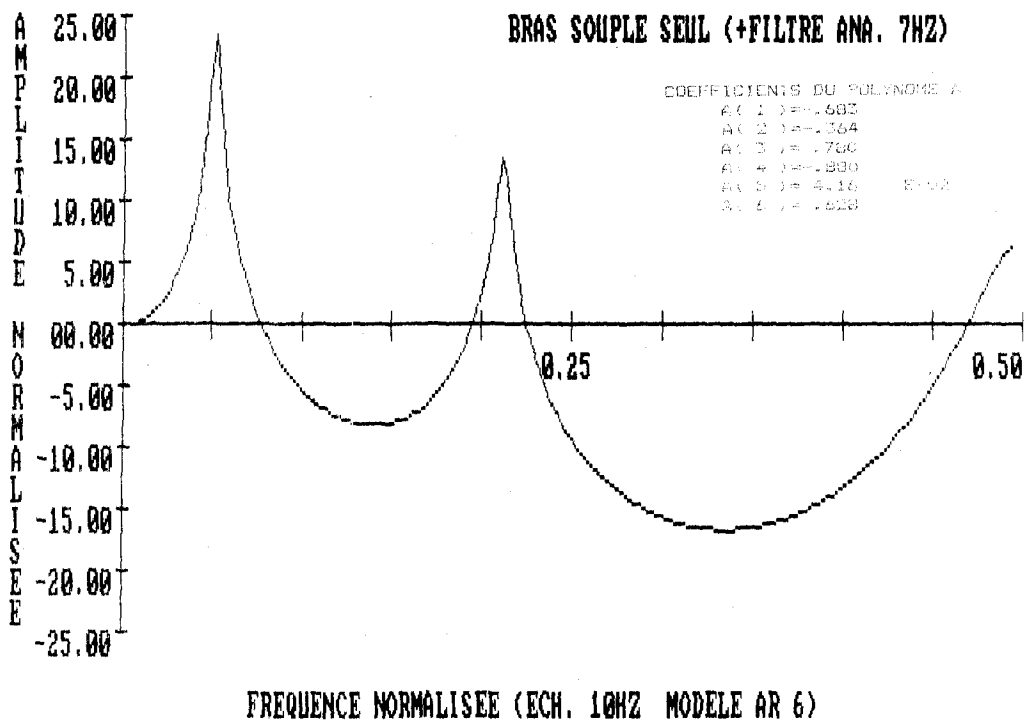


Fig. 12. — Densité spectrale du robot souple [modèle AR(6), signal échantillonné à 10 Hz].

Conclusion

Dans cet article, un panorama des méthodes récursives, d'identification de modèles paramétriques des signaux et systèmes, a été présenté. L'accent a été mis sur la présentation de la structure des différentes méthodes, leur raison d'être, les conditions de convergence dans un environnement stochastique et sur leur domaine d'application.

La structure des algorithmes d'adaptation paramétrique commune à toutes les méthodes d'identification a été présentée en détail indiquant l'influence du choix des différents paramètres sur la précision de l'estimation et la capacité de suivi de variation des modèles.

L'aspect validation du modèle identifié « qui est » spécifique aux méthodes paramétriques de modélisation du signal a été décrit. L'interprétation fréquentielle des critères temporels de validation des modèles paramétriques a été donnée, permettant ainsi d'établir un lien entre les méthodes de modélisation paramétriques (type série temporelle) ARMAX et non paramétriques (spectre).

Enfin la réalisation de progiciels (comme le progiciel PIM sur APPLE II et IBM PC) de plus en plus utilisés en France et à l'étranger ouvre largement la voie aux techniques paramétriques en analyse spectrale, identification.

Le logiciel présenté, constitue un outil doté d'une riche panoplie de méthodes d'identification qui permet de réaliser la modélisation de signaux et systèmes du type AR (X), ARMA ou ARMA (X) en vue d'applications à l'analyse spectrale paramétrique, au filtrage adaptatif ou la prédiction adaptative. Son interactivité, son caractère conversationnel et la possibilité du choix des options présélectionnés par défaut en font un outil très facile d'emploi.

Manuscrit reçu le 24 septembre 1985.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. LJUNG et T. SODERSTROM, *Theory and Practice of Recursive Identification*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, 1983.
- [2] T. SODERSTROM et P. STOICA, *The instrumental Variable Approach to System Identification*, Springer, Berlin, 1983.
- [3] I. D. LANDAU, *Adaptive Control: The model Reference Approach, Control and Systems Theory Series, VIII*, Dekker, New York, 1979.
- [4] L. DUGARD et I. D. LANDAU, Recursive Output Error Identification Algorithms: Theory and Evaluation, *Automatica*, 16, 1980, p. 443-462.
- [5] G. E. P. BOX et G. M. JENKINS, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco, 1970.
- [6] S. M. KAY et S. L. MARPLE Jr, Spectrum analysis - A modern Perspective, *Proc. IEEE*, 69, n° 11, November 1981.
- [7] B. FRIEDLANDER, A modified Prefilter for some Recursive Parameter Estimation Algorithm, *IEEE Trans. A.C.*, 27, n° 1, February 1982.
- [8] P. STOICA et T. SODERSTROM, Analysis of an Output Error Identification Algorithm, *Automatica*, 17, n° 6, November 1981.
- [9] A. RAHIMI, On line Spectral Control of rotating circular discs using thermal membrane stresses, *Ph. D. Dissertations*, Department of Mechanical Engineering, University of California, Berkeley, 1982.
- [10] T. SODERSTROM et P. STOICA, Comparison of some Instrumental Variable Methods. Consistency and Accuracy Aspects, *Automatica*, 17, n° 1, January 1981.
- [11] I. D. LANDAU, A Feedback System Approach to Adaptive Filtering, *IEEE, IT* 30, March 1984.
- [12] C. RICHARD et JOHNSON, Adaptive IIR Filtering: Current Results and Future Directions, *IEEE Trans.*, IT 30, March 1984.
- [13] B. FRIEDLANDER, System Identification Techniques for Adaptive Noise Cancelling, *IEEE ASSP*, 30, n° 5, October 1982, p. 699.
- [14] B. FRIEDLANDER, System Identification Techniques for adaptive Signal Processing, *IEEE-ASSP*, 30, n° 2, April 1982, p. 240.
- [15] B. FRIEDLANDER et J. O. SMITH, Analysis and performance evaluation of an adaptive Notch Filter, *IEEE, IT* 30, n° 2, March 1984.
- [16] B. WIDROW *et al.*, Adaptive Noise cancelling: Principles and Applications, *Proc. IEEE*, 63, n° 12, December 1975.
- [17] N. K. M'SIRDI et I. D. LANDAU, Analyse Spectrale Adaptative de Signaux à Bandes Étroites Multiples, 10^e Colloque GRETSI, Nice, 20-25 mai 1985. Voir aussi Note Interne LAG (ENSIEG).
- [18] I. D. LANDAU, Elimination of the real Positivity Condition in the Design of Parallel MRAS, *IEEE Trans.*, AC-23, n° 6, December 1978.
- [19] I. D. LANDAU, Unbiased recursive Identification Using Model Reference Adaptive Techniques, *IEEE-Trans. AC*, 21, April 1976.
- [20] C. D. MOTE et A. RAHIMI, Real time vibration control of rotating circular plates by temperature control and system identification, in *Adaptive systems in control and signal Processing*, New York, Pergamon Press, 1984.
- [21] T. R. FORTESCUE, L. S. KERSHENBAUM et B. E. YDSTIE, Implementation of Self Tuning Regulators with Variable Forgetting Factors, *Automatica*, 27, 1981, p. 831-835.
- [22] B. E. YDSTIE, Adaptive Control and Estimation with Forgetting Factors, 7th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, York, July 1985, England.
- [23] L. LJUNG, On positive real transfert functions and the convergence of some recursive schemes, *IEEE, Trans-AC*, AC-22, August 1977, p. 539-551.
- [24] L. LJUNG et K. GLOVER, Frequency Domain Versus Time Domain Methods in System Identification, *Automatica*, 17, n° 1, 1981, p. 71-86.
- [25] E. IRVING, Improving Power Network Stability and Unit Stress with Adaptive Generator Control, *Automatica*, 15, 1979, p. 31, 1979.

ANALYSE SPECTRALE PARAMÉTRIQUE ADAPTATIVE

- [26] T. HAGGLUND, *Recursive Least Squares Identification with Forgetting of old Data*, Report LUFTD2/(TFRI-7254)/1-038-1983, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden, 1983.
- [27] P. ANDERSON, *Adaptive Forgetting on Recursive Identification through Multiple Models*, Internal Report LITH-ISY-I-0638, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Linköping, Sweden, 1983.
- [28] ADAPTECH 1984, *Manuel d'utilisation du PIM (Progiciel d'identification de Signaux et Systèmes)*, 390, chemin du Manival, 38330 Saint-Ismier, France.
- [29] E. VAN DEN BOSSCHE, L. DUGARD, N. K. M'SIRDI et I. D. LANDAU, *Modélisation et identification d'un bras manipulateur souple à un degré de liberté*, Rapport Interne, LAG 85-76, LAG (ENSIEG), 1985, BP n° 46, 38402 Saint-Martin-d'Hères, France.
- [30] J. L. LACOUME, *Différentes approches de l'analyse spectrale*, *Annales des Télécommunications*, 34, n° 3-4, 1979, p. 142-153.
- [31] H. AKAIKE, A new look at the statistical model Identification, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC19, 1974, p. 716-723.
- [32] R. L. KASHYAP, Inconsistency of the AIC rule for estimating the order of Autorégressive Models, *IEEE Trans. AC*, 25, n° 5, October 1980.