

Imagerie spatiofréquentielle acoustique

des bruiteurs mobiles.

Possibilités de déconvolution positive

Space and frequency distribution for acoustic intensity radiated

by moving sources and positive deconvolution

Bernard ESCUDIÉ

ICPI, 25, rue du Plat, 69288 LYON CEDEX 02.

Ingénieur I.C.P.I. Doct. ès Sciences physiques
Professeur à l'I.C.P.I. 25, rue du Plat 69288 LYON CEDEX 02.

RÉSUMÉ

L'imagerie spatiofréquentielle acoustique s'apparente à l'analyse spectrale dans le cas des bruiteurs fixes. Dans le cas des bruiteurs mobiles elle relève de l'analyse non stationnaire utilisant la Représentation conjointe de Wigner-Ville, notamment dans le cas de mouvements rectilignes uniformes. Dans tous les cas la technique de déconvolution positive emploie l'information *a priori* pour localiser les centres de phase associés aux ondes émises.

MOTS CLÉS

Analyse spectrale évolutive, Imagerie interférométrique et spatiofréquentielle, Représentation Wigner-Ville.

SUMMARY

Space and space frequency Imaging of acoustic sources deals with the far field generated by various noise sources. If for moveless sources such a problem is strictly related to spectrum analysis, it deals in fact for moving sources with the so called joint (or conjoint) representations such as time and frequency (space and space frequency) representations. Dealing with inertial sources (constant speed and linear trajectory) the Wigner-Ville representation enables an easy derivation of such an imaging technique. Positive Deconvolution taking into account a priori informations is able to increase the angular resolving power, and suggests to locate the "bright spots" (or highlights) related to the center of phase of the emitted waves.

KEY WORDS

Introduction

L'imagerie acoustique spatiofréquentielle décrit par voie énergétique le champ lointain dû aux bruiteurs. Elle représente l'intensité acoustique reçue en fonction de la fréquence ν et de la fréquence spatiale

$f = \nu \sin \alpha / C_0$. Analogue à une distribution spectrale, elle ne constitue pas une « image » au sens optique du terme. Le caractère de « pupille pauvre » des antennes acoustiques réalisables conduit à des résolutions angulaires modestes par méthode interférométrique.

Dans le cas de sources mobiles (véhicules terrestres) l'imagerie s'exprime par la représentation en temps et

fréquence due à E. Wigner et J. Ville, outil adapté à la description du champ non stationnaire étudié. Malgré ses propriétés l'imagerie obtenue à une fréquence et une date (fonction du gisement du bruiteur) données est une grandeur positive convoluée par la réponse angulaire de l'interféromètre. La déconvolution positive sous contraintes permet de restituer au mieux l'objet de départ. L'interprétation soulève la question du « point brillant associé ». L'imagerie énergétique obtenue est une représentation du champ lointain lié à l'état vibratoire de la source par une intégrale de rayonnement réductible à une transformation de Fourier. L'extraction d'information à partir de cette grandeur passe par l'utilisation des informations a priori disponibles sur le système étudié.

La figure 0 suivante décrit la situation idéale de l'imagerie spatiofréquentielle en champ lointain :

Des capteurs acoustiques, distants de x sur la base de longueur x_M , reçoivent des champs issus de sources

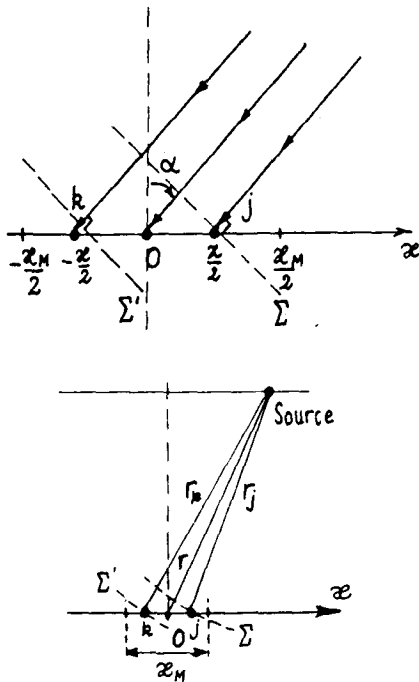


Fig. 0. — Situations de champ lointain idéal en haut : cas de la radioastronomie, en bas : situation de champ semi-lointain du type Fresnel : cas de l'acoustique aérienne.

très éloignés. La situation est dite de champ lointain (pression et vitesse en phase). Le retard caractéristique $\tau(\alpha)$ s'écrit :

$$\tau(\alpha) = \frac{x_M \sin \alpha}{c_0}$$

Sous de telles conditions le champ rayonné est alors stationnaire, ou au moins stationnaire d'ordre 2,

1. Rappel des résultats pour des sources fixes éloignées

Dans le cas de sources aléatoires stationnaires non corrélées, situées à très grande distance de l'antenne d'observation, $I(v, \sin \alpha)$ s'exprime par [1, 2] :

$$I(v, f) \stackrel{v}{\underset{f}{\rightleftharpoons}} \underset{x}{\Gamma}_{jk}(\tau, x) = \sum_{l=1}^L \Gamma_{B_l} \left(\tau - \frac{x \sin \alpha_l}{c_0} \right) \stackrel{v}{\underset{f}{\rightleftharpoons}} \sum_{l=1}^L \gamma_{B_l}(v) \delta \left(f + \frac{v \sin \alpha}{c_0} \right)$$

où $\Gamma_{B_l}(\tau)$ est l'autocorrélation du signal dû à la source n° l. f étant la fréquence spatiale, $I(v, f)$ s'interprète comme une densité spectrale dans le plan (v, f) ou $(v, \sin \alpha)$.

Il faut noter que ce résultat implique diverses hypothèses [1, 2, 3] :

- les « rayons » ou trajectoires orthogonales aux surfaces d'ondes sont supposés parallèles : la distance d (antenne-source) est très grande devant l'envergure d'antenne. Les surfaces d'ondes sont « planes » ou quasi planes;
- les distances r_j et r_k entre les capteurs j et k et la source sont très grandes devant x_M envergure maximale entre deux capteurs. Ceci assure la quasi-stationnarité spatiotemporelle du champ reçu. Les deux méthodes d'imagerie, par voie interférométrique et transformée de Fourier et par la « méthode Mermoz » interspectrale coïncident [4, 5] ⁽¹⁾.

(a) LIMITATION EN ESPACE ET RÉOLUTION ANGULAIRE

L'antenne d'étendue limitée, est une pupille pauvre comparée à celles de l'Optique ou de la Radioastronomie [5]. x_M l'envergure de l'antenne est telle que :

$$6 \leq \frac{x_M}{\lambda_m} \leq 12, \quad \frac{c_0}{\lambda_M} \leq v \leq \frac{c_0}{\lambda_m},$$

$$\lambda_m \leq \lambda \leq \lambda_M, \quad c_0 = 340 \text{ m/s.}$$

Dans le cadre des hypothèses, le champ reçu est supposé [3, 5] :

- d'intensité uniforme,

$$\gamma_k(v) = \gamma_j(v), \quad |\gamma_{jk}(v)| = \text{Cte}, \quad \forall j, k$$

car : $\gamma_{jk}(v) = \gamma_j(v) e^{-2 i n v \tau(\alpha)}$ (en champ lointain) est la densité spectrale d'interaction des sorties des capteurs j et k ;

- totalement cohérent, tel que :

$$c_{jk}(v, x) = \frac{|\gamma_{jk}(v)|}{\sqrt{\gamma_j \cdot \gamma_b(v)}} \simeq 1, \quad |x| \leq x_M$$

⁽¹⁾ On trouvera à la référence [5] l'étude des procédés d'imagerie et notamment de celui dû à H. Mermoz, *Annales Télécomm.*, 31, 1976.

De plus les sources sont fixes et le champ reçu est stationnaire, la durée d'intégration est grande, l'estimation de I est donc précise. On a : $|\tau| \leq \tau_M$, N est le nombre de points du corrélateur ($N=256$ par exemple), $\tau_M = N \tau_i$ où on définit τ_i le pas d'échantillonnage tel que : $v_M = (2 \tau_i)^{-1}$.

Les deux limitations en espace et retard se traduisent par deux fenêtres F(τ) et G(x) il vient [1, 2] :

$$I(v, f) = \sum_{l=1}^L \left\{ \left(\gamma_{B_l}(v) * f(v') \right) * g \left(\frac{v_1 \sin \alpha_l}{c_0} \right) \right\}_{(v)}$$

où * signifie convolution, et $F(\tau) \stackrel{\tau}{=} f(v)$, $G(x) \stackrel{x}{=} g(f)$. Dans les conditions indiquées ci-dessus pour $x_M = p \lambda_m / 2$, $p \approx 10$, et $N = 256$, $\tau_M = N \tau_i$ on écrit [2] :

$$I(v, f) \approx \sum_{l=1}^L \left\{ \gamma_{B_l}(v) * g \left(\frac{v' \sin \alpha_l}{c_0} \right) \right\}_{(v, \sin \alpha)}$$

(b) RÉSOLUTION ANGULAIRE ET DÉCONVOLUTION

En posant $a = c_0^{-1} \sin \alpha$, on obtient I(v, sin α) [5, 7] :

$$I(v, a) \approx \int_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(v, a') g(v(a - a')) da' + b(v, a)$$

$\mathcal{O}(v, a)$ est objet positif lié à la densité spectrale en v et f de la source étudiée et $g(f) \stackrel{f}{=} G(x)$; $b(v, a)$ est le bruit additif existant dans le milieu. Ainsi, dans le cas d'une onde monochromatique d'amplitude A_0 et de fréquence v_0 , on aura :

$$\mathcal{O}(v, a) = \frac{A_0^2}{2} \left[\frac{\delta(v - v_0) + \delta(v + v_0)}{2} \right] \delta(a - a_0)$$

si la source est située au gisement α_0 tel que $a_0 = c_0^{-1} \sin \alpha_0$. La quantité $g(va)$ s'interprète alors comme la réponse spatiofréquentielle de l'imager à une source « pontuelle » en espace et fréquence. Il faut noter ici que l'on ne peut connaître $g(f)$ que si on mesure G(x, v).

La résolution angulaire se définit alors en fonction d'un critère arbitraire permettant la « séparation » entre deux sources décalées l'une de l'autre d'un angle ou d'une fréquence donnés. Le critère dit de Rayleigh, associe la distance minimale de séparation à l'abscisse du premier zéro de $g(va)$. Elle est liée au profil de la fonction $g(f)$. Pour une fenêtre G(x) rectangulaire, $g(f) = (\pi f)^{-1} \sin(2 \pi x_M f)$, on a pour $\alpha \approx 0$:

$$\Delta(\sin \alpha) = \frac{c_0}{2} \cdot \frac{x_M^{-1}}{v} = \frac{\lambda}{2 x_M} = \frac{\lambda}{2 p (\lambda_m / 2)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{v_M}{v}$$

Cette quantité dépend de $v = c_0 \lambda^{-1}$, et du nombre de demi-longueurs d'onde présentés dans l'ouverture $|x| \leq x_M$ à toute fréquence $v \leq v_M$. La résolution de l'équation liant I au produit de convolution de \mathcal{O} (objet) et de g (réponse) par le procédé de déconvolution impose donc la connaissance de $g(f)$.

2. Imagerie spatiofréquentielle de sources mobiles à vitesse constante

(a) HYPOTHÈSES FAITES COURAMMENT

La figure 1 décrit la situation la plus couramment explorée dans l'étude des bruits rayonnés par les véhicules.

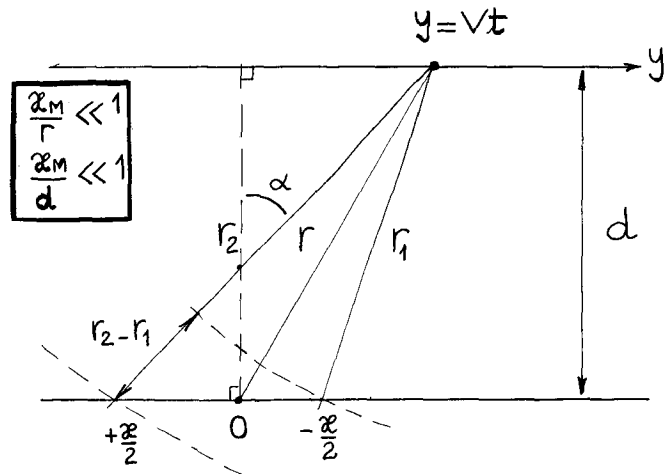


Fig. 1. - Étude de la situation pratique rencontrée dans l'étude du bruit rayonné par un véhicule en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse V passant à la distance d de l'antenne de longueur x.

On peut exprimer la différence de marche $r_1 - r_2$ à l'aide d'un développement de deuxième ordre et traduire la loi de modulation en fréquence due à l'effet Doppler de manière simple [4, 5, 9].

Pour ce faire on ramène l'argument du signal analytique $Z_1(t)$ ou $Z_2(t)$ à un argument polynomial du premier ou du second ordre. Pendant la durée Δt d'observation la modulation Doppler est telle que [5, 8] :

$$\varepsilon_F = \left| \frac{dv_i}{dt} \right|^{1/2} \cdot \Delta t \approx 1, \quad \left| \frac{dv_i}{dt} \right| = v_0 \frac{V}{c_0} \cdot \frac{V}{d} \frac{V}{c_0} = k$$

- $|\Delta \alpha| \leq \alpha_M$, tel que : pour $\alpha \approx 0$ on a $v_i \approx v_0 (1 - k V t d^{-1})$;

- Δt durée d'observation correspond à cette approximation.

Ceci détermine Δt . Il existe une autre contrainte sur Δt liée à la notion de « flou angulaire » au voisinage de $\alpha = 0$. Pendant l'intervalle $|t| \leq \Delta t / 2$, le véhicule est situé au gisement α tel que :

$$|\alpha| \leq \frac{V}{2} \Delta t = \frac{\Delta d}{2}, \quad V \frac{\Delta t}{d} \ll 1$$

puisque l'on peut alors confondre α et $\text{tg } \alpha$. Pour éviter le flou, on suppose que :

$$V \frac{\Delta t}{2} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{m} = \Delta(\sin \alpha)_{\min} \cdot \frac{1}{m}$$

où m est un entier de l'ordre de 3 à 5 par exemple. On peut admettre que le « flou angulaire » est une impulsion rectangulaire de support $\Delta \alpha$ se comportant comme une impulsion idéale devant $g(va) \stackrel{f}{=} G(x)$

caractérisé par l'abscisse $\Delta(\sin \alpha)$,

$$\Delta(\sin \alpha) = p^{-1} v_M v^{-1},$$

du premier zéro.

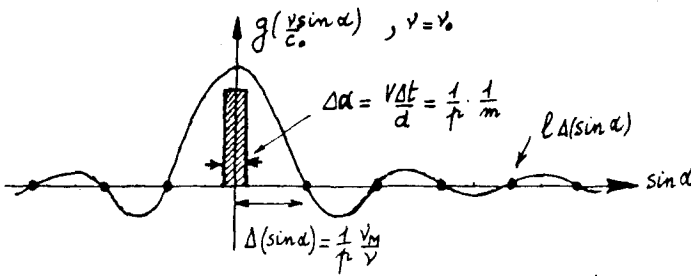


Fig. 2 a. — Réponse angulaire de l'imageur interférométrique à une source ponctuelle émettant à la fréquence v_0 . Définition de la contrainte de flou angulaire négligeable par $\Delta(\sin \alpha) \leq p^{-1}$.

(b) ENSEMBLE DE CONTRAINTES ADMISES

Les approximations faites conduisent aux contraintes suivantes :

$$\varepsilon_F \approx \left(v_0 k \frac{V}{d} \right)^{1/2} \cdot \Delta t = 1$$

$$V \frac{\Delta t}{2} \leq \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{p}$$

ce qui conduit à :

$$\varepsilon_F \leq 2 \sqrt{v_0 k \frac{d}{V}} \frac{1}{mp} \approx 1$$

Cette dernière relation doit en outre tenir compte de diverses contraintes portant sur la distance d :

$$\frac{x_M}{d} \leq 1 \quad \text{et} \quad d \geq 120(\lambda_m/2), \quad x_M = p(\lambda_m/2)$$

La contrainte $d \geq 120(\lambda_m/2)$ est imposée par l'emploi d'antennes lacunaires ou « réseaux gracieux » [3]. Ceci revient à imposer en fait :

$$x_M d^{-1} = p \frac{\lambda_m}{2d} \ll 1, \quad p = 12, \quad d \geq 120 \frac{\lambda_m}{2}$$

Il existe une contrainte sur la distance d .

$$\varepsilon_F \approx 1, \quad m \approx 3 \text{ à } 5, \quad p = 12,$$

$$d \geq 120 \frac{\lambda_m}{2}, \quad v_0 = 1 \text{ kHz}, \quad d = 35 \text{ m},$$

$$v_M = v_0 \sqrt{2}, \quad v_m = v_M/2, \quad \lambda_m = 24 \text{ m}$$

A fréquence donnée et distance d fixée, vérifier $d \geq 120(\lambda_m/2)$ et $\varepsilon_F \approx 1$ implique une valeur m . Dans la plupart des cas p est imposé et le choix de d permet de déterminer Δt .

(c) CARACTÈRE POSITIF DE L'IMAGERIE OBTENUE

Sous les hypothèses décrites ci-dessus les signaux reçus $S_1(t)$ et $S_2(t)$ peuvent s'écrire sous la forme analytique suivante [8] :

$$Z_1(t) = Z \left(\beta^2 \left(1 - \frac{k}{2} \frac{x}{d'} \left(t - \frac{d'}{c_0} \right) \right) \right)$$

$$d'^2 = d^2 (1 - k^2)$$

$$Z_2(t) = Z \left(\beta^2 \left(1 + \frac{k}{2} \frac{x}{d'} \left(t - \frac{d'}{c_0} \right) \right) \right)$$

$$\beta^2 = (1 - k^2)^{-1}$$

[où $Z(t)$ est le signal analytique associé à S signal reçu en $x=0$ la source étant fixe], la fréquence instantanée s'écrit :

$$v_i(t, x) \approx v_0 \beta^2 \left(1 \pm k \frac{xt}{2d'} \right)_{t \rightarrow t - d'/c}$$

Le calcul de : $I(v, f) \Rightarrow \Gamma_{12}(\tau, x)$ conduit à [8] :

$$I(v, f) = \frac{d}{\beta^3} \frac{1}{k v} \left\{ \varpi_{2 u_M}(u) * p_Z \left(u, \frac{v}{\beta^2}; 1 \right) \right\}$$

avec :

$$\rho_Z(u, v; 1) = \int_{\mathbb{R}} Z \left(u + \frac{t'}{2} \right) Z^* \left(u - \frac{t'}{2} \right) e^{-2i\pi v t'} dt'$$

$$= \int_{\mathbb{R}} z \left(v - \frac{n}{2} \right) z^* \left(v + \frac{n}{2} \right) e^{2i\pi n u} dn$$

$\rho_Z(u, v; 1)$ est la représentation conjointe en temps et fréquence du signal considéré, au sens de E. P. Wigner et J. Ville [8].

Il faut noter immédiatement que $I(v, f) \in \mathbb{R}$. En effet $\rho(u, v; 1) \in \mathbb{R}$ pour $Z \in L_C$, s'interprète comme la transformée de Fourier d'une forme quadratique $Z(u+t'/2)Z^*(u-t'/2)$, qui n'a pas les propriétés d'une fonction de corrélation : ρ_Z ne peut être strictement positive. ρ_Z est positive dans le cas d'un signal analytique à modulation linéaire de fréquence et à loi d'enveloppe gaussienne selon un résultat dû à Hudson [10]. On a :

$$\rho_Z(u, v; 1) = (\rho_A(u, v'; 1) * \rho_{e^{i\Phi}}(u, v'; 1))_{(u, v)}$$

L'effet de la modulation introduite par le facteur se manifeste par une convolution fréquentielle affectant la représentation conjointe du signal unimodulaire $e^{i\Phi}$. Si la phase Φ est quadratique alors :

$$\rho_Z(u, v; 1) = \rho_A(u, v; 1)$$

Ce résultat convient parfaitement pour l'étude de I puisque par hypothèse la phase $\Phi(t)$ du signal est au plus quadratique en x et t . ρ_A peut être rendue positive par pondération, en temps et espace x . Il faut remarquer que la limitation d'espace $\pi_{2 x_M}(x)$ est le facteur important pour la détermination des valeurs de I . En effet, cette limitation dite de « pupille pauvre » est très forte. En pratique $x_M \approx 6 \lambda_m$ tandis que la

durée Δt est telle que $v_0 \Delta t \approx 25$, même pour $v = v_m = v_M/2$ dans le cas d'une bande d'octave.

Pour conclure sur le caractère positif de l'imagerie obtenue rappelons que le signal reçu est de type harmonique puisque les véhicules, animés par des moteurs rotatifs, émettent des signaux périodiques. La remarque $\varepsilon_F = 1$ nous permet d'écrire :

$$Z(t) = \pi_{\Delta t}(t) e^{2i\pi v_0 t}$$

avec :

$$\varpi_{2x_M}(u) = \frac{\sin 2\pi x_M u}{2\pi x_M u}$$

et

$$\varpi_{2x_M}(u) = 2\pi x_M \varpi_{2x_M}(u)$$

On a :

$$\rho_1(v, \sin \alpha) = \Lambda_{2 \sin \alpha_M}(\sin \alpha) \times \tilde{\varpi}_{4(d'/k)}((v - v_0 \beta^2)(\sin \alpha_M - |\sin \alpha|))$$

où $\Lambda_{2\Delta}(u) = \pi_{2\Delta}(u)(\Delta - |u|)$ est la fonction triangulaire symétrique. Cette expression est la représentation de Wigner-Ville associé au signal analytique $Z(t)$ défini ci-dessus. Elle est représentée à la figure 2 b suivante :

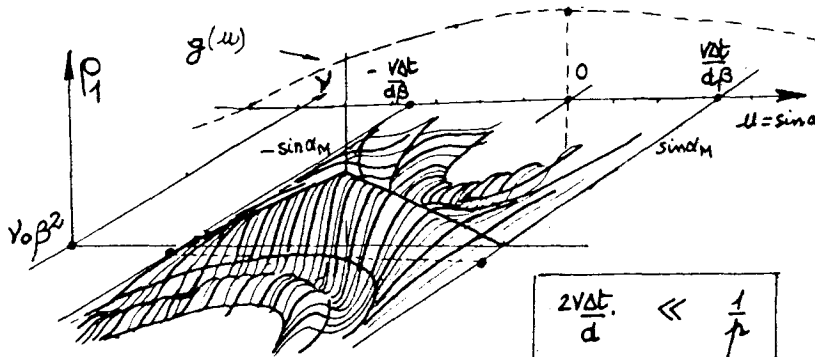


Fig. 2 b. — Aspect du résultat de l'imagerie idéale représentée par ρ_1 et représentation de $g(u)$ à l'échelle. Noter la valeur positive de ρ_1 à la fréquence $v_0 \beta^2$ ce qui permet de prendre en compte l'hypothèse de positivité.

La contrainte dite de « flou négligeable » entraîne que :

$$\frac{2V\Delta t}{d} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{m}, \quad m \geq 3 \text{ ou } 5.$$

Elle permet donc d'affirmer :

- que le premier zéro de $g(u)$ est nettement supérieur à l'étendue angulaire de la représentation $\rho_2(v, \sin \alpha)$;
- que le résultat du produit de convolution est celui d'une convolution d'une fonction non négative par une réponse de type sinus cardinal.

En effet pour une valeur de v proche de $v_0 \beta^2$ la quantité $\rho_2(v, \sin \alpha)$ est positive. A la valeur $v = v_0 \beta^2$, ρ_1 s'écrit sous la forme :

$$\rho_1 = (\Delta\theta'_0 - \theta'_0 |\sin \alpha|) \Pi_{\Delta\theta'_0}(\theta'_0 \sin \alpha).$$

Il est alors possible de décrire le résultat comme étant $g(\theta'_0 \sin \alpha)$ sous la contrainte de flou négligeable. Les conditions habituelles de mesure compatibles avec un flou négligeable assurent la positivité.

3. Critères assurant la possibilité de déconvolution positive

(a) ANALYSE DES CONDITIONS D'OBSERVATION

Les remarques faites aux paragraphes 1 et 2 (a), 2 (c) montrent que l'on peut admettre que :

$$I(v, a) = \int_{\mathbb{R}} \vartheta(v, a') g(v(a - a')) da' + b(v, a)$$

si le champ observé est localement stationnaire tant en espace qu'en durée et si l'observation correspond à la condition de flou négligeable. Si l'on admet que :

$$g(f) = \left(\frac{\sin 2\pi x_M f}{\pi f} \right)_{f=va} \rightarrow \Delta(\sin \alpha) = \frac{1}{p} \cdot \frac{v_M}{v}$$

ceci suppose que dans l'espace x on a :

$$G(x) = \pi_{2x_M}(x) \stackrel{x}{=} g(f).$$

C'est le cas d'une « insonification constante » de l'antenne. La figure 1 illustre une telle situation où le champ de pression dépendant de l'espace par un terme en r^{-1} est supposé quasi constant sur le support x_M de l'antenne. Le calcul de la covariance :

$$\Gamma_{jk}(\tau, x) = E \{ X_j(t) X_k^*(t - \tau) \}$$

se ramène alors sous l'hypothèse de stationnarité locale à une fonction de corrélation :

$$\Gamma_{jk}(\tau) = \Gamma_X(|j - k|, \tau) = \Gamma_X(x, \tau)$$

où x est l'écart d'abscisse des capteurs j et k .

$$E \{ |X_j(t)|^2 \} = \Gamma_X(0, 0) = P_0, \quad \forall j \rightarrow j \delta_i \in \{x_M\}$$

C'est l'insonification uniforme; il vient :

$$I = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(v, a') \frac{\sin 2\pi x_M v(a - a')}{\pi(v(a - a'))} da' + b(v, a)$$

Le test de cette propriété peut être réalisé par deux voies différentes :

- estimation de la puissance :

$$P(j) = P_0, \quad \forall j$$

- étude des propriétés :

$$i(x) \stackrel{x}{\underset{f}{\rightleftharpoons}} I(f)$$

avec $\mathcal{O}(va) \geq 0$

$$\mathcal{O}(va) = |l(va)|^2 \geq 0,$$

$$\mathcal{O}(f) \stackrel{f}{\rightleftharpoons} \Gamma_L(x),$$

$$g(f) = \mathfrak{W}_{2x_M}(f) \rightleftharpoons \Pi_{2x_M}(x).$$

d'où :

$$I_{v_0}(f) \stackrel{f}{\underset{x}{\rightleftharpoons}} i_{v_0}(x) = (\Gamma_L(x) \cdot \Pi_{2x_M}(x))_{v_0}$$

$i(x)$ doit être une fonction de corrélation, ou covariance stationnaire, de support borné $|x| \leq x_M$.

$$\Gamma_L(x) = \Gamma_L^*(-x) = \Gamma_L, \quad |\Gamma_L(x)| \leq \Gamma_L(0)$$

La figure 3 illustre un tel cas correspondant à l'imagerie spatiofréquentielle d'une onde à fréquence fixe $v_0 = 1906$ Hz émise par un véhicule circulant à $V = 52$ m/s, observé à $d = 156$ m, avec $x_M = 0,75$ m, $v_M = \sqrt{2} \times 2000$ Hz, pendant $2\Delta t = 40$ ms. Ces conditions remplissent toutes les contraintes présentées auparavant.

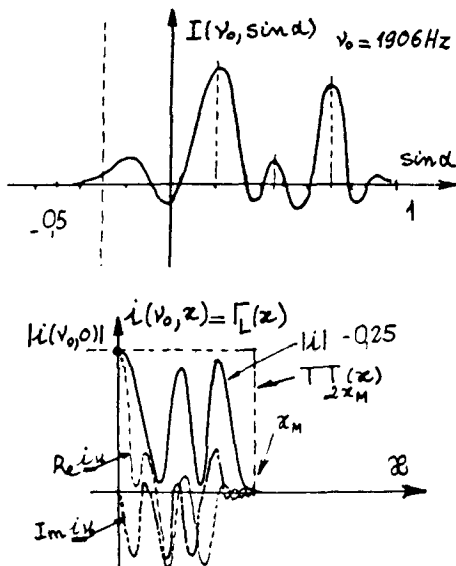


Fig. 3. - Exemple en haut d'une imagerie obtenue sur une rame TGV avec contrainte de flou négligeable. En bas calcul de la transformée de Fourier $i(v_0, x)$ qui a les caractères d'une fonction de corrélation $\Gamma_L(x)$.

La figure 3 montre que \mathcal{O} , objet positif, est représentable par $\mathcal{O}(va) = |l(v_0 a)|^2 = \gamma_L(v_0 a)$, densité spectrale

définie sur le support $[-1/c_0, 1/c_0]$. γ_L a une transformée $\Gamma_L(x)$ complexe, car dans le cas général $\gamma_L(v_0 a)$ n'est pas paire, ce qui conduit à identifier $\Re \Gamma_L$ et $\Im \Gamma_L$:

$$\Re \Gamma_L(x) = \Re \Gamma_L(-x),$$

$$\Im \Gamma_L(x) = -\Im \Gamma_L(-x),$$

$$\Im \Gamma_L(0) = 0, \quad |\Gamma_L(x)| \leq \Gamma_L(0)$$

C'est vérifié dans le cas de la figure 2. Ce test vérifie l'approximation de flux uniforme.

(b) INÉGALITÉ DE BOAS ET KAC : SUPPORT POSSIBLE DE $\Gamma_L(x)$ [2]

On a :

$$i_{v_0}(x) = \Gamma_L(x) \Pi_{2x_M}(x).$$

Faisons l'hypothèse pratique que $i(x)$ est une fonction de corrélation à support borné $[-x'_M, x'_M]$. Dans ce cas le théorème de Boas et Kac indique que [2] :

$$\Gamma_L(x) \Pi_{2x'_M}(x) = \Gamma_0(x) \rightarrow \left| \Gamma_0\left(\frac{x'_M}{n}\right) \right| \leq \Gamma_0(0) \cdot \cos \frac{\pi}{n+1}.$$

La figure 2 nous montre que nous connaissons Γ_L sur $(-x_M, +x_M)$ mais son module varie en dehors de ce support. Soit x'_M le support de Γ_L tel que $|x| \geq x'_M \rightarrow |\Gamma_L| = 0$. L'application de l'inégalité va nous indiquer l'ordre de grandeur de x'_M . La figure 4 illustre ce fait.

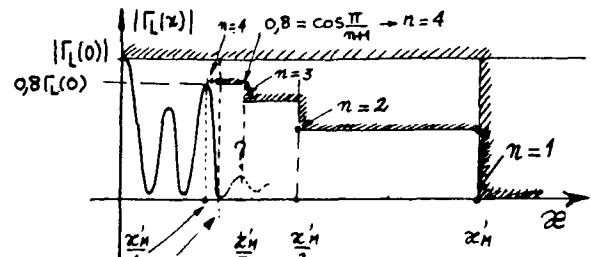


Fig. 4. - Représentation de la contrainte imposée par le théorème de Boas et Kac sur $\Gamma_L(x)$ et sur la future solution déconvoluée.

La valeur du maximum secondaire, de l'ordre de 0,8, pour $\Gamma_L(0)$ normé à l'unité, implique que le support x'_M de Γ_L est de l'ordre de $4x_M$ compte tenu de la valeur de n telle que : $\cos(\pi/n+1) = 0,8$ soit $n \approx 4$. Les solutions par déconvolution positive peuvent fournir des extensions de $\Gamma_L(x)$ sur le support $4x_M$. Si on désire échantillonner correctement $I(v_0, \sin \alpha)$ il faut aussi tenir compte de cette contrainte éventuelle.

4. Imagerie spatiofréquentielle et représentation de Wigner-Ville

(a) EMPLOI DE LA REPRÉSENTATION CONJOINTE DE WIGNER-VILLE

Nous avons déjà exprimé l'imagerie spatiofréquentielle d'un bruiteur mobile à l'aide de la représentation de Wigner-Ville sous la contrainte de flou angulaire négligeable [cf. § 2 (c)]. En utilisant les formulations des signaux reçus sous forme analytique [11] :

$$Z_r(t) = Z\left(\beta^2\left(t - \frac{kx}{2C_0} - \frac{d'}{c_0}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{vt-x/2}{d'}\right)^2\right)\right)\right)$$

nous considérons la quantité suivante :

$$I(t, v, f) \stackrel{v}{f} \stackrel{t}{x} Z_r\left(t + \frac{\tau}{2}, 0 - \frac{x}{2}\right) \times Z_r^*\left(t - \frac{\tau}{2}, 0 + \frac{x}{2}\right) \cdot G(x)$$

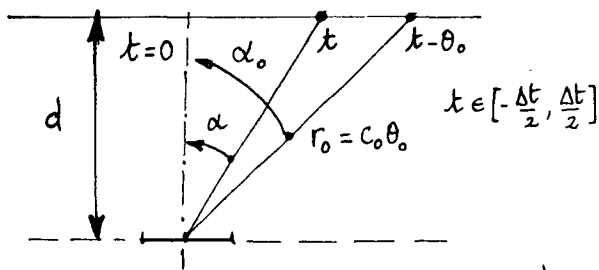


Fig. 5 a. — Définitions des variables angulaires pour une imagerie spatiofréquentielle de type Wigner-Ville.

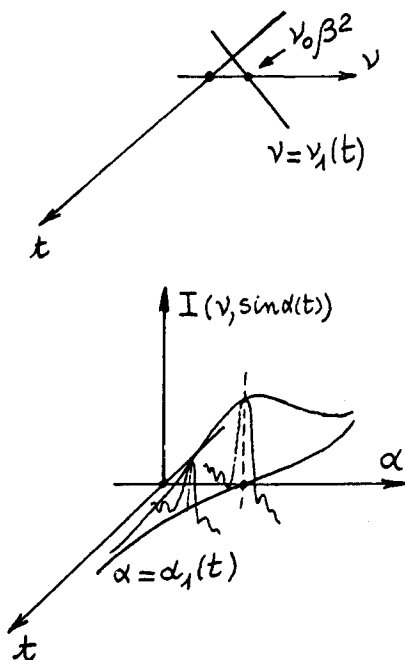


Fig. 5 b. — Illustration dans le plan temps fréquence de la trace d'équation $v = v_1(t)$ et comportement autour de la trace de la surface $I(v, \sin \alpha(t))$.

où $G(x)$ est une fonction de pondération traduisant la limitation en espace de l'antenne. Écrire que la position de chaque capteur du couple étudié est $0 \pm x/2$, revient à placer l'origine au centre de l'antenne et à observer les signaux sur la durée $|t| \leq \Delta t/2$ avec $\text{tg } \alpha = Vt/d$.

On obtient alors dans le cas d'un signal à fréquence pure $Z(t) = \exp(2i\pi\nu_0 t)$ [11] :

$$I(v, t, f) = \Pi_{\Delta t}(t) \Pi_{\Delta f}(v - \nu_1(t)) \cdot g(f - f_1(t))$$

où $\Delta t' = 2(\Delta t - 2|t|)$. Avec :

$$\nu_1(t) = \nu_0 \beta^2 \left(1 - k \frac{Vt}{d}\right)$$

$$(f - f_1(t))_{f = (v/c_0) \sin \alpha}$$

$$= -\nu_0 \beta^2 \left(1 - k \frac{Vt}{d}\right) [\sin \alpha - \sin \alpha_1(t)],$$

$$\sin \alpha_1 = -k \frac{1 - c_0 t/d'}{1 - k Vt/d'}$$

La quantité $g(f) \Rightarrow G(x)$ traduit la réponse impulsionnelle angulaire de l'interféromètre à une source ponctuelle émettant une onde de fréquence $\nu_0 = c_0/\lambda_0$. L'expression de I est la représentation conjointe de Wigner-Ville d'un signal à fréquence pure; elle traduit la distribution angulaire et fréquentielle de l'intensité acoustique reçue.

(b) INTERPRÉTATION DU RÉSULTAT OBTENU

La figure 5 a ci-contre permet une interprétation angulaire commode du résultat précédent [11].

Au long de la droite $v = \nu_1(t)$, qui traduit la loi de modulation de fréquence du signal reçu au centre de l'antenne $x=0$, la surface $I(t, v, \sin \alpha)$ est maximale pour : $\sin \alpha = \sin \alpha_1(t)$.

Les signaux reçus par l'antenne à la date t sont dus à une émission du bruiteur localisé à l'angle $\alpha = \alpha_0$ correspondant à sa position à la date $t - \theta_0$, $\theta_0 = r_0/c_0$. Dans ce cas il est aisé de montrer que : $\alpha_1(t) = \alpha_0$.

(c) CONTRAINTES IMPLICITES POUR $I(t, v, f)$ [11]

Le calcul précédent est fait pour un intervalle $|t| \leq \Delta t/2$ et un angle $\alpha_0(t)$. Il peut être étendu à tout

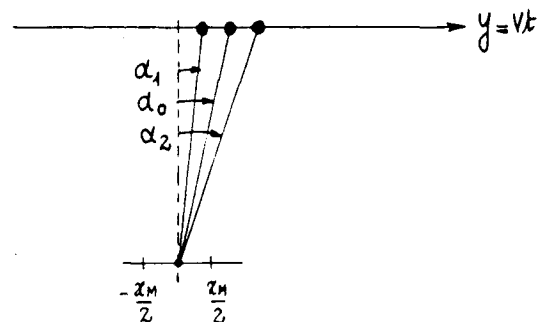


Fig. 6. — Choix des variables angulaires α_1 , α_2 et $\alpha_0 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ tels que l'on ait une loi de modulation de fréquence qui soit linéaire sur ce support.

autre cas, en admettant que :

$$\left(Vt \mp \frac{x}{2} \right)^2 \ll d'^2, \quad |t| \leq \Delta t/2, \quad |x| \leq \frac{x_M}{2}$$

où l'argument de $Z_r(t)$ est sous forme quadratique soit : $(Vt + x_M)/2 \ll d'$, ce qui revient à limiter la durée d'observation pour que la variation angulaire soit telle que [11] :

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \alpha_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

$$\Delta(\text{tg } \alpha) = \frac{V \Delta t}{d} \ll \frac{2}{m}, \quad m' \geq 10$$

comme la figure 6 le montre. Dans ce cas l'approximation linéaire pour la loi de modulation de fréquence sera respectée.

(d) AVANTAGES DUS A LA REPRÉSENTATION DE WIGNER-VILLE

L'imagerie spatiofréquentielle exprimée à l'aide de la représentation de Wigner-Ville exploite le caractère non stationnaire du champ reçu. Cette situation conduit à des contraintes temporelles particulières favorables au choix de la représentation dite « pseudo-Wigner-Ville lissée » telle que [11] :

$$I'(t, \nu, f) \stackrel{\nu}{x} \stackrel{f}{=} Q(\tau)$$

$$\times G(x) \int_{\text{R}} P(u-t) Z\left(u + \frac{\tau}{2}, -\frac{x}{2}\right) Z^*\left(u - \frac{\tau}{2}, \frac{x}{2}\right) du$$

lissage

Le lissage temporel permet de réduire les termes d'interférence dus aux composantes harmoniques multiples émises par les bruiteurs mobiles que sont les véhicules terrestres [11]. La figure 7 suivante présente le mode de calcul et le résultat de l'opération dans le cas d'une loi de fréquence instantanée linéaire au

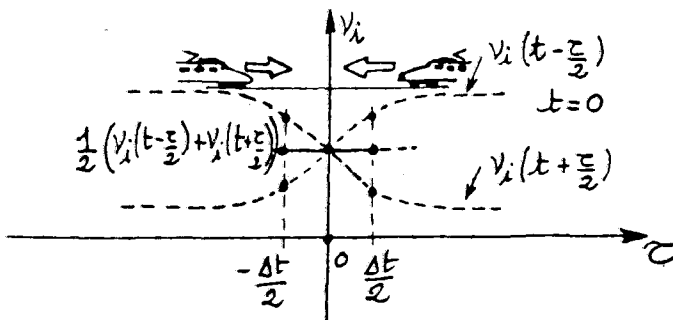


Fig. 7. — Principe de l'imagerie spatiofréquentielle par la méthode Wigner-Ville, compensation des effets de déferlement fréquentiel et angulaire et zone de modulation linéaire telle que $\alpha \approx \sin \alpha$.

cours du temps. Le calcul de la transformée de Fourier de $I(\nu, f)$ porte sur le produit des deux signaux :

$$\left(Z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) Z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right)_{(x)x} \stackrel{\tau}{f} \stackrel{\nu}{=} I(\nu, f)$$

dont les modulations respectives en τ et x vont se compenser comme la figure 7 l'indique.

Le terme résultant du produit des deux signaux dont l'un s'obtient par *parité* ($x \rightarrow -x$) et *renversement du temps* ($\tau \rightarrow -\tau$) à partir de l'autre, est à fréquence pure et fréquence spatiale constante. L'antibruiteur, « dû à un effet miroir » sur le temps et l'espace, compense les effets du mouvement (effet *doppler*) du bruiteur. La contrainte de temps de pose s'en trouve alors complètement modifiée. Il suffit en effet ici que Δt soit tel que la loi de modulation soit linéaire.

Dans le cas d'une émission à fréquence pure ν_0 il vient, lorsque α est petit,

$$\nu_1(t) \approx \nu_0 \beta^2 \left(1 - k \left(\frac{Vt}{d} - \frac{x}{2d'} \right) \right)$$

La condition $\alpha \approx \sin \alpha \approx \text{tg } \alpha$ nous conduit à : $\alpha^3/3 \ll 1$, on est dans le cas : $|\alpha| \leq 15^\circ$ et $\Delta t \approx d/2V$.

Ceci est tout à fait différent de la contrainte précédente dite de flou angulaire négligeable. En effet, considérons le cas $V = 30 \text{ m/s} = 108 \text{ km/h}$, $d' = 35 \text{ m}$, $\nu_0 = 1000 \text{ Hz}$ on trouve que :

$$\Delta t \leq 600 \text{ ms,}$$

avec la contrainte de flou négligeable Δt est limité à : $\Delta t_0 \leq 30 \text{ ms}$. Même en considérant le cas d'un véhicule terrestre rapide $V = 100 \text{ m/s}$ (TGV en essai) on obtient encore :

$$\Delta t \leq 175 \text{ ms,}$$

l'étude avec le procédé d'analyse spectrale évolutive à flou angulaire négligeable n'est pas possible dans les conditions envisagées.

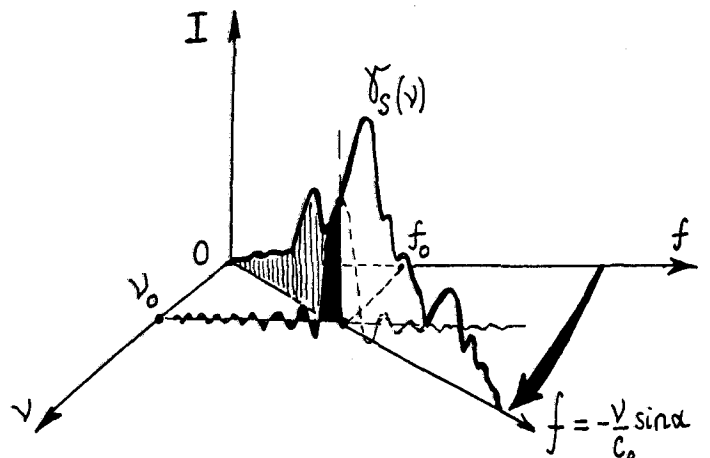


Fig. 8. — Résultat de l'imagerie spatio-temporelle par analyse spectrale évolutive. Distribution de l'énergie au long de la droite $f = -(v/c_0) \sin \alpha$ traduisant la direction de la source émettant la fréquence ν .

5. Résolution fréquentielle et angulaire : cellule ou pixel élémentaire

Nous distinguerons dans ce paragraphe, deux cas : l'analyse évolutive avec contrainte de flou angulaire négligeable, et celui de l'intensité calculée à partir d'une représentation conjointe de type Wigner-Ville. Dans les deux cas, l'approximation de modulation de fréquence linéaire est prise en compte : cette transformation est du type « transformation affine » telle que :

$$t \rightarrow f(t) = (1 - k^2)^{-1} \left(t - \frac{d'}{c_0} \right) = at + b$$

Dans les conditions de champ lointain, avec temps de pose tel que : $\Delta(\sin \alpha) \approx \Delta(\operatorname{tg} \alpha) \approx \Delta\alpha$, la transformation retenue est une variante de la transformation de Lorentz-Poincaré ⁽¹⁾.

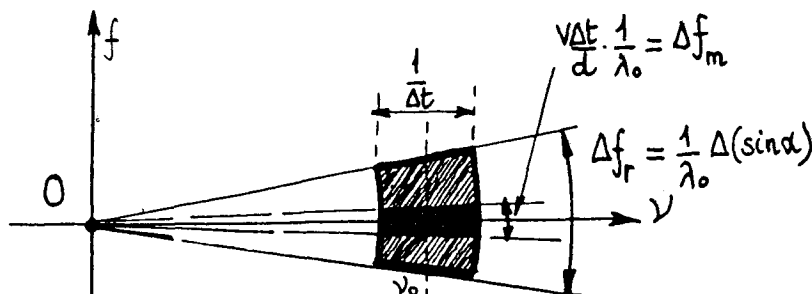


Fig. 9. - Définition des différentes cellules ou pixel dans le plan (f, ν) reliées à la résolution angulaire et fréquentielle dans le cas de la contrainte de flou angulaire négligeable.

(a) IMAGERIE PAR ANALYSE SPECTRALE : CELLULE MINIMALE DU PLAN

La figure 8 suivante représente $I(\nu, f)$ dans les conditions de champ lointain et pour une source fixe localisée au gisement α et émettant un signal de densité spectrale de puissance moyenne $\gamma_s(\nu)$.

Les contraintes de l'analyse spectrale (fréquence et fréquence spatiale constante, cf. § 2 (b) conduisent à :

$$\epsilon_F = \frac{1}{mp} \left(\nu_0 k \frac{4d}{V} \right)^{1/2} \approx 1$$

la variation de fréquence instantanée $\Delta\nu_i$ pendant la durée Δt s'écrit :

$$\Delta\nu_i = k \frac{V}{d} \Delta t \nu_0 \leq 2 \frac{V}{\lambda_0} \frac{1}{mp}, \quad \lambda_0 = \frac{C_0}{\nu_0}$$

⁽¹⁾ Cette transformation des coordonnées assurant l'invariance relativiste s'écrit : $t \rightarrow t(1 - v^2/c_0^2)^{-1/2}$ pour le temps. Voir à ce sujet A. S. Kompanyets, *Theoretical Physics Foreign Languages*, Publishing House, Moscou, 1961, p. 194-200.

La résolution en fréquence associée à l'analyse d'un signal harmonique de durée Δt s'écrit :

$$\Delta\nu = \Delta t^{-1}, \quad \Delta\nu_i \ll \Delta\nu,$$

$$\Delta\alpha \approx V \frac{\Delta t}{d} \leq (mp)^{-1} \ll 1$$

On peut ainsi déterminer la variation Δf correspondante :

$$\Delta f \approx \frac{V}{2d} mp \left(\frac{\sin \alpha}{c_0} \right) + \frac{2}{\lambda_0} (mp)^{-1}$$

ce qui conduit au point $(\nu = \nu_0, \alpha = 0)$ à :

$$\Delta f_0 \approx \frac{2}{\lambda} \frac{1}{mp}, \quad x_M = p \frac{\lambda_w}{2}$$

La cellule minimale, ou pixel théorique, est liée à l'inverse de la longueur d'onde et du nombre de demi-longueurs d'ondes minimales contenues dans l'antenne de longueur x_M . L'aire de cette cellule au point $\alpha = 0$ s'écrit donc :

$$A_0 = \Delta f \cdot \Delta\nu = \left(\frac{\nu}{d} \cdot \frac{1}{\lambda_0} \right) m^{-1} \cdot s^{-1}$$

Pour la lisibilité de la surface I le nombre de points calculés par cellule est supérieur à un. Il faut en effet décrire la courbe $g(f - f_0)$, avec précision pour distinguer les pics formant l'image. La figure 9 suivante illustre cette situation pour $\Delta f = \Delta f_0$, soit $f = \alpha = 0$.

En appelant

$$\Delta f_r = \lambda_0^{-1} \Delta(\sin \alpha)$$

et en notant que Δf_m est dû au mouvement du bruiteur

$$\Delta f_m = \Delta f_r \left(\frac{\lambda_M}{\lambda_0} \right) \frac{1}{m}$$

il vient :

$$\frac{\Delta f_r}{2m} \leq \Delta f_m \leq \frac{\Delta f_r}{m} \quad \text{avec } m \geq 5,$$

$$v_m \leq v \leq v_M$$

La cellule associée au mouvement est à l'ordre de $1/m$ par rapport à celle liée à la résolution [3].

(b) IMAGERIE PAR REPRÉSENTATION DE WIGNER-VILLE

Nous déterminons la durée Δt par la contrainte de modulation linéaire de fréquence :

$$\frac{V \Delta t}{d} = \Delta(\text{tg } \alpha) \simeq \Delta(\sin \alpha) \simeq \Delta d$$

il s'ensuit :

$$\Delta v = \Delta t^{-1} = \frac{2V}{d}, \quad \Delta v_i \simeq v_0 \cdot \frac{V}{2C_0} = \frac{V}{2\lambda_0}$$

On peut déterminer Δf_0 associé à l'angle $\alpha=0$. Il faut remarquer que le calcul faisant intervenir une forme bilinéaire symétrique il y a compensation des deux défilements angulaires. L'incertitude angulaire peut être calculée en se donnant Δv_i à l'aide de la loi de modulation :

$$\Delta v_i = \Delta v = \Delta t^{-1}$$

(voir fig. 10) et

$$\Delta \alpha' = \frac{c}{V} \frac{1}{2v_0 \cdot \Delta t} = \frac{\lambda_0}{2V \Delta t}$$

La figure 10 présente le calcul de Δt et de la pente de la loi de modulation du signal reçu au point $x=0$, centre de l'antenne.

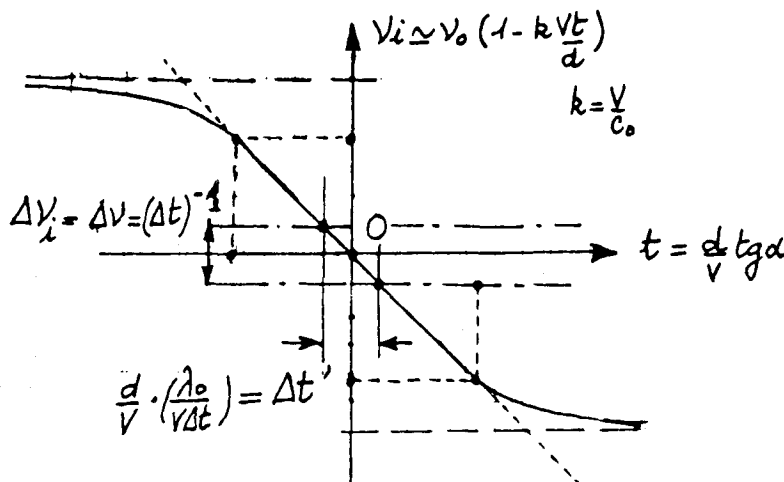


Fig. 10. — Modulation de fréquence due au mouvement (effet Doppler) contrainte de flou angulaire négligeable et contrainte $\alpha \simeq \sin \alpha$.

La cellule du plan (f, v) associée au mouvement aura pour dimension $\Delta v = \Delta t^{-1}$ sur l'axe v et $\Delta \alpha' = \lambda_0 / 2v \Delta t$ sur l'axe f en étant centrée au point $(v=v_0, f=0)$. La résolution angulaire sera exprimée par $\Delta(\sin \alpha)$, quantité liée au premier zéro de la

réponse angulaire qui apparaît dans l'expression $I(t, v, f=va)$ au paragraphe 4(a). Dans le cas présent il n'y a pas de contrainte de «flou négligeable», comme la figure 7 le montre par la compensation des effets dynamiques. Comme Δt atteint des valeurs grandes même sous la contrainte $\alpha \simeq \sin \alpha \simeq \text{tg } \alpha$ la cellule $\Delta v \cdot \Delta \alpha'$ est de dimensions faibles :

$$\Delta v \Delta \alpha' = \frac{\lambda_0}{2V \Delta t} \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

6. Exemples de déconvolution positive des imageries

(a) RAPPEL DES CONDITIONS D'APPLICATION: INFORMATION A PRIORI

Utiliser la déconvolution sous des contraintes diverses revient à résoudre un *problème inverse particulier* [12]. Dans le cas de l'imagerie spatiofréquentielle acoustique cela revient à tenter d'associer à la surface $I(t, v, f=va)$ ou $I(t, v, \alpha)$ «des points brillants», ou centres de courbure des ondes reçues [5].

Avant cette opération il faut tenter à l'aide des techniques de déconvolution positive de retrouver la distribution énergétique $\mathcal{O}(v, v \sin \alpha / c_0)$ convoluée par la réponse de l'imageur $g(f)$. Nous présentons deux exemples de déconvolution positive ($I \rightarrow \mathcal{O} \geq 0$) correspondant à des imageries par la méthode d'analyse spectrale évolutive sous la contrainte de flou angulaire négligeable.

(b) DÉCONVOLUTION POSITIVE D'UNE IMAGERIE D'UN VÉHICULE ROUTIER

L'expérience étudiée avait trait à l'étude du bruit rayonné par un véhicule poids lourd semi-remorque

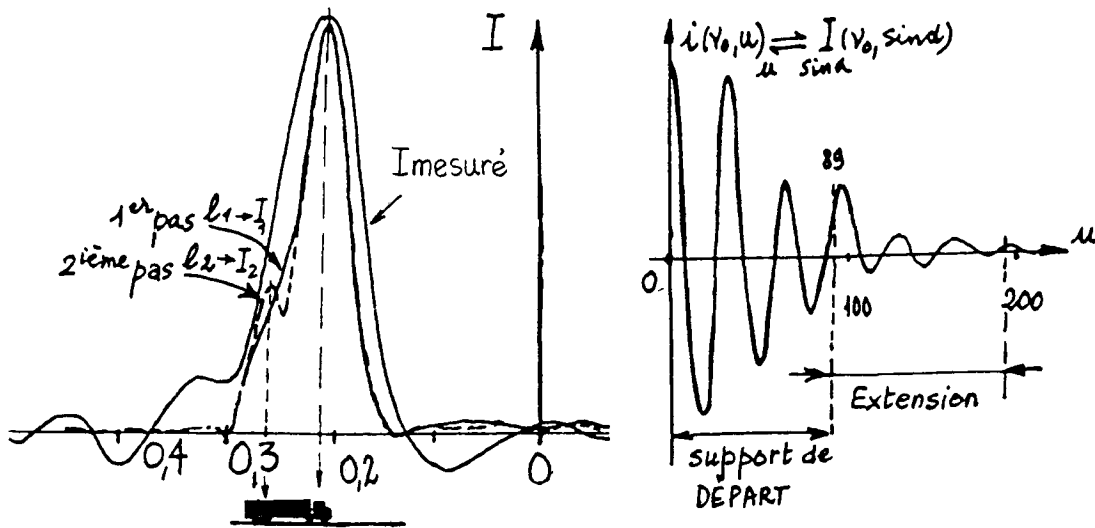


Fig. 11. — Imagerie avec flou négligeable d'un poids lourd observé à $d=140$ m. 1^{er} et 2^e pas de déconvolution positive par le procédé Biraud. A droite $i(v_0, u)$ montre l'extension de bande obtenue de l'ordre de 2.

circulant à $V=16$ m/s, observé à 120 m de distance [8]. L'étude était réalisée dans la bande d'octave 1 kHz ($700 \leq v \leq 1400$ Hz) avec $p=13$, $x_M=1,578$ m. Le résultat n'ayant pas été satisfaisant, on a étudié le même véhicule observé à gisement $\alpha \approx 0$ à l'aide de la technique de sous-échantillonnage $|\sin \alpha| \leq 0,5$ et $x_M=3,156$ m ce qui a fourni une résolution maximale, $v=v_M$:

$$\Delta(\sin \alpha) = \frac{1}{26} \rightarrow \Delta\alpha \approx 2,2^\circ$$

soit une résolution linéaire sur le véhicule $\Delta l = d \Delta\alpha = 4,6$ m.

La réponse angulaire étant une fonction sinus cardinal il n'est pas possible de conclure à l'existence de deux ou plusieurs sources de manière certaine, ni de les localiser. La figure 11 montre ce résultat. La déconvolution réalisée utilise la méthode due à Y. Biraud [3, 6, 8] qui exploite le caractère positif de l'intensité observée. La recherche d'une solution $\Gamma_L(x)$ possédant des valeurs au-delà de la borne x_M se fait par voie itérative en conservant le flux énergétique reçu pour la solution recherchée [3]. La première solution itérative l_0 est obtenue par la « solution de Bracewell » dans le support utile $(-x_M, x_M)$ [6].

La figure 11 présente la solution obtenue, définie positive qui procure un gain en résolution de l'ordre de 2 comme l'extension en support x_M le montre [8].

D'autres exemples de déconvolution furent réalisés dans le cadre du même essai et ont conduit à des gains en résolution angulaire de l'ordre de 2 [4]. Une discussion des diverses méthodes fut entreprise afin de mettre en valeur l'importance des informations a priori et la nécessité des hypothèses a priori minimales [12]. Ces hypothèses minimales sont:

- l'objet $I(v, t, \sin \alpha)$ est positif (intensité);
- l'interférogramme $i(v, x, t_0) \Leftrightarrow I(v, \sin \alpha)$ est à support limité;

– de plus $I(v, t, \sin \alpha)$ est à support limité $|v| \leq v_M$, $|a| \leq 1/c_0$.

La première et la troisième contraintes ne sont compatibles que si $4v_M\tau_M \gg 1$, selon l'inégalité due à Landau, Slepian, Pollak [13].

$$v_m \leq v \leq v_M = 2v_m, \quad x_M = p \frac{\lambda_m}{2},$$

$$x_M = p \frac{c_0}{2v_M}, \quad \tau_M = \frac{x_M}{c_0}$$

Dans le cas considéré $p=13$, $v_M=1400$ Hz, $4v_M\tau_M=26$.

(c) DÉCONVOLUTION POSITIVE D'UNE IMAGERIE DE VÉHICULE FERROVIAIRE

La planche ci-dessous présente les conditions d'imagerie acoustique spatiofréquentielle d'une rame TGV circulant sur la ligne Paris-Sud-Est. Les conditions d'observations $d, x_M, \Delta t, V$, qui correspondent aux différentes contraintes présentées ci-dessous,

$2 \Delta t = 40$ ms $V = 52$ m/s $d = 156$ m $V \Delta t = 2$ m $4v_M\tau_M \approx 25$	Octave 2 kHz $v_m \leq v \leq v_M$ $v_M = 2800$ Hz $V \frac{\Delta t}{d} \approx \frac{1}{75}$ $p = \frac{1}{13}$
--	---

L'étude a trait à l'exemple du paragraphe 3(a). Les conditions de positivité étant remplies avec illumination uniforme de l'antenne on envisage une solution du problème de déconvolution dans le cadre l'inégalité de Boas et Kac.

Le procédé retenu est celui proposé par G. Démonet et A. M. Djafari [14, 15]:

$$\underline{H} \cdot \underline{X} + \underline{B} = \underline{Y}$$

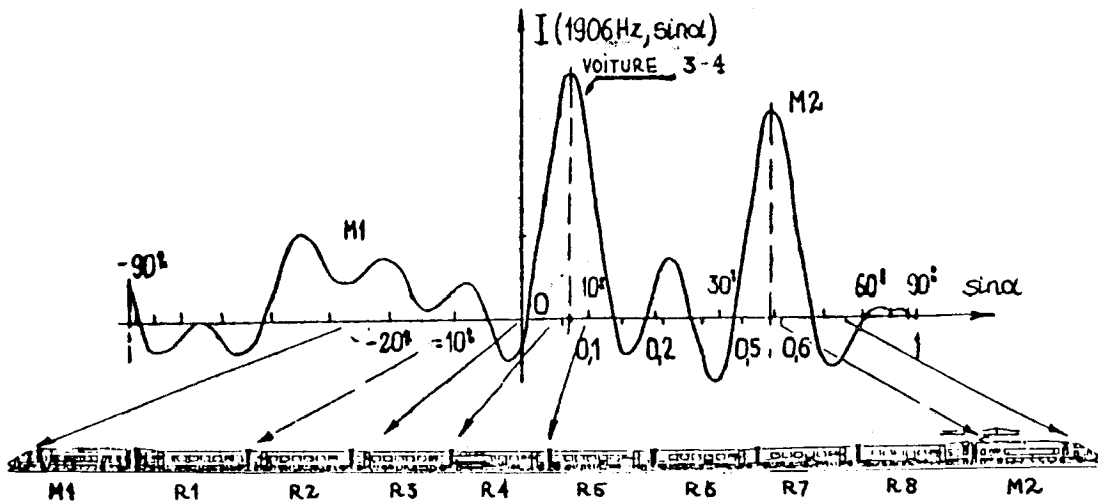


Planche I. — Imagerie à flou négligeable d'une rame TGV observée à Rancé (Ain) sur la ligne Sud-Est. Noter la résolution angulaire insuffisante pour déceler avec certitude une éventuelle source pour $\sin \alpha \approx 0,2$: il y a nécessité de déconvolution.

où \underline{Y} est le vecteur d'observation. \underline{H} la matrice réponse du système, et \underline{B} le vecteur bruit parasite, supposé gaussien non corrélé au signal « objet ». \underline{H} étant connue la recherche itérative de la solution se fait, sous un critère quadratique moyenné, par le procédé dit d'entropie maximale. La solution obtenue s'exprime par [14, 15]:

(α) S entropie maximale, solution X_s ;

(β) $J = \sum_i r_i^2 + \lambda X_s$ minimal avec: $\sum_i r_i^2 \approx \sum_i B_i^2$,

où λ est un multiplicateur de Lagrange utilisé pour la méthode variationnelle. La sensibilité de la solution à λ est très faible comme divers résultats l'ont montré. La figure 12 présente les données $I(v_0, \sin \alpha)$, la réponse $g(v_0, \sin \alpha)$ que les contraintes de calcul font limiter aux deux premiers lobes latéraux, et la solution obtenue. Il apparaît trois pics principaux, dont les plus grands sont associés aux dispositifs de roulement du véhicule. La restitution de la solution par H permet de comparer le résultat reconstitué aux données initiales. L'erreur quadratique moyenne obtenue est de l'ordre de 5% (voir fig. 12 page suivante).

A. M. Djafari et G. Demoment ont envisagé le problème dans l'espace transformé de Fourier, c'est-à-dire sous la forme:

$$I(v, \sin \alpha) \underset{\sin \alpha \quad u}{\rightleftharpoons} i(v, u) = \mathcal{O}(v, u) \cdot \pi_{uM}(u) + b(u)$$

La formulation devient: $\underline{Y} = \underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{B}$ où \underline{A} est une matrice de transformation de Fourier dont les éléments sont des exponentielles complexes. La solution est recherchée par un algorithme d'entropie maximale avec critère d'erreur quadratique minimale [14, 15].

La figure 13 présente les données obtenues par transformation de Fourier de $I(1906 \text{ Hz}, \sin \alpha)$ de $\sin \alpha$ vers $u = c_0 \times \sin \alpha$ limitées au support $|u| \leq 1/4$. La solution déconvoluée a un aspect analogue à la précédente; l'étendue est de: $|u| \leq 1/2$, ce qui révèle un gain en résolution de l'ordre de deux.

L'erreur quadratique moyenne résiduelle est de l'ordre de 5%. La figure 14 présente ce même résultat en

limitant les données initiales ce qui enlève des valeurs nulles localisées aux abscisses négatives. La reconstitution du signal d'entrée paraît satisfaisante (fig. 13 et 14 pages suivantes).

D'autres résultats cohérents avec ceux présentés ici furent obtenus en faisant varier la solution itérative de départ [16].

7. Interprétation de l'imagerie obtenue: « point brillant »

(a) NATURE DE LA REPRÉSENTATION UTILISÉE

La surface $I(v, \sin \alpha, t_0)$ n'est pas une image au sens optique géométrique du terme. C'est une *représentation énergétique spectrale*, analogue à la *distribution de brillance* utilisée en radioastronomie [3]. Dans les deux cas envisagés ici, c'est-à-dire analyse spectrale évolutive et représentation de Wigner-Ville on dispose de la propriété suivante:

$$\int_{-1}^{+1} I(v, \sin \alpha) d(\sin \alpha) = \gamma_S(v)$$

$$I\left(v, \frac{\sin \alpha}{c_0}\right) = \int_{-1/c_0}^{1/c_0} \mathcal{O}(v, a') g(v(a-a')) da'$$

où $\mathcal{O}(v, a)$ est la distribution énergétique de l'intensité et $g(v a)$ la réponse de l'imageur analogue à un effet de diffraction. A un point objet $\delta(a-a_0)$ est associé une réponse angulaire ou tache de diffraction jouant le même rôle que la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire électrique. Cet effet conduit à l'emploi du procédé de déconvolution.

(b) INTERPRÉTATION ET NATURE DU CHAMP RAYONNÉ

A tout pic $g(v(a-a_0))$ centré à la position $\alpha = \alpha_0$, $a_0 = \sin_0/c_0$ il faut associer un « point brillant »,

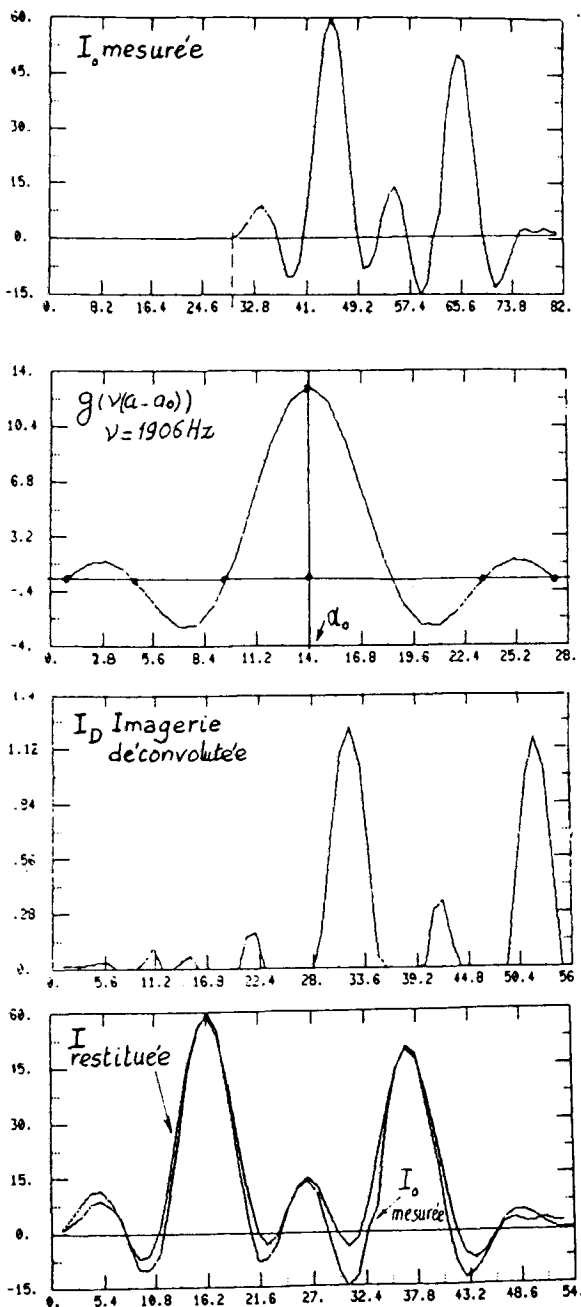


Fig. 12. — De haut en bas à gauche imagerie de la planche I, réponse $g(v(a-a_0))$ de l'imageur; à droite I_D solution positive déconvoluée, I restituée et comparée à I imagerie initiale.

ou centre de phase des ondes reçues sur les capteurs formant l'antenne d'observation $|\alpha| \leq x_M/2$. La figure 15 illustre ce point de vue. Les deux surfaces d'ondes Σ et Σ' ont un « centre de courbure » au point M. Ce point est défini comme le « point brillant » source virtuelle qui aurait un sens physique en optique géométrique dans le cas de « pupilles riches » $x_M \gg \lambda_M$ ou λ_m . Il n'en est rien en acoustique, où la dimension des structures rayonnantes reste faible en fonction de la longueur d'onde émise en acoustique aérienne ($c_0=340$ m/s). Il en est ainsi pour la source qui est une structure du véhicule. Celle-ci rayonne, et aux conditions de champ lointain le champ observé est la transformée de Fourier de l'état vibratoire acoustique

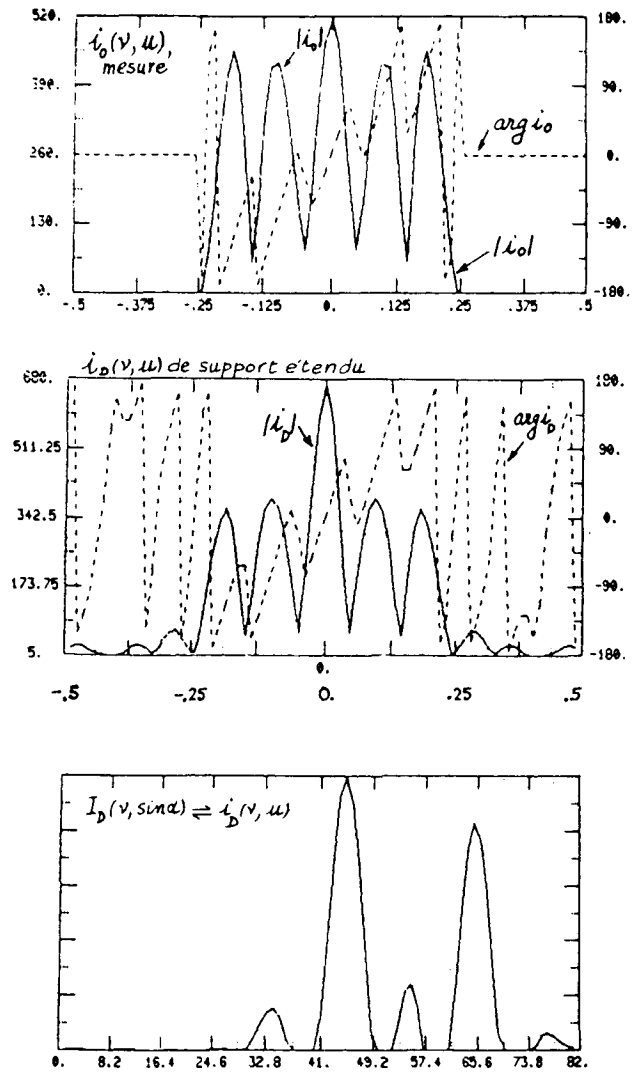


Fig. 13. — De haut en bas $i_0(v, u)$ mesuré, i_D de support étendu par un facteur voisin de 2, I_D solution déconvoluée noter l'apparition d'un pic central non décelable sur I_0 .

sur la structure de la même manière qu'en optique. La figure 15 montre $h(v, \beta)$, diagramme de rayonnement du véhicule à la fréquence v . C'est la description de ce diagramme qui est l'un des buts de l'opération.

La figure 16 illustre cet effet. L'imagerie dans le plan vertical fait apparaître un rayonnement à $v_1=1843$ Hz et $v_2=2156$ Hz centré sur le voile de roue et l'essieu porteur. Il s'ensuit que ce voile de roue émet un signal harmonique de fréquence v dû à un mode de vibration rayonnant lié à un disque vertical de rayon $R=n\lambda_1$ ou $n\lambda_2$. Le diagramme de diffraction s'exprime à l'aide d'une fonction du Bessel et la seule interprétation possible est: les composantes à 1843 et 2156 Hz sont dues à un mode de vibration de la roue. Le « point brillant » apparent centré sur l'essieu est le résultat du diagramme de rayonnement convolué avec la réponse de l'interféromètre.

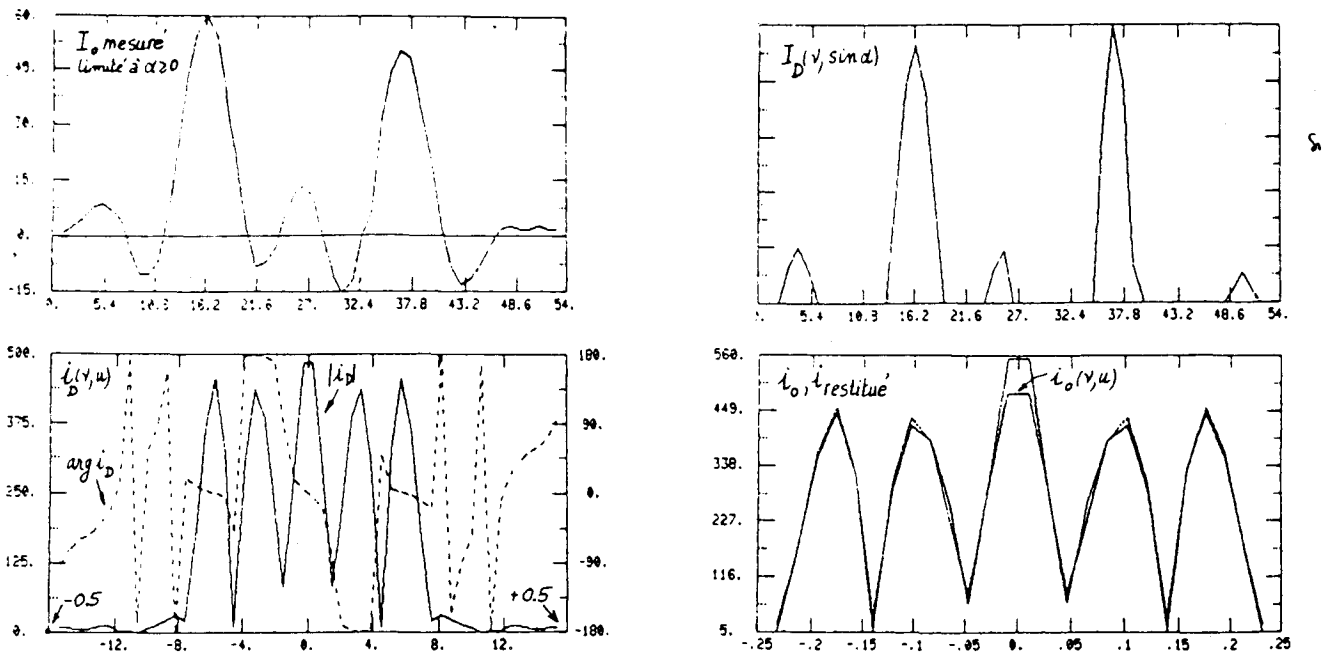


Fig. 14. — De haut en bas imagerie I_0 mesurée bornée à $\alpha \geq 0$. $i_D(v, u)$ en argument (pointillé) et module (trait plein) solution dans l'espace transformée de Fourier. I_D solution déconvoluée, i_0 et i restitué.

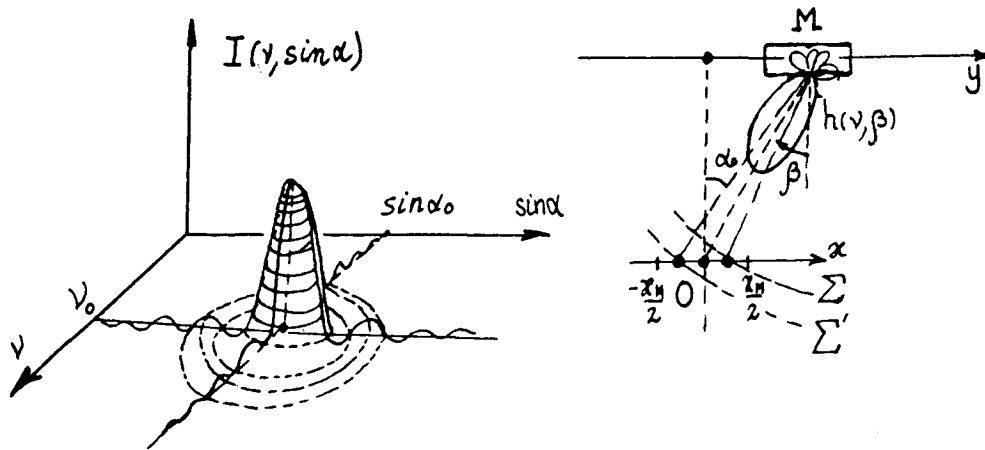


Fig. 15. — A gauche une imagerie faisant apparaître un « point brillant » (analogie optique) à la position α_0 et à la fréquence ν_0 . A droite le mobile M et son indicatrice d'émission (diagramme de rayonnement). Ceci indique que le point brillant est le centre de courbure des surfaces d'ondes Σ et Σ' dues à l'effet de diffraction de la source.

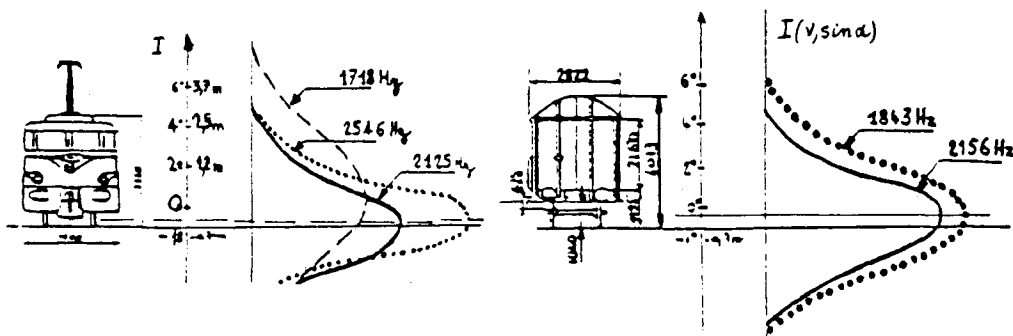


Fig. 16. — Imagerie dans le plan vertical du champ rayonné par les roues d'une locomotive et d'un wagon S.N.C.F. L'image fournit le « point brillant » : il faut remonter au champ vibratoire de la roue (interprétation et problème inverse).

Conclusion

La méthode d'imagerie spatiofréquentielle des bruiteurs utilisée en acoustique aérienne est une représentation énergétique spectrale en fréquence et fréquence spatiale; elle s'inspire des procédés de la radioastronomie. Dans le cas de sources fixes cette technique s'identifie avec l'analyse spectrale. Pour des sources mobiles en mouvement rectiligne uniforme le champ non stationnaire impose une analyse spectrale évolutive rendant le «flou angulaire» négligeable par rapport à la résolution en fréquence spatiale.

En utilisant la représentation conjointe de Wigner-Ville on repousse ces contraintes aux conditions qui permettent d'assimiler la modulation de fréquence du signal reçu à une loi linéaire, par lissage; et au voisinage d'un maximum elle possède cette propriété.

Ceci permet d'envisager l'amélioration de la résolution angulaire par déconvolution positive. Des résultats obtenus par traitement dans le plan $(\nu, f = \nu a)$ ou le plan (τ, x) conjugué montrent la validité de cette opération.

L'interprétation des résultats ne peut s'envisager qu'en utilisant la notion de point brillant défini comme un centre de phase des ondes reçues par l'antenne. Il n'a de sens qu'en tenant compte du diagramme de rayonnement de la structure vibrante émettrice.

Note: D'autres exemples de déconvolution utilisant des variantes de tels procédés sont présentées dans les références [5] et [12]. Diverses informations *a priori* peuvent être utilisées conduisant à diverses méthodes dont celle dite de Pisarenko modifiée avec succès par J. Munier et G. Cordellis [17, 18]. L'auteur tient à remercier G. Demoment et J. Munier ainsi que Y. Biraud pour de nombreux et fructueux échanges sur la déconvolution et l'interférométrie.

Manuscrit reçu le 26 février 1988.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BEROUJON-CHIOLLAZ, *Colloque National Traitement Signal GRETSI*, 2, 1975, p. 521-529.
- [2] M. CHIOLLAZ et B. ESCUDIE, *Revue d'acoustique*, 54, 1980, p. 153-162.
- [3] Y. BIRAUD *et al.*, *Colloque IAU-URSI 49*, Groningen, 76, n° 49, août 1979, paru dans *Astrophysics and space science library, Image Formation from coherence functions in astronomy*, C. VAN SCHOONEVELD éd., D. Reidel Publ. Cy.
- [4] Y. BIRAUD *et al.*, *Colloque IEEE-ICASSP*, Paris, 3, 1980, p. 1485-1488.
- [5] B. ESCUDIE, L. GAUDRIOT et J. L. LACOMBE, *Journées Physique et Industrie. Application de la physique aux transports*, Lyon, septembre 1982, Société physique, p. 15-34.
- [6] Y. BIRAUD, *Colloque National Traitement du Signal GRETSI*, 2, 1969.
- [7] A. HELLION *et al.*, *Colloque National Traitement du Signal GRETSI*, 1, 1977, p. 311-316.
- [8] Y. BIRAUD *et al.*, *Colloque National Traitement du Signal GRETSI*, 1, 1983, p. 311-316.
- [9] P. FLANDRIN et B. ESCUDIE, *Congrès international sur les progrès de l'intensité acoustique*, septembre 1981, p. 95-102, CETIM, Senlis.
- [10] HUDSON, *Rept. Math. Phys.*, 6, n° 2, 1974, p. 249-252.
- [11] B. ESCUDIE et M. CHIOLLAZ, *Colloque National Traitement du Signal GRETSI*, 1, 1985, p. 312-318.
- [12] Y. BIRAUD et B. ESCUDIE, *Revue CETHEDDEC*, 20^e année, 4^e trimestre, n° 77, 1983 (réunion problèmes inverses, CNRS, Paris).
- [13] H. DYM et H. P. MACKEAN, *Fourier series and integrals*, 1972, p. 121-132, Academic Press.
- [14] G. DEMOMENT et A. M. DJAFARI, *Applied optics*, 26, n° 9, 1987, p. 1745-1754.
- [15] G. DEMOMENT et A. M. DJAFARI, *Revue physique appliquée*, 22, 1987, p. 153-157.
- [16] G. DEMOMENT, A. M. DJAFARI et B. ESCUDIE, *Revue d'Acoustique*, 1988-1989 (à paraître).
- [17] G. CORDELIS, *Thèse doc. Ing.*, Univ. Grenoble/INP, 1979.
- [18] B. BOUTHEMY, *Thèse doc. Ing.*, Univ. Grenoble/INP, 1981.