

**Filtres de Kalman 2-D rapides**

**à modèle d'état non causal**

**pour la restauration d'image**

Fast 2-D Kalman filters with non-causal state-space

models for image restoration

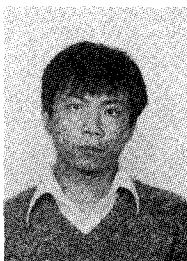


**Didier SAINT-FÉLIX**

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS/ESE/UPS), École Supérieure d'Électricité, plateau du Moulon, 91190 GIF-SUR-YVETTE et Gréco 69 SARTA

adresse actuelle : THOMSON-CGR, DTS/EPR, 283, rue de la Minière, 78530 BUC.

D. Saint-Félix, né en 1952, obtient le diplôme d'ingénieur de l'École Supérieure d'Électricité en 1976. Il entre alors au Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS/ESE) où il soutient en 1978 une thèse de Docteur-Ingénieur consacrée à l'identification de la réponse impulsionnelle de systèmes biologiques multivariables. Depuis son entrée au CNRS en 1979, il s'intéresse à la résolution des problèmes mal posés, et plus particulièrement à la déconvolution mono- ou bi-dimensionnelle. Les fondements théoriques des méthodes de régularisation et leur mise en œuvre avec des algorithmes rapides font l'objet de sa thèse de Doctorat es-Sciences Physiques. Il a simultanément une activité d'enseignement en mathématiques, en algorithmique rapide et en déconvolution. Depuis septembre 1986, il s'occupe d'imagerie tri-dimensionnelle à THOMSON-CGR.



**DU-XUÉ-CHENG**

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS/ESE/UPS), École Supérieure d'Électricité, plateau du Moulon, 91190 GIF-SUR-YVETTE et Gréco 69 SARTA

adresse actuelle : Laboratoire de Traitement des Signaux, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 16, chemin de Zellerine, CH-1007, LAUSANNE, SUISSE.

Du-Xué-Cheng, né en 1960, fait ses études supérieures à l'Institut Polytechnique de Nankin (Chine) dans le Département de Génie Électrique. Après un DEA de Traitement de l'Information à l'Université d'Orsay, il entre en 1984 au Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS/ESE) où il obtient en 1986 une thèse de Doctorat consacrée à la restauration d'image. Il travaille depuis janvier 1987 au Laboratoire de Traitement des Signaux de l'EPFL sur l'analyse de séquences d'images.

**Guy DEMOMENT**

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS/ESE/UPS), École Supérieure d'Électricité, plateau du Moulon, 91190 GIF-SUR-YVETTE et Gréco 69 SARTA.

Guy Demoment est ingénieur ESE, Docteur-Ingénieur, Docteur ès Sciences. Chargé de Recherche au CNRS et Professeur de probabilités et théorie du signal à l'École Supérieure d'Électricité, il est également Responsable du groupe « Problèmes inverses en Traitement du Signal et Imagerie » au Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS/ESE/UPS).

## RÉSUMÉ

La restauration d'une image dégradée par un système linéaire invariant par translation est un problème de déconvolution bi-dimensionnelle. Stabiliser la solution de ce problème mal posé requiert l'introduction d'information *a priori*, ce qui est fait ici dans un cadre stochastique bayésien. Il en résulte un problème d'estimation caractérisé par l'ampleur de ses dimensions. Les approches usuelles contournent cette difficulté en utilisant un modèle d'état avec dynamique dans l'état afin d'en réduire la dimension. Mais ceci repose sur une hypothèse de causalité artificielle pour un processus 2-D et complique considérablement le calcul d'une estimée lissée. Aussi proposons-nous ici des modèles d'état dégénérés sans causalité dans l'équation d'état, mais avec dynamique dans l'équation d'observation, vectorielle ou scalaire. Dans un traitement ligne par ligne, les propriétés d'invariance par décalage de la convolution permettent de calculer une solution lissée grâce à un filtre de Kalman optimal utilisant des équations de Chandrasekhar. Dans un traitement pixel par pixel, le volume des calculs peut être encore réduit au prix d'une hypothèse supplémentaire. Enfin, des filtres asymptotiques à remise à jour réduite sont déduits des filtres précédents. Des résultats obtenus sur des images simulées et expérimentales illustrent les performances des filtres décrits.

## MOTS CLÉS

Restauration d'images, filtre de Kalman rapide, équations de Chandrasekhar, modèle d'état non causal, algorithmes rapides.

## SUMMARY

The ill-posed image restoration problem is treated in a Bayesian framework to deal with both noise and prior information required to stabilize the solution. Direct discretization of the convolution equation provides a state-space model whose huge dimensions make a standard Kalman filter untractable in spite of its recursive nature. That is why the model dimension is usually reduced by introducing dynamics into the state equation, which requires an artificial causality assumption. To avoid this difficulty, we propose state-space models where the state is taken constant and equal to the entire object to be restored, and where dynamics appear only in the observation equation which may be either a vector or a scalar. When the image is scanned row by row, the shift properties of the convolution summation allow us to derive a fast Kalman algorithm through factorization techniques. When the image is scanned pixel by pixel, the computational requirement can be further reduced at the expense of an extra assumption. Sub-optimal asymptotic filters with a reduced update are then derived from these two filters. Finally, simulated and experimental results are presented.

## KEY WORDS

Image restoration, Kalman filter, Chandrasekhar equations, non-causal state-space model, fast algorithms.

## 1. Introduction

La restauration d'une image dégradée par un système linéaire et invariant par translation est un problème fréquemment rencontré [3, 21] : suppression des effets de bougé et de défocalisation en imagerie satellite dans le spectre visible ou infrarouge, amélioration de la résolution en échographie ultra-sonore médicale, en imagerie X éclair, etc. L'élimination de l'influence de la fonction de transfert de l'« instrument de mesure » sur l'observation est un problème de déconvolution bi-dimensionnelle qui, dans sa forme discrète, se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires de la forme [3] :

$$(1) \quad \mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

où  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{b}$  sont des vecteurs construits par concaténation des valeurs échantillonnées  $\{y_{mn}\}$ ,  $\{x_{mn}\}$ ,  $\{b_{mn}\}$  des champs bi-dimensionnels correspondant respectivement à l'image observée, à l'objet inconnu et au bruit supposé additif. La matrice  $\mathbf{H}$  est construite à partir des valeurs échantillonnées de la réponse impulsionnelle 2-D (Point Spread Function ou PSF) du système de formation d'image qui est supposée connue.

La résolution de (1) est un problème *mal posé*, c'est-à-dire dont la solution ne dépend pas continuellement (i. e. de façon stable) des données; une résolution sans précaution conduit donc à une solution inacceptable car instable. La *régularisation* du problème mal posé initial, c'est-à-dire, de façon très générale, l'introduction explicite d'une information *a priori* sur la solution  $\mathbf{x}$ , est une méthode efficace de stabilisation de cette solution [20, 6]. Pour prendre en compte de façon cohérente le bruit sur les observations et cette information *a priori*, nous nous plaçons dans un cadre statistique bayésien [13, 9]. L'objet à restaurer  $\{x_{mn}\}$  et le bruit  $\{b_{mn}\}$  sont considérés comme des réalisations de deux processus aléatoires normaux indépendants et leurs distributions constituent l'*a priori*. Par cette extension stochastique, le problème mal posé initial se transforme en le problème *bien posé* d'estimation de la loi *a posteriori* de  $\{x_{mn}\}$  sachant les observations  $\{y_{mn}\}$  [2]. Dans la pratique, on utilise un estimateur ponctuel  $\hat{\mathbf{x}}$  plutôt que la loi *a posteriori*  $f(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ . Ceci ne soulève pas de difficulté puisque, dans le cadre gaussien choisi, les critères usuels (maximum *a posteriori*, mini-max, médiane, etc.) conduisent à la même solution. L'estimateur à variance minimale que nous retiendrons pourra donc être qualifié d'optimal dans ce contexte. Mais il est clair que la solution obtenue dépend directement de l'information *a priori*

qui a été introduite et qui, dans le cadre stochastique choisi, caractérise une classe d'objets. La résolution complète du problème de déconvolution comporterait donc deux sous-problèmes :

- (i) estimer l'objet sachant toutes les observations, ce qui est un problème de *lissage*;
- (ii) estimer les paramètres des lois de probabilité *a priori* à partir des mêmes observations, ce qui est un problème d'*identification*.

Nous ne nous préoccupons ici que du premier sous-problème qui est abordé en supposant les paramètres connus *a priori*. Des indications sont données à la fin de l'article sur une solution envisageable du sous-problème (ii).

Malgré cette simplification du problème général, des difficultés substantielles demeurent. Le calcul direct de la solution à variance minimale par inversion des matrices d'information ou de covariance des mesures est en effet rendu impraticable par l'importance de leurs dimensions dans des problèmes réalistes de restauration d'images. Aussi envisage-t-on ici l'alternative d'un calcul récursif à l'aide d'un filtre de Kalman à deux indices. L'extension de la technique du filtrage de Kalman à la restauration d'images n'est pas une idée nouvelle, bien qu'elle soit surtout appliquée au cas d'images dégradées uniquement par un bruit additif ( $H=I$ ) [21]. Mais sa mise en œuvre se heurte à la dimension considérable de l'état dans le modèle obtenu directement à partir de l'équation de convolution. En effet, la façon la plus simple et la plus naturelle de construire un modèle d'état à partir de (1) consiste à prendre  $\mathbf{x}$ , c'est-à-dire la totalité de l'objet à restaurer, comme vecteur d'état et à extraire une ou plusieurs lignes de (1) pour former l'équation d'observation. On obtient ainsi un modèle d'état dégénéré car sans dynamique dans l'état. Or un filtre de Kalman standard demande de remettre à jour à chaque récursion la matrice de covariance d'erreur de prédiction dont les dimensions sont le carré de celles de l'état. Le modèle dégénéré précédent conduit donc rapidement à des dimensions prohibitives puisqu'à un objet de dimension  $128^2$  par exemple correspond une matrice de covariance de dimension  $16384^2$ . Aussi l'idée habituellement suivie consiste à réduire la dimension de l'état en introduisant un modèle dynamique (modèle AR par exemple) [21, 22]. Mais les modèles dynamiques mono-dimensionnels [15, 1] ou bi-dimensionnels [10, 22] adaptés à un traitement récursif reposent sur une hypothèse de semi-causalité. Ils supposent en effet que la valeur du champ en un point  $x_{mn}$  ne dépend que des  $x_{ij}$  situés dans un quart ou un demi-plan dont la position relative par rapport à  $x_{mn}$  dépend, qui plus est, du mode de balayage de l'image. Une telle hypothèse de causalité est artificielle pour la majorité des processus bi-dimensionnels pour lesquels aucune des deux dimensions ne peut être assimilée au temps et donc naturellement orientée. Ceci constitue en fait une des difficultés majeures de l'extension des techniques récursives 1-D à des problèmes 2-D. Il existe certes des modèles non causaux [21, 5], mais ceux-ci ne se prêtent pas à des traitements récursifs. Ce problème peut être résolu à condition de rechercher une solution lissée  $\hat{x}_{ij|LL'}$  (où  $LL'$  est le nombre total d'observations) et non plus

une solution filtrée  $\hat{x}_{ij|ij}$ . Mais ce problème de lissage est alors sérieusement compliqué, et d'ailleurs jamais traité complètement dans la littérature.

Cet article a donc pour but de montrer qu'il est possible de développer un filtre de Kalman « rapide » à deux indices qui ne demande pas d'hypothèse de causalité sur l'objet à restaurer et qui fournit une solution simple au problème du lissage. Pour cela, deux idées élémentaires sont exploitées. Tout d'abord, la dynamique des données dans un traitement récursif n'est que la conséquence de la façon d'explorer l'image à traiter et elle ne dépend donc que de la stratégie choisie par l'observateur. Cette dynamique ne doit donc conditionner que l'équation d'observation et non l'équation d'état par le biais d'une hypothèse de causalité. Ensuite, le volume des calculs dans un filtre de Kalman dépend certes de la dimension de l'état, mais aussi de la nature des équations à résoudre à chaque récursion. Or l'équation de Riccati discrète intervenant dans un filtre de Kalman standard conduit à un volume élevé en raison de sa trop grande généralité. L'utilisation explicite des propriétés d'invariance par décalage de la convolution doit permettre dans notre cas une simplification substantielle.

## 2. Filtre de Kalman 2-D à observation vectorielle

L'importance de la stratégie d'observation de l'image vient d'être soulignée. Nous allons considérer dans ce paragraphe le cas d'une exploration séquentielle ligne par ligne. Le filtre de Kalman rapide obtenu, directement transposable évidemment à une observation par colonne et non plus par ligne, sera appelé par la suite « filtre I ».

### 2.1. FORMULATION DU PROBLÈME ET NOTATIONS

Dans le modèle (1) de la dégradation de l'image, les vecteurs  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{b}$  sont définis par :

$$(2) \begin{cases} \mathbf{y}^t = [y(1, 1), \dots, y(1, L'), \dots, y(L, L')] \\ \mathbf{x}^t = [x(1, 1), \dots, x(1, M'), \dots, x(M, M')] \\ \mathbf{b}^t = [b(1, 1), \dots, b(1, L'), \dots, b(L, L')] \end{cases}$$

où toutes les grandeurs sont supposées complexes pour pouvoir traiter sans perte d'information les applications où des phénomènes de propagation d'onde interviennent [16]. Ces vecteurs peuvent être partitionnés en blocs de longueurs respectives  $L'$ ,  $M'$  et  $L'$  correspondant à une ligne de l'image, de l'objet et du bruit. Par exemple :

$$(3) \quad \mathbf{y}^t = [y_1^t | y_2^t | \dots | y_L^t]$$

La structure de  $H$  dépend de l'information *a priori* sur les bords de l'image [3, 16]. Il s'agit là d'une extension du problème de pré et post-fenêtrage des observations bien connu en filtrage 1-D. Mais il revêt en imagerie une importance particulière en raison de la proportion élevée d'observations situées sur les bords. Nous supposons ici que l'image correspond

à l'observation partielle d'un objet de dimensions plus grandes. Les dimensions (M, M') de la portion de l'objet qui contribue effectivement à la formation de l'image sont alors liées aux dimensions (L, L') de l'image et (N, N') de la PSF par :

$$(4) \quad M=L+N-1 \quad \text{et} \quad M'=L'+N'-1$$

H est alors une matrice (LL', MM') bloc-circulante [17] dont la première ligne-bloc  $\tilde{H}_1$  est :

$$(5) \quad H_1 = [\tilde{H}_N | \dots | \tilde{H}_1 | 0 | \dots | 0]$$

Chaque bloc  $\tilde{H}_i$  est une matrice (L', M') circulante, construite à partir des valeurs échantillonnées de la PSF et définie par sa première ligne  $\tilde{h}_i^1$  :

$$(6) \quad \tilde{h}_i^1 = [h(i, N') \dots h(i, 1) \ 0 \ \dots \ 0]$$

Il faut noter qu'avec l'hypothèse (4), le système (1) est fortement indéterminé. La nécessité de généraliser la notion de solution dans les problèmes mal posés n'apparaît que plus clairement dans ce cas. L'extension stochastique décrite dans l'introduction est un bon moyen d'y parvenir.

2.2. CHOIX D'UN MODÈLE D'ÉTAT

En accord avec les idées évoquées plus haut, nous considérons le modèle d'état non constant dégénéré suivant :

- (7)  $x_i = x_{i-1} = x$
- (8)  $y_i = H_i x + b_i$
- (9)  $H_i = H_{i-1} D_i \quad \text{et} \quad H_i D_i^t = H_{i-1}$
- (10)  $E[x] = x_0, \quad E[(x - x_0)(x - x_0)^*] = P_x$
- (11)  $E[b] = 0, \quad E[b \cdot b^*] = R_{bb}, \quad E[b \cdot x^*] = 0$

où  $x^*$  est l'adjoint de  $x$ . Ce modèle est caractérisé par un état  $x$  constant et égal à la totalité de l'objet à restaurer caractérisé par l'information *a priori* (10)-(11). On vérifie bien que la description de l'objet par (7) est non causale puisque totalement dégénérée. Une conséquence importante est que son estimation par un filtre de Kalman fournira simultanément les solutions des problèmes de prédiction (sans intérêt ici), de filtrage et de lissage. L'observation  $y_i$  correspond à une ligne de l'image [cf. équation (3)], et (9) est introduite pour modéliser la non-constance de la matrice d'observation  $H_i$  qui est la  $i$ -ième ligne-bloc de H [cf. équation (5)]. La matrice de transition d'observation  $D_i$  décrit la dynamique d'observation choisie par l'utilisateur. Dans le cas considéré ici d'une exploration séquentielle de l'image ligne par ligne,  $D_i$  est constante et égale à D, matrice-bloc de décalage par bloc :

$$(12) \quad D = \{ \tilde{D}_{ij} \} \quad \text{avec} \quad \tilde{D}_{ij} = \delta_{i+1}^j \cdot I_{M'}$$

où  $I_{M'}$  est la matrice unité de dimensions (M', M') et  $\delta_j^i$  le symbole de Kronecker. Il faut remarquer que la dynamique ne peut pas être transportée de l'équation d'observation (8) dans l'équation d'état (7) par un changement de variable car D est singulière. Le modèle d'état (7)-(9) que nous proposons est donc

bien fondamentalement différent des modèles dynamiques semi-causaux usuels.

2.3. DÉVELOPPEMENT D'UN FILTRE DE KALMAN 2-D RAPIDE

Un filtre de Kalman standard est impraticable avec un modèle d'état dégénéré tel que (7)-(9) à cause de la dimension de l'équation de Riccati discrète qui est indispensable pour remettre à jour la matrice de covariance d'erreur de prédiction  $P_i$ . Cette difficulté peut être contournée en remplaçant cette équation par des équations de Chandrasekhar. Leur principe consiste à s'intéresser aux incréments des différentes grandeurs intervenant dans le filtre plutôt qu'aux quantités elles-mêmes, et à les factoriser à chaque pas. L'application de cette méthode à notre modèle d'état non constant demande une définition des incréments différente de celle de Kailath [14]. Pour prendre en compte la non-constance du modèle, c'est-à-dire la dynamique de l'observation, on pose :

- (13)  $\Delta K_i = K_i - D' K_{i-1}$
- (14)  $\Delta R_i^e = R_i^e - R_{i-1}^e$
- (15)  $\Delta P_i = P_i - D' P_{i-1} D$

En supposant le bruit stationnaire pour pouvoir établir une récurrence intéressante, on obtient l'algorithme suivant pour le filtre I [7, 18] :

- (16)  $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + K_k (R_k^e)^{-1} (y_k - H_k \hat{x}_k)$
- (17)  $A_k = H_k Y_{k-1}$
- (18)  $B_k = A_k M_{k-1}$
- (19)  $R_k^e = R_{k-1}^e + A_k B_k^*$
- (20)  $K_k = D' K_{k-1} + Y_{k-1} B_k^*$
- (21)  $Y_k = Y_{y-1} - K_k (R_k^e)^{-1} A_k$
- (22)  $M_k = M_{k-1} + B_k^* (R_{k-1}^e)^{-1} B_k$

L'intérêt de la méthode est éclairé par les remarques suivantes. Tout d'abord,  $P_k$  n'apparaît pas explicitement dans (16)-(22). Il pourrait toutefois être calculé à chaque récursion par :

$$(23) \quad P_k = P_x + \sum_{i=1}^k Y_i M_i Y_i^*$$

Ensuite, si  $\rho$  est le rang de  $\Delta P_i$ , les matrices auxiliaires  $M_i$  et  $Y_i$  sont respectivement de dimensions constantes ( $\rho, \rho$ ) et ( $MM', \rho$ ). Le volume des calculs par récursion est alors proportionnel à  $\rho \cdot MM'$  au lieu de  $MM' \cdot MM'$  pour un filtre standard [7, 8]. Si les conditions initiales sont telles que  $\rho \ll MM'$ , alors le gain en volume de calculs et en encombrement mémoire est évident. De plus,  $M_i$  n'a pas à être définie positive contrairement à  $P_i$ . Or on sait que la perte de cette propriété par suite d'accumulation d'erreurs est une cause fréquente d'instabilité du filtre de Kalman standard qui a conduit au développement des algorithmes en « racine carrée ». Enfin, l'étude détaillée de l'initialisation de l'algorithme (voir § 2.4) montre que la complexité du filtre est directement proportionnelle au rang de déplacement de la matrice de covariance *a priori* du processus à res-

taurer, c'est-à-dire à sa distance à la stationnarité. C'est un résultat somme toute logique mais dont l'explicitation résulte de l'emploi de notre modèle dégenéré.

**2. 4. INITIALISATION DE L'ALGORITHME**

L'initialisation de l'algorithme doit être étudiée en détail. C'est en effet la factorisation initiale de  $\Delta P_2$  qui conditionne la valeur de  $\rho$  et donc, nous l'avons vu, la complexité arithmétique de l'algorithme. Mais c'est également lors de cette étape qu'est introduite l'information *a priori* nécessaire à la stabilisation de la solution de notre problème mal posé. Or de cet *a priori* va dépendre la « qualité » de la solution régularisée, c'est-à-dire son appartenance à une famille de solutions définie par l'utilisateur. Il faudra donc s'attendre à la nécessité d'un compromis sur ces points.

L'initialisation du gain et de la covariance de l'innovation se fait de manière classique par :

$$(24) \quad K_1 = P_x H_1^*$$

$$(25) \quad R_1^e = H_1 P_x H_1^* + \sigma^2 I_{L'}$$

avec

$$E[b_{ij} \cdot b_{mn}^*] = \sigma^2 \cdot \delta_i^n \cdot \delta_j^m$$

L'incrément initial  $\Delta P_2$  est alors donné par :

$$(26) \quad \Delta P_2 = P_x - K_1 (R_1^e)^{-1} K_1^* - D' P_x D$$

qui doit être factorisé sous la forme :

$$(27) \quad \Delta P_2 = Y_1 M_1 Y_1^* \quad \text{avec} \quad M_1 = M_1^*$$

Cette factorisation dépend de la matrice  $P_x - D' P_x D$ . Dans le cas général,  $P_x$  est une matrice-bloc définie à partir des covariances mutuelles  $R_{ij}$  :

$$(28) \quad R_{ij} = E[x_i \cdot x_j^*]$$

où  $x_i$  est la  $i$ -ième ligne de l'objet et où  $E[\dots]^*$  désigne la covariance centrée. Supposons que le processus  $\{x_{mn}\}$  soit stationnaire « verticalement » et appelons  $d$  la distance de corrélation entre lignes. Ces hypothèses permettent d'écrire :

$$(29) \quad R_k = R_{i, i-k} = \{r_{mn}^k\} = \{E[x_{i, m} \cdot x_{i-k, n}^*]\} = R_{-k}^*$$

$$(30) \quad R_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad |i-j| > d$$

$P_x$  est alors bloc-Toeplitz :

$$(31) \quad P_x = \begin{bmatrix} R_0 & R_{-1} & \dots & R_{-d} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_d & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & R_{-d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & R_d & \dots & \dots & R_0 \end{bmatrix}$$

Supposons de plus que le processus  $\{x_{mn}\}$  soit stationnaire « horizontalement » et appelons  $d'$  la distance

de corrélation entre colonnes. Il vient alors :

$$(32) \quad r_m^k = r_{j, j-m}^k = E[x_{ij} \cdot x_{i-k, j-m}^*] = (r_{-m}^k)^*$$

$$(33) \quad r_{ij}^k = 0 \quad \text{pour tout } k \text{ si : } |i-j| > d'$$

et chaque bloc  $R_k$  de  $P_x$  est une matrice Toeplitz :

$$(34) \quad R_k = \begin{bmatrix} r_0^k & r_{-1}^k & \dots & r_{-d}^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ r_d^k & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & r_{-d}^k \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & r_d^k & \dots & \dots & r_0^k \end{bmatrix}$$

Il faut noter que  $P_x$  n'est pas Toeplitz.

Soient  $Q_{ij}$  les blocs de dimensions  $(M', M')$  de  $Q = D' P_x D$ . De la définition (12) de  $D$ , il résulte que l'application des opérateurs  $D$  et  $D'$  respectivement à droite et à gauche correspond à un décalage par bloc parallèlement à la diagonale principale. Les  $Q_{ij}$  vérifient donc :

$$(35) \quad \begin{aligned} Q_{ij} &= R_{i-1, j-1} \\ \text{pour} \\ i &= 2, \dots, M, \quad j = 2, \dots, M \end{aligned}$$

$$(36) \quad \begin{aligned} Q_{ij} &= Q_{i1} = 0 \\ \text{pour} \\ i &= 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, M \end{aligned}$$

$P_x$  étant bloc-Toeplitz, tous les blocs de  $P_x - Q$  sont nuls sauf ceux des premières ligne-bloc et colonne-bloc :

$$(37) \quad P_x - Q = \begin{bmatrix} R_0 & R_{-1} & \dots & R_{-d} & 0 & \dots & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_d & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$P_x - Q$  étant la somme de  $M'$  matrices de rang  $\leq 2$  et l'observation étant de dimension  $L'$ , on a les inégalités :

$$(38) \quad \begin{aligned} \text{rang} [P_x - Q] &\leq 2 M' \\ \text{rang} [K_1 (R_1^e)^{-1} K_1^*] &\leq L' \end{aligned}$$

et le rang  $\rho$  de  $\Delta P_2$  vérifie donc :

$$(39) \quad \rho = \text{rang} [P_x - Q - K_1 (R_1^e)^{-1} K_1^*] \leq 2 M' + L'$$

L'incrément initial de la covariance peut alors être factorisé simplement (de manière non unique) en posant :

$$(40) \quad F^* = [R^* | 0 | \dots | 0] \quad \text{avec} \quad R R^* = R_0$$

$$(41) \quad G^* = R^{-1} \cdot [0 | R_{-1} | \dots | R_{-d} | 0 | \dots | 0]$$

où le caractère défini positif de  $R_0$  assure l'existence de  $R^{-1}$ . Ceci conduit à la factorisation :

$$(42) \quad \Delta P_2 = [\tilde{K}_1 | F | G]$$

$$\times \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & I \\ \hline 0 & I & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{K}_1^* \\ \hline F^* \\ \hline G^* \end{bmatrix} = Y_1 M_1 Y_1^*$$

avec :

$$\tilde{K}_1 = K_1 \cdot (R_1^e)^{-1/2}$$

2. 5. ÉVALUATION DE LA COMPLEXITÉ DE L'ALGORITHME

Lorsque la covariance centrée de l'objet est stationnaire,  $\rho$  est au plus égal à  $2M' + L'$  [équation (39)]. Dans la majorité des problèmes pratiques où les dimensions de la PSF sont faibles devant celles de l'image,  $M'$  est peu différent de  $L'$  [cf. équation (4)]. Le volume des calculs requis par (17)-(22) est donc au plus proportionnel à  $3M' \cdot MM'$ , contre  $MM' \cdot MM'$  pour un filtre de Kalman standard. De plus, la prise en compte du caractère creux de  $M_1$  [équation (42)] et de  $F$  [équation (40)] permet un gain supplémentaire substantiel.

Si l'objet est supposé de plus non corrélé,  $P_x$  est diagonale,  $Q$  se réduit au bloc  $R_0$ ,  $\rho$  est majoré par  $M' + L'$  et  $G$  est identiquement nul. L'hypothèse supplémentaire de blancheur conduit donc à une nouvelle réduction du volume des calculs et de l'encombrement mémoire.

2. 6. REMARQUES SUR L'HYPOTHÈSE DE STATIONNARITÉ

L'efficacité de la méthode repose essentiellement sur la petitesse du rang  $\rho$  de  $\Delta P_2$ . Or  $\rho$  est une mesure de la « distance à Toeplitz » de la matrice de covariance centrée *a priori* de l'état ( $\rho/M'$  est l'extension de la notion de rang de déplacement à la matrice-bloc  $P_x$ ). Cette distance dépend donc de la stationnarité de l'état. Le fait que l'hypothèse de stationnarité soit souvent discutable pour une image semble donc remettre en cause notre approche.

S'il est vrai qu'une complexité raisonnable ne peut être obtenue qu'avec un objet stationnaire ou quasi stationnaire, il faut bien voir que cette exigence ne porte que sur les propriétés à l'ordre deux. Elle ne concerne pas le moment d'ordre un,  $E[x] = x_0$ , qui d'ailleurs n'intervient qu'à l'initialisation. Or on sait [12] qu'une non-stationnarité de la seule moyenne permet de décrire une classe d'images non stationnaires déjà fort large. Cette non-stationnarité du premier ordre peut être prise en compte en initialisant l'état  $x_1$  avec une estimation de la moyenne locale de l'image plutôt que par la moyenne globale  $x_0$ , la PSF étant supposée normée. L'introduction de cette information *a priori* n'induit aucun calcul supplémentaire et permet d'éliminer les phénomènes d'instabilité fréquemment observés sur les bords de l'image ou au voisinage des zones à fort gradient [4, 23].

3. Filtre de Kalman 2-D à observation scalaire

La mise en œuvre du filtre précédent sur un petit ordinateur peut s'avérer pénible car il demande de mettre à jour à chaque récursion des matrices dont la taille demeure importante, et d'inverser la matrice de covariance de l'innovation. Pour réduire ces inconvénients, nous allons considérer maintenant une observation scalaire et non plus vectorielle. L'image est observée pixel par pixel et, pour fixer les idées, nous prenons un balayage « raster scan » où l'image est balayée ligne par ligne et pixel par pixel dans chaque ligne. Le filtre de Kalman rapide correspondant est appelé « filtre II ».

3. 1. MODIFICATION DU MODÈLE D'ÉTAT

L'observation devenant scalaire, le modèle d'état (7)-(9) doit être réécrit sous la forme :

$$(43) \quad x_i = x_{i-1} = x$$

$$(44) \quad y_i = h_i x + b_i$$

$$(45) \quad h_i = h_{i-1} D_i \quad \text{et} \quad h_i D_i = h_{i-1}$$

où  $y_i$  est la  $i$ -ième composante de  $y$  et  $h_i$  est le vecteur ligne formé par la  $i$ -ième ligne de  $H$  :

$$(46) \quad h_i = [0 | \dots | 0 | \tilde{h}_N^k | \dots | \tilde{h}_1^k | 0 | \dots | 0]$$

avec :

$$k = i - \text{Ent}[(i-1)/L'] \cdot L'$$

$\tilde{h}_i^k$  est la matrice  $(1, M')$  définie en (6). Ce modèle garde les mêmes propriétés structurelles que (7)-(9), en particulier la *constance de l'état*. Mais la matrice de transition d'observation  $D_i$  doit être redéfinie puisque la dynamique d'observation n'est plus la même.

Dans un balayage « raster scan », lorsque deux observations successives  $y_i$  et  $y_{i+1}$  appartiennent à la même ligne,  $h_{i+1}$  est obtenu à partir de  $h_i$  par simple décalage des composantes car les blocs  $\tilde{H}_j$  sont circulants.  $D_i$  est alors égal à la matrice de décalage  $D$  de dimensions  $(MM', MM')$  définie par :

$$(47) \quad D = \{d_{mn}\} \quad \text{avec} \quad d_{mn} = \delta_{m+1}^n$$

Par contre, lorsque  $y_i$  et  $y_{i+1}$  appartiennent à deux lignes successives, c'est-à-dire qu'ils sont situés respectivement sur les bords droit et gauche de l'image, l'opérateur  $D_i$  doit faire passer de :

$$(48) \quad h_i = [0 | \dots | 0 | \tilde{h}_N^k | \dots | \tilde{h}_1^k | 0 | \dots | 0]$$

à :

$$(49) \quad h_{i+1} = [0 | \dots | 0 | 0 | \tilde{h}_N^k | \dots | \tilde{h}_1^k | 0 | \dots | 0]$$

$H$  étant bloc-circulant et  $\tilde{H}_k$  circulant, on a dans ce cas :

$$(50) \quad h_{i+1} = h_i \cdot D^{N'}$$

$$(51) \quad D_i = D^{N'} \quad \text{pour} \quad i = L' \pmod{L'}$$

Mais l'obtention d'une récurrence simple à partir des équations de Chandrasekhar demande que  $D_i$  soit constant pour tout  $i$ . Pour que cette condition soit vérifiée ici, il faut considérer que l'image est enroulée sur un cylindre, ses lignes étant concaténées sur une hélice. La matrice  $H$  de (1) devient alors circulante, et non plus seulement bloc-circulante, ce qui entraîne effectivement l'indépendance de l'opérateur  $D$  par rapport à  $i$  dans (45). De plus, la matrice de covariance  $P_x$  devient alors Toeplitz comme nous le verrons en 3.3. Si l'on considérait maintenant un double enroulement de l'image sur un tore,  $P_x$  serait alors circulante [21]. On retrouverait ainsi l'hypothèse implicite usuellement faite lorsque l'on approche la matrice de covariance de l'image par une matrice circulante pour la diagonaliser en utilisant des algorithmes de transformation de Fourier rapide [3, 21]. Pour éviter toute corrélation non contrôlée entre les bords « droit » et « gauche » de l'objet au travers de l'équation d'observation, les bords correspondants de l'image doivent, avant enroulement, être étendus d'un nombre de colonnes supérieur à la largeur de la PSF et à l'éventuelle distance de corrélation horizontale de l'objet. Le calcul du vecteur gain qui ne fait pas intervenir explicitement les valeurs des observations est réalisé sans établir la distinction entre la partie étendue et l'objet initial. Mais il est évident que l'état ne sera pas remis à jour pendant les récursions correspondant à la partie étendue de l'image où les observations font défaut.

Il faut souligner que c'est lors du traitement de la partie étendue que s'introduit la sous-optimalité du filtre à observation scalaire. La volonté d'aboutir à un algorithme rapide nous conduit en effet à ignorer que l'on devrait faire du filtrage de Kalman « à observations manquantes », c'est-à-dire propager différemment les lois de probabilités suivant qu'elles pourront être modifiées ou non par la présence d'observations.

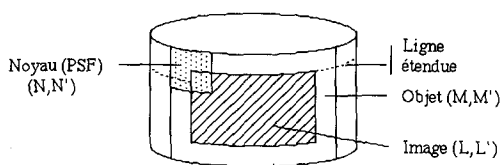


Fig. 1. — Enroulement de l'image en hélice.

### 3.2. DÉVELOPPEMENT DU FILTRE 2-D À OBSERVATION SCALAIRE

Pour une observation scalaire, la définition des incréments donnée en (13)-(15) pour une observation vectorielle est inchangée et le développement de l'algorithme se fait comme pour le filtre I. Il faut seulement noter que le gain de Kalman devient un vecteur et la covariance de l'innovation un scalaire puisque l'observation est maintenant scalaire. Le volume des calculs à chaque récursion a donc diminué mais une évaluation plus précise doit être faite car,  $D$  ayant été modifié, le rang et la factorisation initiale de  $\Delta P_2$  sont changés.

### 3.3. INITIALISATION DE L'ALGORITHME À OBSERVATION SCALAIRE

Sous les mêmes hypothèses de stationnarité et de corrélation que précédemment, les équations (29) à (33) sont inchangées. Mais l'écriture des covariances mutuelles  $R_k$  doit prendre en compte l'extension des lignes de l'objet et leur enroulement en hélice. Pour cela, nous supposons que la partie de l'objet correspondant à l'extension des lignes appartient au même champ 2-D et possède donc les mêmes propriétés statistiques que l'objet associé à l'image initiale. Cette hypothèse est cohérente avec l'hypothèse faite au début d'une observation partielle d'un objet de beaucoup plus grandes dimensions. La covariance mutuelle  $R_k$  entre deux lignes étendues s'écrit alors :

$$(52) \quad R_k = \begin{bmatrix} r_0^k & \dots & r_{-d'}^k & 0 & \dots & 0 & r_{d'}^{k-1} & \dots & r_1^{k-1} \\ \vdots & & & & & & & & r_{d'}^{k-1} \\ r_{d'}^k & & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & r_{-d'}^k \\ 0 & & & & & & & & \vdots \\ r_{-d'}^{k+1} & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ r_{-1}^{k+1} & \dots & r_{-d'}^{k+1} & 0 & \dots & 0 & r_{d'}^k & \dots & r_0^k \end{bmatrix}$$

où les triangles supérieurs et inférieurs traduisent la continuité des lignes étendues. En remarquant que  $R_{-d-1}$  (resp.  $R_{d+1}$ ) est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) à cause des termes en  $r_{-i}^{-d}$  (resp.  $r_i^d$ ), on montre que  $P_x$  est une matrice hermitienne Toeplitz dont les éléments non nuls sont situés sur  $2d+1$  bandes parallèles à la diagonale principale. Rappelons que dans le cas précédent, en absence de l'hypothèse d'enroulement hélicoïdal,  $P_x$  était seulement bloc-Toeplitz.

De la nouvelle définition (47) de  $D$ , il découle que l'application respectivement à gauche et à droite de  $D^t$  et  $D$  à  $P_x$  correspond à un décalage d'un élément parallèlement à la diagonale principale.  $P_x$  étant Toeplitz, tous les éléments de  $P_x - D^t P_x D$  sont nuls sauf ceux de la première ligne et première colonne.  $P_x - Q$  est donc une matrice dont le rang est au plus égal à 2 et, puisque le gain est un vecteur et l'innovation un scalaire, le rang  $\rho$  de  $\Delta P_2$  vérifie :

$$(53) \quad \rho = \text{rang}[P_x - D^t P_x D - K_1 (R_1^s)^{-1} K_1^*] \leq 3$$

La factorisation de  $\Delta P_2$  peut être faite de manière similaire à (40)-(42) en définissant les vecteurs  $f$  et  $g$  de dimensions  $MM'$  par :

$$(54) \quad f^* = [r, 0, \dots, 0] \quad \text{avec} \quad r^2 = r_0^0$$

$$(55) \quad g^* = r^{-1} [0, r_{-1}^0, \dots, r_{-d'}^0, 0, \dots, 0, r_{d'}^{-1}, \dots, r_{-d'}^{-d}, 0, \dots, 0]$$

ce qui conduit à :

$$(56) \quad \Delta P_2 = [\tilde{K}_1 | f | g] \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{K}_1^* \\ \vdots \\ f^* \\ \vdots \\ g^* \end{bmatrix} = Y_1 M_1 Y_1^*$$

avec :

$$\tilde{K}_1 = (R_1^\varepsilon)^{-1/2} \cdot K_1$$

Comme nous l'avons déjà vu pour le filtre I, la prise en compte du caractère creux de  $M_1$  et  $Y_1$  (qui conduit à  $h_k f = 0$  pour  $k > 1$ ) permet de réduire considérablement le volume des calculs par rapport au coefficient majorant donné par (53).

Enfin, si le processus objet  $\{x_{mn}\}$  est supposé blanc,  $P_x$  est diagonal et  $g$  est nul.  $M_1$  se réduit à une matrice creuse de rang 2 et :

$$(57) \quad M_k = \begin{bmatrix} m_k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y_k = [\tilde{Y}_k | f]$$

Le « rang » effectif pour les calculs est alors 1.

#### 4. Comparaison entre les deux filtres

Le but du passage d'une observation vectorielle à une observation scalaire était la réduction du volume des calculs à chaque récursion. Ce but est atteint de deux façons distinctes :

(i) Les  $L$  inversions de la matrice de covariance de l'innovation, qui exigent chacune de l'ordre de  $(L')^3$  multiplications, sont supprimées dans le filtre II.

(ii) La comparaison de (53)-(56) avec (39)-(42) montre une réduction supplémentaire due à la diminution de  $\rho$ . En effet, sous la même hypothèse de stationnarité de la covariance centrée *a priori* de l'objet, le filtre II permet de gagner, à chaque récursion, un facteur  $M'$  dans le calcul des équations de Chandrasekhar. Le prix à payer pour cela est l'hypothèse d'enroulement des lignes en hélice qui permet de passer d'une matrice de covariance *a priori* bloc-Toeplitz à une matrice Toeplitz. Elle permet donc de diminuer son rang de déplacement. Il faut noter toutefois que cette réduction est contre-balancée par le fait que le filtre II demande davantage de récursions pour traiter une image donnée. Cependant, la réduction de la taille des matrices auxiliaires à manipuler dans le filtre II représente un avantage tangible.

Pour les deux filtres, le volume des calculs croît généralement avec la richesse de l'information *a priori* que l'on veut introduire. En effet, la prise en compte dans le filtre II d'une non-stationnarité d'ordre un se fait, comme pour le filtre I, par simple initialisation de l'état par une moyenne locale non nulle ce qui n'augmente pas le volume des calculs. Par contre, la prise en compte d'une non-stationnarité de la covariance conduit, pour le filtre II comme pour le filtre I, à une augmentation de la distance à Toeplitz de  $P_x$ , donc de  $\rho$ .

Par ailleurs, l'introduction d'une corrélation *a priori* dans  $P_x$  augmente également  $\rho$ , donc le volume des calculs. Mais elle a pour conséquence remarquable d'étendre la partie non nulle du gain au-delà des points de l'objet qui contribuent, au travers du produit de convolution, à la formation de l'observation courante  $y_i$  ou  $y_j$  (voir fig. 2). Cette extension naturelle du gain de Kalman dans le « futur » est une des conséquences fondamentales de notre modèle d'état non causal.

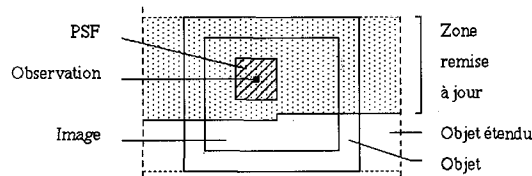


Fig. 2. — Partie de l'état remise à jour dans le filtre II lorsque  $P_x \neq I$ .

#### 5. Filtres asymptotiques à remise à jour réduite

##### 5.1. SIMPLIFICATION DES FILTRES PRÉCÉDENTS

Les filtres précédents demandent à chaque récursion de calculer le gain de Kalman et de remettre à jour un nombre croissant de composantes de l'état. Deux moyens peuvent être envisagés pour réduire encore le volume des calculs.

Quand les statistiques de  $\{x_{mn}\}$  et de  $\{b_{mn}\}$  sont supposées stationnaires, l'incrément du gain de Kalman généralisé  $\Delta K_{g,k}$  tend rapidement vers 0. Un filtre de Kalman asymptotique utilisant un gain constant égal au gain asymptotique peut donc être envisagé. Celui-ci est calculé en itérant les équations (17)-(22) jusqu'à ce que  $\Delta K_{g,k}$  soit inférieur à un seuil donné. Ce calcul peut être fait avant la restauration proprement dite car (17)-(22) ne fait pas intervenir les observations. La réduction des calculs lors de la restauration se fait en remplaçant (16)-(22) par :

$$(58) \quad \hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + K_{g,k} (y_k - H_k \hat{x}_k)$$

$$(59) \quad K_{g,k} = D' K_{g,k-1}$$

L'initialisation se fait avec  $K_{g,1}$  qui est le gain asymptotique calculé préalablement.

Si la PSF est régulière, les composantes du gain de Kalman deviennent négligeables « loin » de l'observation, qu'elle soit scalaire ou vectorielle. Le gain peut donc être tronqué à sa partie utile et la remise à jour de l'état par (16) réduite à une fenêtre glissante de dimensions  $(K, M')$  pour le filtre I ou  $(K, K')$  pour le filtre II avec  $K \ll M$  (et  $K' \ll M'$ ).

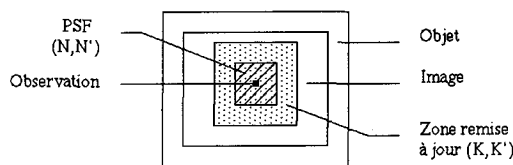
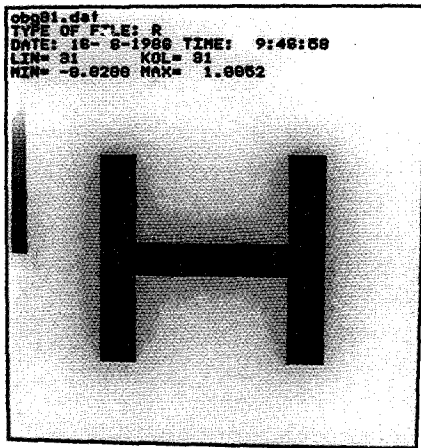


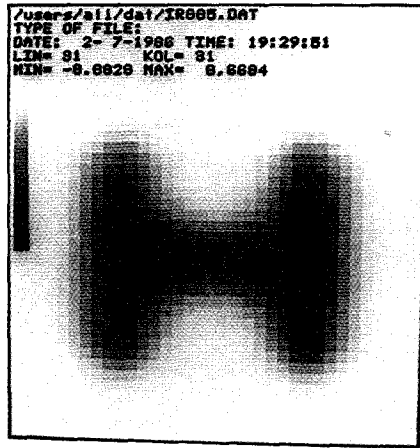
Fig. 3. — Filtre IV asymptotique à remise à jour réduite.

Lorsque les deux conditions précédentes sont vérifiées, on peut définir des filtres asymptotiques, à remise à jour réduite et à observation vectorielle (filtre III) ou scalaire (filtre IV), dont la mise en œuvre extrêmement simple se fait avec un nombre d'opérations algébriques considérablement réduit. Par exemple, le filtre IV ne demande plus que  $(NN' + KK')$  multiplications par pixel (voir fig. 3).

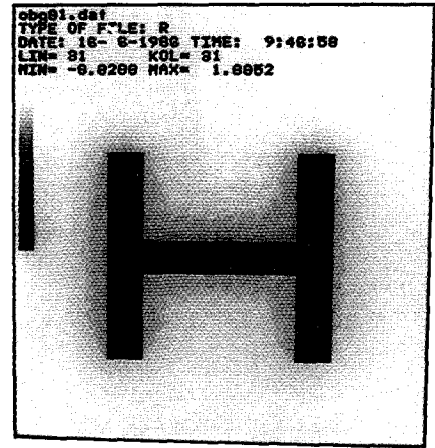




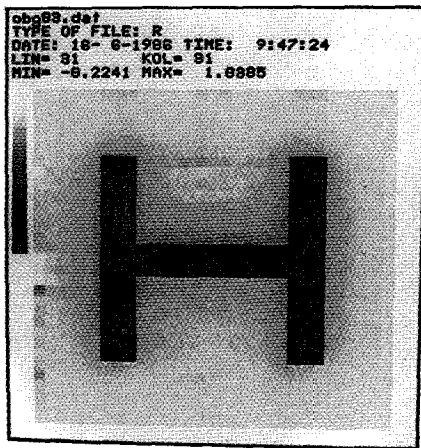
(a) Objet original



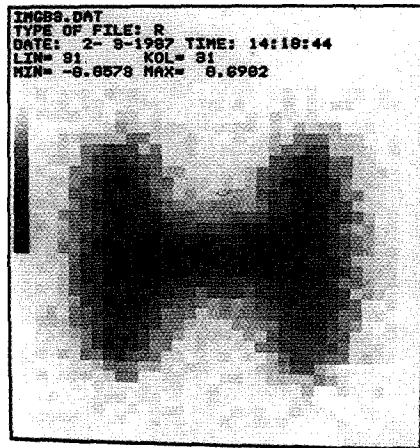
(b) Image dégradée



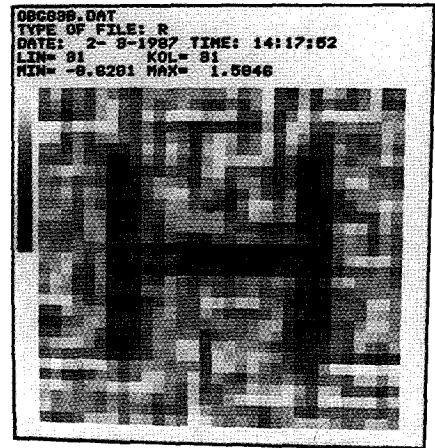
(c) Filtre II



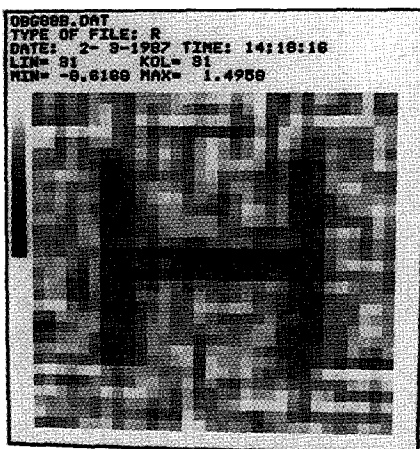
(d) Filtre IV



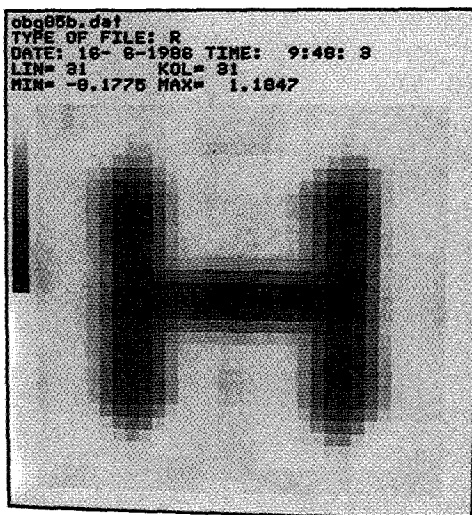
(e) Image dégradée bruitée



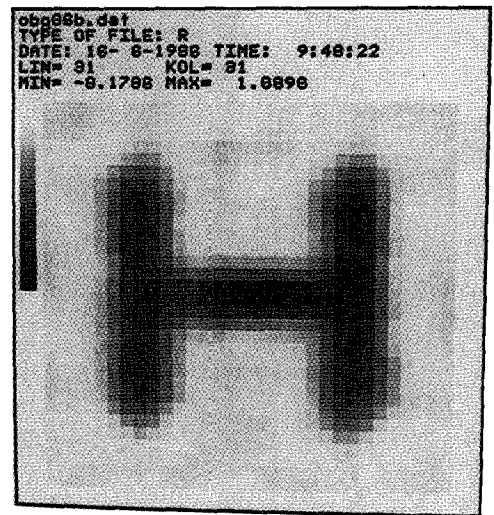
(f) Filtre II,  
 $P_x = I$



(g) Filtre IV,  
 $P_x = I$



(h) Filtre II,  
 $P_x \neq I$



(i) Filtre IV,  
 $P_x \neq I$

Fig. 4. — Restauration d'une image simulée.

5.2. REMARQUES SUR LE CALCUL DU GAIN ASYMPTOTIQUE

Le calcul du gain asymptotique peut être fait à l'avance. Mais la nécessité de calculer à nouveau ce gain lorsque les conditions initiales  $P_x$  changent entre deux applications constitue un handicap. Il est cependant possible de réduire le volume des calculs induits par ces modifications en utilisant des équations de Chandrasekhar duales discrètes [8]. L'idée consiste à séparer la covariance initiale en somme d'un radical à faible rang de déplacement commun à l'ensemble des problèmes étudiés, et d'un terme de perturbation correspondant au problème particulier à traiter. Le gain asymptotique est alors constitué d'un terme radical calculé à l'aide des équations de Chandrasekhar standard (équations (17)-(22)) et d'un terme de perturbation calculé à l'aide des équations de Chandrasekhar duales discrètes. Plus généralement, celles-ci peuvent être utilisées chaque fois que l'information *a priori* que l'on souhaite introduire conduit à un rang de déplacement trop élevé. La dichotomie de  $P_x$  se fait alors entre un terme à faible rang de déplacement

et un terme de perturbation qui contient la partie de  $P_x$  qui fait augmenter  $\rho$ .

Nous avons montré par ailleurs [8] que le volume total des calculs reste inférieur à celui des méthodes de partitionnement lorsque la dimension de l'observation est faible devant celle de l'état, ce qui est le cas ici.

6. Résultats

Les résultats de restauration d'images, simulées ou mesurées expérimentalement, présentés ici ont été obtenus avec les filtres II et IV. La figure 4 correspond à une simulation. Un objet binaire en forme de « H » ( $31 \times 31$ ) (fig. 4a) est convolué par une PSF ( $15 \times 15$ ), définie par un sinus cardinal de révolution, pour donner l'image dégradée 4b. Cette image est alors restaurée à l'aide des filtres II (fig. 4c) et IV (fig. 4d). L'initialisation est faite en supposant l'objet stationnaire, à moyenne nulle et non corrélé. Une

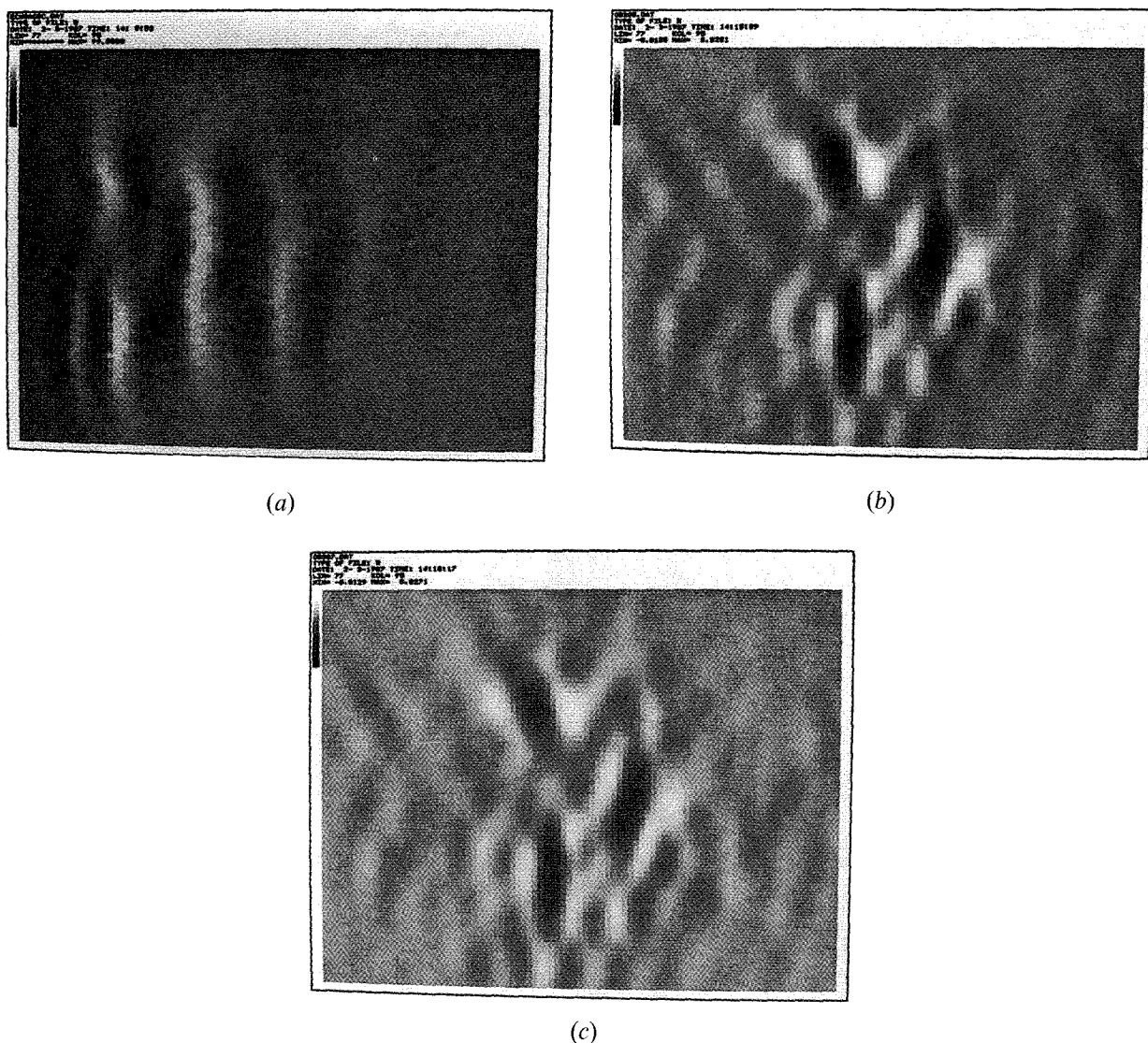


Fig. 5. — Restauration d'une image échographique ultrasonore mode B. (a) Image ( $80 \times 100$ ) échographique radio-fréquence de trois réflecteurs ponctuels. (b, c) Images obtenues après restauration par les filtres II et IV.

restauration presque parfaite est obtenue dans ce cas non bruité [Erreur Moyenne Quadratique (EMQ) < 0,1%]. Un bruit « blanc » est ajouté sur l'image dégradée tel que le rapport signal à bruit (SNR) soit de 10 dB (fig. 4e). La restauration de cette image bruitée par les filtres II et IV donne les figures 4f et 4g lorsque  $P_x = I$  et les figures 4h et 4i lorsque  $P_x \neq I$ . Dans cet exemple, le rapport signal à bruit est volontairement surestimé pour faire ressortir les effets de la corrélation *a priori*.

La figure 5a représente l'image expérimentale (80×100) de trois fils de nylon obtenue par échographie ultrasonore en mode B [11]. Les transducteurs utilisés dans cette technique d'imagerie ont des propriétés dynamiques qui conduisent à des PSF fortement oscillantes et spatialement étendues [(51×75) dans cet appareil], et donc à une mauvaise résolution. Ceci apparaît sur l'image 5a formée à partir du signal « radio-fréquence » (RF) mesuré à la sortie amplifiée du transducteur. Cette image est celle de la réflectivité du milieu et comporte donc des valeurs négatives et positives. Le traitement pratiqué usuellement en échographie consiste à redresser ce signal RF, puis à lui appliquer un filtrage passe-bas avant visualisation. Ce traitement simpliste, s'il améliore la lisibilité de l'image, a l'inconvénient de détériorer davantage la résolution spatiale. Au contraire, les résultats de la restauration de l'image RF en utilisant une PSF mesurée expérimentalement et les filtres II ou IV (fig. 5b, c) montrent que la résolution est améliorée d'un facteur 10 environ dans les deux directions, alors que le SNR sur l'image initiale est estimé à 5 dB.

Dans ces deux exemples, les dimensions de la fenêtre de remise à jour du filtre IV sont égales à celles de la PSF. Il apparaît que la qualité des résultats fournis par le filtre sous-optimal IV n'est pas dégradée de façon sensible par rapport à celle du filtre II.

Une étude comparative des performances de ces filtres de Kalman rapides non causaux avec d'autres méthodes de restauration (régularisation déterministe [17], filtrage de Wiener, méthode de Van Cittert) a été menée dans le cadre d'une application au traitement d'images en radiographie X éclair et publiée par ailleurs [19].

## 7. Conclusions

L'utilisation du filtrage de Kalman pour restaurer une image n'est pas une idée neuve. Mais les méthodes proposées précédemment étaient surtout destinées à la restauration d'images dégradées uniquement par du bruit et reposaient sur une modélisation semi-causale du champ 2-D. L'originalité de notre approche réside dans l'absence de description causale de l'objet à restaurer et dans l'utilisation de méthodes de factorisation pour réduire le volume des calculs. Les principaux avantages des quatre filtres qui en découlent résident dans l'obtention d'une estimée lissée en un seul balayage, conséquence de l'extension dans le « futur » du gain de Kalman lorsque l'objet est supposé *a priori* corrélé, dans la possibilité de traiter des images de grandes dimensions dégradées

par des PSF également de grandes dimensions, et dans l'introduction aisée d'information *a priori* régularisante.

Une caractéristique de nos filtres de Kalman est que leur complexité est directement proportionnelle à la distance à la stationnarité de l'objet à restaurer. Mais les limites pratiques imposées par le volume des calculs dépendent de la nature des non-stationnarités que l'on veut pouvoir prendre en compte. En effet, une non-stationnarité de la moyenne peut être prise en compte sans augmentation du volume des calculs, alors qu'une non-stationnarité de la covariance centrée fait perdre en général les avantages calculatoires des équations de Chandrasekhar, sauf dans le cas d'un objet stationnaire par morceaux.

Enfin, les paramètres *a priori*  $x_0$ ,  $P_x$  et  $R_{bb}$  sont, dans une terminologie bayésienne, des hyper-paramètres qui devraient être déterminés à partir de l'image dans une résolution totale du problème de restauration. Ceci peut être fait en appliquant une méthode du maximum de vraisemblance au vecteur paramètre contenant tous leurs éléments. C'est en général un problème très complexe. Mais des considérations physiques et des approximations permettent souvent de réduire la dimension effective de ce vecteur. Par exemple, lorsque l'objet et le bruit sont supposés non corrélés, le rapport signal à bruit est le seul paramètre restant à déterminer. Sa log-vraisemblance peut être alors facilement calculée à partir de la suite des innovations et de leurs covariances qui sont des intermédiaires de calcul fournis par les filtres de Kalman utilisés dans l'étape de restauration. Il reste malgré tout un délicat problème de maximisation dont on peut obtenir une solution approchée en calculant cette log-vraisemblance sur un ensemble fini de valeurs du paramètre et en retenant la valeur du maximum.

## Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier A. Herment de l'unité INSERM 256 pour les nombreuses discussions sur les applications de la déconvolution à l'échographie et pour ses données expérimentales.

*Manuscrit reçu le 7 octobre 1986.*

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. O. ABOUTALIB, M. S. MURPHY et L. M. SILVERMAN, Digital restoration of images degraded by general motion blurs, *IEEE Trans.*, AC-22, 1977, p. 294-302.
- [2] H. AKAIKE, *Likelihood and the Bayes procedure*, in *Bayesian statistics*, J. M. BERNARDO et al. éd., Valencia, Spain, University Press, 1980, p. 141-166.
- [3] H. C. ANDREWS et B. R. HUNT, *Digital image restoration*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1977.
- [4] J. BIEMOND, J. RIESKA et J. GERBRANDS, A fast Kalman filter for images degraded by both blur and noise, *IEEE Trans.*, ASSP-31, 1983, p. 1248-1256.
- [5] R. CHELLAPPA et R. L. KASHYAP, Digital image restoration using spatial interaction models, *IEEE Trans.*, ASSP-30, 1982, p. 461-472.

- [6] G. DEMOMENT, *Déconvolution des Signaux*, Cours de l'École Sup. d'Électricité, n° 3086, 1985, 152 p.
- [7] G. DEMOMENT et R. REYNAUD, Fast minimum variance deconvolution, *IEEE Trans.*, ASSP-33, 1985, p. 1324-1326.
- [8] X. C. DU, D. SAINT-FÉLIX et G. DEMOMENT, Comparison between a factorization method and a partitioning method to derive invariant Kalman filters for fast image restoration, *Proc. IMA Conf. "Maths. in Signal Processing"*, T. S. DURANI éd., Oxford Univ. Press, 1985, 12 p.
- [9] S. GEMAN et D. GEMAN, Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images, *IEEE Trans.*, PAMI-6, 1984, p. 721-741.
- [10] A. HABIBI, Two-dimensional Bayesian estimate of images, *Proc. IEEE*, 60, p. 878-883.
- [11] A. HERMENT, Traitement des signaux en échographie ultrasonore : imagerie haute résolution, caractérisation tissulaire, *Thèse de D. d'État es Sciences Physiques*, Univ. de Paris-VI, 1983.
- [12] B. R. HUNT et T. M. CANNON, Nonstationary assumptions for Gaussian models of images, *IEEE Trans.*, SMC-6, 1976, p. 876-882.
- [13] B. R. HUNT, Bayesian methods in nonlinear digital image restoration, *IEEE Trans.*, C-26, 1977, p. 219-229.
- [14] T. KAILATH, Some alternatives in recursive estimation, *Int. J. Contr.*, 32, 1980, p. 311-328.
- [15] S. R. POWELL et L. M. SILVERMAN, Modeling of two-dimensional covariance functions with application to image restoration, *IEEE Trans.*, AC-19, 1974, p. 8-13.
- [16] D. SAINT-FÉLIX, A. M. DJAFARI et G. DEMOMENT, Quelques problèmes liés à l'amélioration de la résolution d'un système de tomographie à microondes par déconvolution, *Proc. 9<sup>e</sup> Colloque GRETSI*, Nice, France, 1983, p. 583-589.
- [17] D. SAINT-FÉLIX, A. M. DJAFARI et G. DEMOMENT, Restauration d'images dans C par une méthode rapide de régularisation, *Proc. Premier Colloque Image*, Biarritz, France, 1984, p. 349-354.
- [18] D. SAINT-FÉLIX, X. C. DU et G. DEMOMENT, Image restoration using a non-causal state space model and a fast 2-D Kalman filter, *Proc. IMA Conf. "Maths. in Signal Processing"*, T. S. DURANI éd., Oxford Univ. Press, 1985, 13 p.
- [19] D. SAINT-FÉLIX, X. C. DU, P. VIBERT et Y. AMALRIC, X-ray flash radiography images restoration, *Proc. Inter. Conf. on "Image Detection and Quality"*, French Optical Society, July 16-18, 1986, Paris, France, p. 337-340.
- [20] A. TIKHONOV et V. ARSENINE, *Méthodes de résolution des problèmes mal posés*, MIR, Moscou, 1976.
- [21] A. S. WILLSKY, *Digital signal processing and control and estimation theory*, chap. 4, MIT Press, Cambridge, Mass, 1979.
- [22] J. W. WOODS et V. K. INGLE, Kalman filtering in two dimensions: further results, *IEEE Trans.*, ASSP-29, 1981, p. 188-197.
- [23] J. W. WOODS, J. BIEMOND et A. M. TEKALP, Boundary value problem in image restoration, *Proc. ICASSP 85*, 1985, p. 18.11.1-18.11.4.