

Similarités entre les aspects non linéaires

du filtrage adaptatif

en traitement du signal

et en automatique

Similarities between non linear aspects of adaptive filtering

in signal processing and in control



O. MACCHI

Laboratoire des Signaux et Systèmes (LSS), ESE, Plateau du Moulon, 91192 GIF-SUR-YVETTE.

Odile Macchi est née en 1943 à Aurillac, Cantal. Ancienne élève de l'École Normale Supérieure de jeunes filles, elle est reçue septième à l'agrégation de Mathématiques en 1966. Elle obtient son Doctorat d'État en Sciences Physiques en 1972 et depuis lors, elle se consacre à la recherche en traitement du signal, spécialement en théorie des communications. Elle est directeur de recherche au CNRS et dirige au sein du Laboratoire de Signaux et Systèmes de l'École Supérieure d'Électricité, une équipe qui travaille en communications, tout particulièrement sur les systèmes adaptatifs en transmission. Actuellement elle est adjointe au directeur du GRECO Traitement du Signal et Image. Pour la partie transmission de données, elle est coauteur du livre **Téléinformatique** qui a fait l'objet d'un très gros tirage et de trois traductions. Elle a reçu la médaille Blondel, le prix du général Kampé de Férié de l'Académie des Sciences et la distinction fellow des IEEE.



M. JAIDANE-SAIDANE

Laboratoire des Systèmes et Télécommunications (LST-Com), École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, Campus Universitaire, Le Belvédère, BP n° 37, TUNIS.

Docteur d'État (Laboratoire des Signaux et Systèmes de l'École Supérieure d'Électricité, France), actuellement Maître de Conférences à l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT) et responsable du groupe "Transmissions Numériques" au Laboratoire des Systèmes de Télécommunications de l'ENIT.

Thèmes de recherche : Identification et filtrage adaptatifs, Stabilité des filtres récurrents adaptatifs, Application en transmission numérique à débit réduit des signaux téléphoniques et des images, chaos.

RÉSUMÉ

Le Filtre Adaptatif (FA) permet l'optimisation en temps réel d'un filtre linéaire en fonction des fluctuations de son environnement. Il est à la base des techniques de modélisation en Traitement du Signal et s'applique au problème général de la commande de processus en Automatique. Un filtre, linéaire en les entrées, devient non linéaire lorsqu'il est adaptatif. La non-linéarité des équations du FA est à la base des problèmes de non-unicité des solutions, d'instabilité et de comportement dynamique complexe que l'on rencontre dans les deux disciplines.

Le problème de stabilité est le plus crucial : c'est la stabilité au sens entrée bornée/sortie bornée qui intéresse le traicteur de signal, alors que l'automaticien désire en plus des performances « asymptotiques » c'est-à-dire la convergence de la trajectoire du FA vers celle du système vrai. Il apparaît cependant, que le FA peut mettre en évidence des problèmes mathématiquement identiques en Traitement du Signal et en Automatique, bien que l'appréciation portée sur les résultats soit totalement différente dans les deux contextes.

MOTS CLÉS

Filtrage Adaptatif, identification, Traitement du Signal, Automatique, filtre linéaire, filtre récurrent, formulation de l'erreur de sortie, équations récurrentes non linéaires, stabilité, stabilité BIBO, bifurcation, chaos.

SUMMARY

When a linear filter is faced with fluctuations of the environment, adaptive filtering (AF) is a means to achieve on-line optimization. In Signal Processing it is a major technic for modeling. In the control field it is used for the general purpose of process regulation. Eventhough filtering is a linear operation in terms of input signals, it becomes nonlinear when it is made adaptive. The nonlinear nature of the AF equations is responsible for a number of difficulties such as instability, nonuniqueness of the solution, its complex dynamical behaviour... which are encountered both in Signal Processing and in Control.

The most crucial problem is stability. Typically in Signal Processing the relevant stability is bounded input/bounded output, whereas in the Control field there is an additional requirement of asymptotic achievement, i.e., the AF trajectory reaches the true system output. Despite the differences it is shown that AF raises identical mathematical problems in both disciplines.

KEY WORDS

Adaptive Filtering, identification, Signal Processing, Control, linear filter, recursive filter, output error approach, nonlinear recurrent equations, stability, BIBO stability, bifurcation, chaos.

I. Introduction : similarités des contextes et des problèmes

I. 1. FILTRAGE ADAPTATIF [1]

L'opération filtrage adaptatif (FA) consiste à optimiser un filtre en temps réel en fonction de son environnement et à l'adapter lors de fluctuations de ce dernier.

L'aspect filtrage de ce problème consiste à calculer, à partir des valeurs passées de l'entrée x_n du filtre, une sortie

$$(1) \quad \hat{y}_n = H^T X_n,$$

$$(2) \quad X_n \stackrel{\Delta}{=} (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-N})^T \quad \text{et} \quad H \stackrel{\Delta}{=} (h_0, h_1, \dots, h_N)^T$$

qui est linéaire en les x_j . Le filtre est transverse (resp. récursif) lorsque N est fini (resp. infini). Le vecteur paramètre H du filtre est calculé de façon à minimiser un critère $J(H)$, le plus souvent quadratique par rapport à l'erreur d'estimation e_n

$$(3) \quad J(H) = E[e_n^2],$$

où e_n représente l'écart entre la sortie \hat{y}_n du filtre et un signal de référence y_n que l'on souhaite approcher :

$$(4) \quad e_n = y_n - \hat{y}_n.$$

L'aspect adaptation du FA consiste à approcher le vecteur \tilde{H} optimal pour $J(H)$ à l'aide d'une suite de vecteurs H_n qui change à chaque valeur du couple (x_n, y_n) . L'évolution en est gouvernée par un algorithme d'adaptation du type

$$(5) \quad H_n = H_{n-1} + \mu \Delta_n; \quad \mu > 0,$$

où μ est appelé pas d'adaptation. L'incrément Δ_n dépend des signaux x_n, y_n, e_n , ainsi que de leur passé. A l'instant n , la sortie du FA devient :

$$(6) \quad \hat{y}_n = H_{n-1} X_n,$$

selon le schéma de la figure 1.

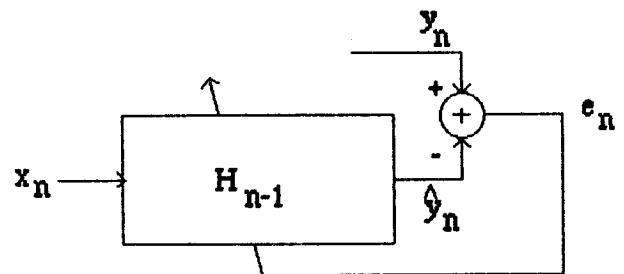


Fig. 1. — Filtrage adaptatif.

Remarquons dès à présent que le filtre est linéaire en les entrées tant que ses paramètres sont fixes [équation (1)]. Il devient non linéaire en les entrées lorsque ses paramètres sont adaptatifs, par l'intermédiaire de H_{n-1} qui dépend des x_{n-i} d'après les équations (1), (4) et (5).

I. 2. SIMILARITÉS DE CONTEXTE : IDENTIFICATION ADAPTIVE

Parmi les opérations effectuées en Traitement du Signal, le filtrage linéaire est sans doute la plus importante; elle est à l'origine des techniques de base d'analyse du signal et de modélisation. Ainsi, pour modéliser un signal, on identifie le filtre ayant généré ce signal (exemple de l'annulation d'écho : identification du chemin d'écho en transmission full-duplex du signal téléphonique). De même, la modélisation inverse identifie l'inverse du filtre ayant généré le signal (exemple de l'égalisation : identification de l'inverse du canal de transmission pour supprimer les interférences inter-symboles en transmission des données). Les techniques de FA sont utilisées lorsque l'identification s'effectue en temps réel.

En Automatique, le FA s'applique aux problèmes de commande de processus, où il s'agit d'identifier le système réel \tilde{H} à commander et où il faut ajuster à tout instant la loi de commande en fonction du modèle identifié (approche indirecte) [2].

En Traitement du Signal ou en Automatique, on est ainsi confronté au problème de l'identification

adaptative. L'identification adaptative est donc le cas particulier du FA, où le signal de référence y_n est la sortie éventuellement bruitée par un bruit additif ε_n , non mesurable, d'un système vrai \tilde{H} supposé linéaire, dont l'entrée x_n est également celle du FA (fig. 2)

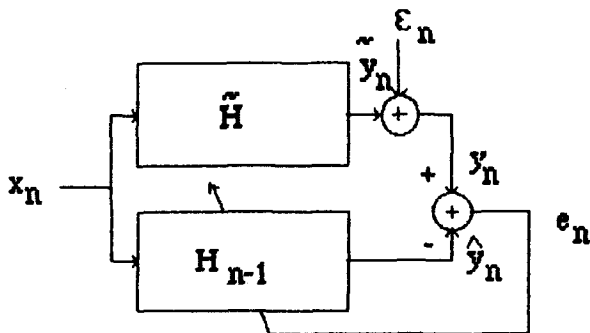


Fig. 2. — Identification adaptative.

Le but de l'identification adaptative est que la suite des vecteurs H_n du filtre adaptatif converge vers le paramètre \tilde{H} du système à identifier. Comme ceci est difficile à atteindre, on se contente souvent d'exiger que l'erreur de sortie e_n tende vers zéro.

I. 3. SIMILARITÉS DES PROBLÈMES : ASPECTS NON LINÉAIRES DU FA

Les problèmes fondamentaux rencontrés lors de l'identification adaptative sont similaires, en Traitement du Signal et en Automatique. Chacun de ces problèmes est lié à un aspect non linéaire du filtrage et de l'adaptation.

— *Problème de non-unicité des solutions de l'identification* : Lorsque la sortie \hat{y} du filtre à optimiser n'est pas linéaire en les paramètres H , le critère $J(H)$ à minimiser n'est pas quadratique en H et il peut présenter plusieurs minimums locaux. Il est alors possible, lors de l'adaptation, que seul un minimum local soit atteint. Ce problème n'est pas directement lié à l'adaptation; ce sont les caractéristiques entrée/sortie du filtre qui engendreront ou non la non-linéarité du système à résoudre en H et de là la possible non-unicité des solutions.

— *Problème de stabilité* : il se pose de manière différente pour les traiteurs de signaux et les automaticiens. C'est le caractère borné de la sortie du FA qui intéresse les premiers (stabilité entrée bornée/sortie bornée — BIBO —). Pour les seconds, la stabilité est aussi caractérisée par la déviation de la réponse du FA, par rapport à la réponse idéale que l'on attend du système vrai \tilde{H} . Ce sont encore les caractéristiques entrée/sortie du filtre d'identification qui sont à la base du problème de stabilité. Cependant, le choix de l'algorithme d'adaptation est ici plus crucial. En effet, de par l'adaptation, le filtre adaptatif est non linéaire en les entrées; cet effet conjugué à l'éventuelle non-linéarité en les paramètres fait en sorte que seule une approximation du gradient du critère est possible à l'itération n de l'algorithme : cette approximation ne garantit pas la stabilité du FA.

— *Problème de comportement qualitatif du système* : même pour un ordre peu élevé, le FA peut présenter une dynamique complexe, voire chaotique. L'algorithme d'adaptation intervient ici de manière critique : le pas d'adaptation μ qui gouverne la vitesse de variation, agit directement sur l'importance de la non-linéarité du système [équation (5)]. Ce pas joue le rôle d'un paramètre de bifurcation : un très faible changement de μ peut induire un changement considérable du comportement qualitatif du FA. La maîtrise d'un FA passe nécessairement par la connaissance d'un tel comportement.

A la similarité des problèmes de FA rencontrés, il faut opposer la différence des points de vue. Ainsi en Traitement du Signal, la contrainte complexité des calculs est primordiale car les applications se déroulent essentiellement dans un temps réel très contraignant. En revanche, c'est l'exigence d'optimalité qui prime en Automatique sur la complexité des calculs. Cette situation a mené les traiteurs de signaux à se pencher davantage sur l'étude des algorithmes d'adaptation : algorithme du signe, algorithmes rapides, étude du compromis vitesse d'adaptation/fluctuations pour la poursuite de non-stationnarités... Les automaticiens quant à eux se sont davantage penchés sur l'étude des performances du FA : qualité de l'estimation \hat{y}_n en présence de perturbations bornées ε_n , en l'absence de persistance des excitations, en présence de dynamiques négligées ou variables dans le temps pour le système réel \tilde{H} ... Remarquons que les algorithmes développés en ce sens par les automaticiens ne conviennent pas souvent en Traitement du Signal : les algorithmes à pas décroissant interdisent la poursuite de non-stationnarités, les algorithmes utilisant l'erreur *a posteriori* ne peuvent être implantés en temps réel, les algorithmes utilisant l'erreur normalisée sont trop complexes numériquement...

II. Non-linéarité due à la structure et non-unicité des solutions de l'identification

Le problème de non-unicité des solutions peut être considéré indépendamment de l'adaptation. Estimer les paramètres H du filtre pour identifier le modèle générant la référence y_n , c'est rechercher les minimums de la surface d'erreur $J(H)$. Le problème de non-unicité des paramètres du filtre optimal est lié à la présence de minimums locaux de cette surface. Une adaptation basée sur des équations qui expriment la nullité du gradient de la surface d'erreur pourra conduire également à un minimum local.

Si la surface d'erreur est quadratique en les paramètres, ou de façon équivalente si l'estimée \hat{y}_n (et donc l'erreur d'estimation e_n) est linéaire en les paramètres, cette surface ne possède pas de minimums locaux. En revanche, si l'erreur d'estimation n'est plus linéaire en les paramètres, l'existence de minimums (maximums) locaux est possible.

Ce sont ici les caractéristiques entrée/sortie du filtre d'identification qui vont permettre de conclure quant à l'unicité du filtre optimal au sens de la minimisation du critère. Ces caractéristiques diffèrent suivant que

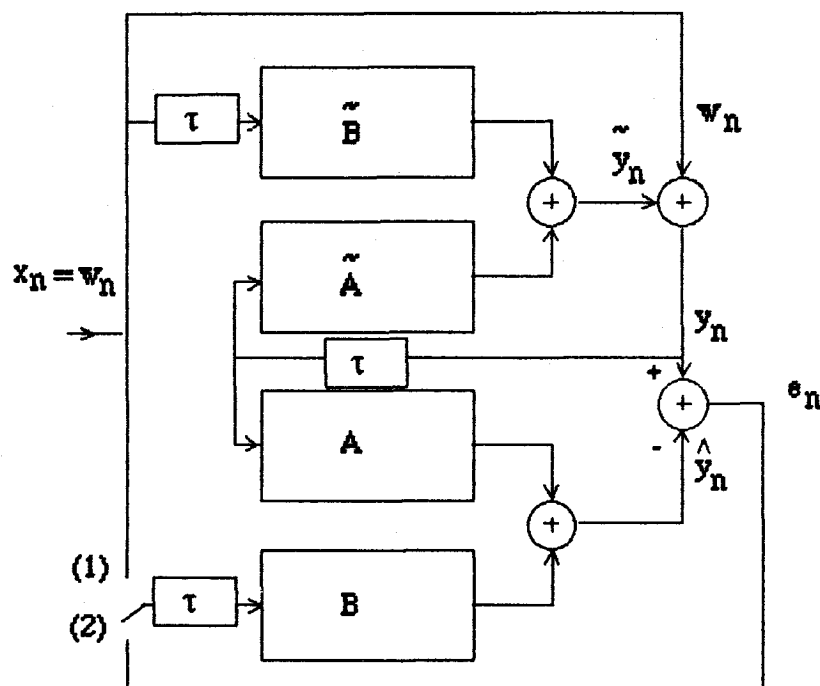


Fig. 3. — Identification par prédiction récursive ou transverse en Traitement du Signal.

l'on se place du point de vue Traitement du Signal, où le problème se pose en terme de structure transverse ou récursive du filtre, ou du point de vue Automatique où le problème se pose en terme d'erreur d'équation ou d'erreur de sortie.

II. 1. IDENTIFICATION TRANSVERSE OU RÉCURSIVE EN TRAITEMENT DU SIGNAL

En Traitement du Signal, les signaux sont supposés d'emblée aléatoires c'est-à-dire que le bruit ε_n perturbateur est toujours pris en compte dans l'analyse. L'entrée x_n du système, traditionnellement notée w_n car elle est blanche (white) génère le signal de sortie connu y_n . Nous supposons que la sortie y_n est décrite par le modèle ARMA :

$$(7) \quad y_n = \tilde{A}^T Y_n + \tilde{B}^T W_n + w_n$$

$$(8) \quad Y_n \stackrel{\Delta}{=} (y_{n-1}, \dots, y_{n-p})^T, \quad W_n \stackrel{\Delta}{=} (w_{n-1}, \dots, w_{n-q})^T$$

[les vecteurs (8) correspondent aux signaux passés].

L'identification du système générant le signal y_n peut se faire classiquement par prédiction. Le filtre prédictif délivre une estimation \hat{y}_n de y_n à partir des signaux passés. Différents cas se présentent suivant la structure transverse ou récursive du filtre de prédiction et suivant la connaissance que l'on a des signaux. Ceci sera discuté à l'aide de la figure 3 où τ représente le retard d'un échantillon.

II. 1. 1. Structure de type transverse

Le prédictif transverse est le plus communément utilisé en Traitement du Signal; son intérêt réside dans sa simplicité. L'entrée w_n du système est inconnue, seulement sa sortie y_n est connue. Ceci est traduit par le commutateur en position (2) sur la figure 3. C'est

la situation en présence de signaux réels contrairement au cas des simulations (voir plus loin). L'estimation \hat{y}_n délivrée par le filtre prédictif se base sur les valeurs passées de y_n selon :

$$(9) \quad \hat{y}_n = A^T Y_n,$$

et l'erreur de prédiction vaut :

$$(10) \quad e_n = y_n - A^T Y_n.$$

Ceci correspond à $B=0$ sur la figure 3. Dans cette formulation on ne tient pas compte de la structure du système réel; c'est là son avantage qui explique la fréquence de son emploi en Traitement du Signal. En particulier, il n'est même pas nécessaire de connaître les ordres de \tilde{A} et \tilde{B} . Remarquons que si $\tilde{B}=0$ et si l'ordre de A est au moins égal à celui de \tilde{A} alors le prédictif optimal délivre $e_n = w_n$ et $A = \tilde{A}$ [3].

Les équations (9) et (10) sont linéaires en le paramètre inconnu, ici $H=A$. Le critère $J(A)$ est donc quadratique en A et le minimum est unique lorsque la matrice de covariance du vecteur Y_n est inversible. Le système à résoudre pour trouver A correspond aux classiques équations de Yule-Walker qui nécessitent la connaissance de la fonction d'autocorrélation du signal y_n de référence jusqu'à l'ordre p du filtre et pour lesquelles de nombreuses méthodes de résolution sont connues [3].

II. 1. 2. Structure de type récursif

L'intérêt pour les filtres de structure récursive est récent en Traitement du Signal. Leur utilisation est attrayante en temps réel car un filtre récursif possédant un nombre réduit de paramètres peut avoir des performances semblables à celles d'un filtre de structure transverse ayant de très nombreux paramètres. Mais l'écriture de \hat{y}_n n'est pas immédiate; lorsque le

filtre prédicteur réalise une parfaite estimation du système à identifier $A = \hat{A}$, $B = \hat{B}$ et $y_n = \hat{y}_n$, il est clair que l'erreur d'estimation e_n et le bruit générateur w_n sont identiques. En l'absence de la connaissance de w_n généralement non mesurable, on se sert de cette propriété pour remplacer w_n par e_n dans le modèle (7). Pour prédiction de y_n ceci fournit la valeur :

$$(11) \quad \hat{y}_n = A^T Y_n + B^T E_n = (A + B)^T Y_n - B^T \hat{Y}_n;$$

dans cette équation E_n et \hat{Y}_n sont les vecteurs des échantillons passés comme dans (8). Le filtre est donc récursif. Il est clair dans (11) que y_n est non linéaire en A et B, car lorsque ces paramètres varient, \hat{Y}_n varie aussi. L'erreur de prédiction est donnée par :

$$(12) \quad e_n = y_n - A^T Y_n - B^T E_n.$$

La non-linéarité vis-à-vis des paramètres A et B complique considérablement l'analyse. Par exemple, la recherche des paramètres optimaux nécessite en général la connaissance de l'ensemble de la fonction d'autocorrélation de y_n (et pas seulement jusqu'à l'ordre p). De plus, la solution n'est pas unique en général. L'unicité de la solution est liée à la connaissance des ordres du système vrai \hat{A} et \hat{B} .

II. 1. 3. Autre cas d'identification par prédiction transverse

Pour vérifier le bien-fondé de ces méthodes de prédiction, préalablement à leur application sur des signaux réels enregistrés, le traicteur de signal vérifie la qualité de ces méthodes sur des cas de simulation. Pour cela, il génère lui-même son propre signal y_n à partir d'une entrée w_n qu'il connaît pour l'avoir générée. Il faut vérifier que A et B identifient correctement \hat{A} et \hat{B} . Ceci s'interprète sur la figure 3 en plaçant le commutateur en position (1). Les entrées W_n du passé et la sortie y_n du système sont connues. Il y a alors une solution unique au problème de l'identification car l'erreur de prédiction

$$(13) \quad e_n = y_n - A^T Y_n - B^T W_n,$$

est linéaire en A et B. Conceptuellement ce problème bien que n'étant pas strictement de la prédiction transverse lui est identique; il suffit d'augmenter la taille des vecteurs considérés A et Y_n dans l'équation (10) pour rendre compte des paramètres A, B et des observations Y_n , W_n .

II. 2. ERREUR D'ÉQUATION ET ERREUR DE SORTIE EN AUTOMATIQUE

En Automatique, on a affaire à un système naturellement récursif car la commande u_n qui est réinjectée à l'entrée du système à identifier s'élabore à partir de la connaissance de l'erreur d'estimation. Ici, l'entrée x_n du système traditionnellement appelée u_n est connue. (Nous avons vu qu'elle est généralement non mesurable en Traitement du Signal.)

Le problème de non-unicité des solutions ne se pose pas comme en Traitement du Signal en termes de structure, mais suivant que l'on néglige ou non la présence d'un bruit perturbateur ε_n sur la sortie du système, lors de l'identification.

Des systèmes non perturbés ont tout d'abord été considérés; la prise en compte d'une perturbation ε_n non mesurable a constitué un deuxième degré de difficulté en identification. On écrit ainsi que la référence y_n est générée de la manière suivante :

$$(14) \quad \begin{cases} y_n = \hat{A}^T \hat{Y}_n + \hat{B}^T U_n + \varepsilon_n; \\ U_n \triangleq (u_{n-1}, \dots, u_{n-q})^T. \end{cases}$$

Deux stratégies sont possibles pour l'identification des paramètres \hat{A} et \hat{B} selon que l'on prend en compte ou non l'existence du bruit perturbateur ε_n . La première conduit à une formulation dite de l'erreur d'équation tandis que la seconde conduit à une formulation dite de l'erreur de sortie [4]. Ces différents cas seront discutés à l'aide de la figure 4.

II. 2. 1. Formulation de l'erreur d'équation

L'estimation \hat{y}_n délivrée par le filtre utilise le passé de y_n selon

$$(15) \quad \hat{y}_n = A^T Y_n + B^T U_n.$$

On utilise y_n dans le filtre bien que ce soit la sortie bruitée du système, ce qui signifie que l'on néglige le bruit perturbateur ε_n . Ceci est décrit sur la figure 4 par l'interrupteur en position (1). Alors, l'erreur d'estimation est donnée par

$$(16) \quad e_n = y_n - A^T Y_n - B^T U_n.$$

Cette équation est linéaire en A et B. La solution obtenue est unique, comme en Traitement du Signal dans l'identification par filtre prédicteur transverse [équation (13)] traité dans le paragraphe II. 1. 3 lorsque l'interrupteur est en position (1) : mathématiquement, c'est le même problème.

II. 2. 2. Formulation de l'erreur de sortie

On pense améliorer l'identification des paramètres du modèle en remplaçant dans l'estimation de y_n , Y_n par son estimation \hat{Y}_n (qui est, on l'espère, proche de \hat{Y}_n la sortie non bruitée du système vrai). En effet, sous réserve que l'ordre du filtre soit bien celui du système, si (A, B) est proche de (\hat{A} , \hat{B}) l'estimation \hat{y}_n sera proche du signal y_n non bruité et réciproquement. Ceci est décrit sur la figure 4 par le commutateur en position (2). On a alors, toujours avec la même convention vectorielle :

$$(17) \quad \hat{y}_n = A^T \hat{Y}_n + B^T U_n,$$

$$(18) \quad e_n = y_n - A^T \hat{Y}_n - B^T U_n \\ = y_n - A^T Y_n - B^T U_n + A^T E_n.$$

Tout comme en Traitement du Signal pour le prédicteur récursif [cf. équation (12)], l'erreur n'est plus linéaire en A et B à cause du terme $A^T E_n$. La solution de l'identification n'est plus nécessairement unique. Mathématiquement c'est le même problème qu'en II. 1. 2.

L'identification par prédiction transverse en Traitement du Signal ou selon une formulation de l'erreur d'équation en Automatique n'est qu'une première approche du problème d'identification d'un processus ou d'un système. Dans le premier cas on ne tient pas

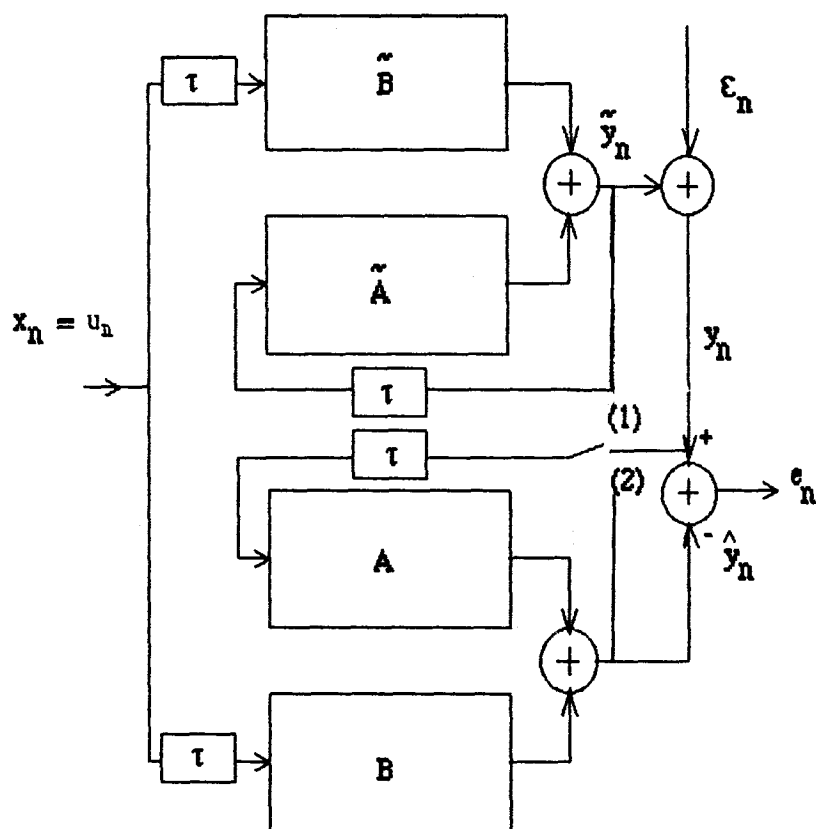


Fig. 4. — Identification selon une formulation d'erreur d'équation ou d'erreur de sortie en Automatique.

compte de la structure réelle du processus à identifier, et dans le second cas également, on occulte la présence d'un bruit perturbateur à la sortie du système. Dans les deux contextes il y a unicité des solutions de l'identification, grâce à la simplification du problème réel.

La deuxième approche de l'identification, si elle est plus réaliste, car le modèle tient compte des caractéristiques réelles du système, pose cependant le problème de non-unicité des solutions. C'est le caractère non mesurable de w_n , bruit générateur à l'entrée du processus à identifier, qui conduit à une identification par prédiction récursive en Traitement du Signal. En Automatique, c'est encore le caractère non mesurable de ε_n , bruit perturbateur à la sortie du système à identifier qui conduit à une identification par formulation de l'erreur de sortie.

En Automatique comme en Traitement du Signal, on est confronté mathématiquement, aux mêmes problèmes de non-unicité des solutions de l'identification.

III. Non-linéarité due à l'adaptation et problème de stabilité

III. 1. PROBLÈME DE STABILITÉ

Jusqu'à présent, le problème de stabilité du FA a été essentiellement abordé par les automaticiens [5]. Ce problème s'est posé dès l'origine puisque le but premier de la commande est de stabiliser un système

initialement instable en boucle ouverte. Ainsi, si l'on suppose que ce système à paramètres fixes est décrit par des équations linéaires (en les entrées), lorsque tous les pôles de la fonction de transfert du système sont à l'intérieur du cercle unité, le modèle génère une sortie bornée pour toute entrée bornée; c'est ce que l'on appelle la stabilité au sens des filtres linéaires. Si au contraire, l'un des pôles se trouve à l'extérieur du cercle unité, le modèle génère une sortie non bornée. Cette instabilité doit être corrigée par le système bouclé. A ce type d'instabilité BIBO (entrée bornée/sortie non bornée) liée à la position des pôles du système en boucle ouverte, s'ajoute un autre problème de stabilité lié à la performance de la commande, lorsque le filtre devient adaptatif. Une déviation asymptotique non nulle de la réponse du FA identifiant le système par rapport à la réponse idéale que l'on attend de ce système est considérée comme une instabilité par les automaticiens.

La raison pour laquelle il existe peu de résultats sur la stabilité des FA en Traitement du Signal, c'est que les FA considérés, sont longtemps restés transverses. Or ceux-ci sont toujours stables, au sens entrée bornée/sortie bornée à la condition que le pas d'adaptation ne dépasse pas une valeur critique [6]. Comme il a été dit, l'intérêt pour les FA récursifs est récent; or l'adaptation ne garantit pas que les pôles restent à l'intérieur du cercle unité au cours de leur évolution. Donc ce sont eux qui posent le vrai problème de stabilité BIBO. Notons que cette dernière doit découler nécessairement d'une minimisation correcte du critère $J(H)$. Le problème de stabilité au sens de la

déviations : réponse du FA/réponse idéale, n'intéresse pas beaucoup les traiteurs de signaux, puisqu'ils n'ont pas de modèle pour le système vrai qui génère le signal.

Sous la condition que les pôles du FA demeurent à l'intérieur du cercle unité, les techniques d'analyse de stabilité développées en Automatique permettent de conclure sous certaines conditions, à la convergence ou à la non-convergence de la sortie du FA vers celle du système réel. Cette stabilité asymptotique correspond bien à la finalité recherchée.

En Traitement du Signal, indépendamment du problème d'analyse de la stabilité, se sont développées au contraire, des techniques d'analyse locale, non asymptotiques. En effet, les traiteurs de signaux sont davantage préoccupés que les automaticiens par le comportement fin (en temps) de leur système.

Malgré ces différences d'approche, il existe un point de convergence majeur : qu'il s'agisse de techniques locales ou asymptotiques, traiteurs de signaux et automaticiens font l'hypothèse d'une *adaptation lente*. Cette façon de faire permet en quelque sorte de contourner la difficulté due à la non-linéarité du FA.

Dans ce qui suit, deux exemples sont présentés. Le premier est typiquement Traitement du Signal, il s'agit du comportement des prédicteurs récursifs adaptatifs en présence de signaux qui mettent le filtre optimal à la limite de la stabilité [7]. L'erreur de prédiction présente des « bouffées » qui s'expliquent par de brèves incursions des pôles à l'extérieur du cercle unité. Elles sont permises par le caractère auto-stabilisant de l'algorithme d'adaptation qui conserve la stabilité BIBO. Le second exemple est tiré d'un problème d'Automatique (régulation). Les conditions des théorèmes de convergence asymptotique sont mises en défaut, et l'on ne peut conclure qu'à une stabilité au sens BIBO. Les problèmes de stabilité des automaticiens et des traiteurs de signaux se rejoignent alors et l'on peut montrer de surcroît que les équations régissant le système sont équivalentes aux équations du prédicteur récursif précédent. Mais en commande, le comportement de la sortie du modèle est jugé insatisfaisant car la présence de « bouffées » est indésirable.

III. 2. PRÉDICTION RÉCURSIVE ET AUTOSTABILISATION

Considérons un prédicteur comportant une partie transverse et une partie récursive; il génère l'erreur de prédiction [équation (12)] et sa fonction de transfert possède des pôles. Lorsque le prédicteur devient adaptatif, il n'est pas garanti que ces pôles resteront toujours à l'intérieur du cercle unité. En fait, la théorie de la stabilité des filtres linéaires est ici sans objet, puisque le système n'est plus linéaire. En outre, si l'adaptation est correcte, c'est-à-dire si le gradient du critère est bien approché, même lorsque les pôles sortent du cercle unité, l'algorithme doit réaliser une contre-réaction pour les obliger à réintégrer le cercle unité, afin d'assurer la bornitude de la sortie indispensable à une faible erreur d'estimation.

Or, dans le cas des FA récursifs, on ne peut réaliser qu'une approximation du gradient [8]. Pour les filtres transverses ($B=0$), le problème ne se pose pas; le

gradient de l'erreur est $\nabla_A e_n = -Y_n$. Il s'obtient sans calcul à partir de l'entrée du filtre et il est indépendant du paramètre A (fixe ou évolutif). En revanche, pour un filtre par exemple purement récursif ($A=0$),

$$(19) \quad \nabla_B e_n = -\check{E}_n \neq -E_n,$$

où \check{e}_n est la version filtrée de e_n par la partie récursive du prédicteur [4] :

$$(20) \quad \check{e}_n = e_n - B^T \check{E}_n$$

et où la notation vectorielle indique le passé. Ainsi le gradient n'est pas directement une grandeur d'entrée (ou de sortie) du filtre. Pour le calculer il faut connaître B. Lorsque le filtre devient évolutif, l'adaptation selon le gradient de $E(e_n^2)$ doit réaliser :

$$(21) \quad B_{n+1} = B_n - \mu [e_n \nabla_B e_n]_{B_n} = B_n + \mu [e_n \check{E}_n]_{B_n}$$

Puisque le lien entre e_n et \check{e}_n dépend de B, seule une approximation du gradient peut être effectuée au point B_n . Parmi les approximations usuelles en Traitement du Signal, citons celle qui au cours des itérations réalise

$$(22) \quad [e_n \check{E}_n]_{B_n} \stackrel{\Delta}{=} \Delta_B^1 = e_n \check{E}_n,$$

où les composantes de \check{E}_n qui correspondent aux valeurs passées e_k , $k < n$, ne sont pas réactualisées pour la valeur B_n , mais sont celles fournies par (20) avec $n=k$ et $B=B_{k-1}$. Citons également l'approximation qui réalise

$$(23) \quad [e_n E_n]_{B_n} \stackrel{\Delta}{=} \Delta_B^2 = e_n E_n,$$

où le filtrage de l'erreur n'est pas effectué.

Tant que les pôles du prédicteur se trouvent à l'intérieur du cercle unité (c'est-à-dire tant que le problème de stabilité ne se pose pas), ces approximations sont d'autant plus vraies que l'adaptation est plus lente et la première approximation est meilleure que la seconde. Cependant, lorsque les pôles du filtre optimal sont proches du cercle unité, par exemple en présence de signaux à bande étroite [9], c'est la première approximation qui est mise en défaut. En effet, considérons une référence y_n sinusoïdale; lorsque l'adaptation est lente, le FA reste linéaire localement (en temps) et la sortie e_n du prédicteur ainsi que e_n sont encore des sinusoïdes à la même fréquence que l'entrée. Les quantités (22) et (23) ont donc en moyenne une valeur constante. Les paramètres du prédicteur dérivent selon une direction privilégiée : ils sortent nécessairement du domaine de stabilité au sens des filtres linéaires. Alors, même localement, le FA n'est plus linéaire. Dans ce cas, selon la première approximation, le FA devient instable au sens BIBO (sortie non bornée [8]). Selon la seconde approximation, l'algorithme utilise à profit l'erreur générée par le prédicteur, dite non linéaire, d'amplitude exponentiellement croissante et à la fréquence du pôle instable, pour réaliser la contre-réaction qui permettra à ce pôle de réintégrer le cercle unité : c'est ce que l'on nomme un algorithme autostabilisant [7]. Les pôles du FA oscillent autour des pôles du filtre optimal donc ici autour du cercle unité; leur sortie quasi

périodique du cercle unité se traduit par des bouffées sur l'erreur de prédiction. Ceci est illustré sur la figure 5 où l'on considère un prédicteur récursif

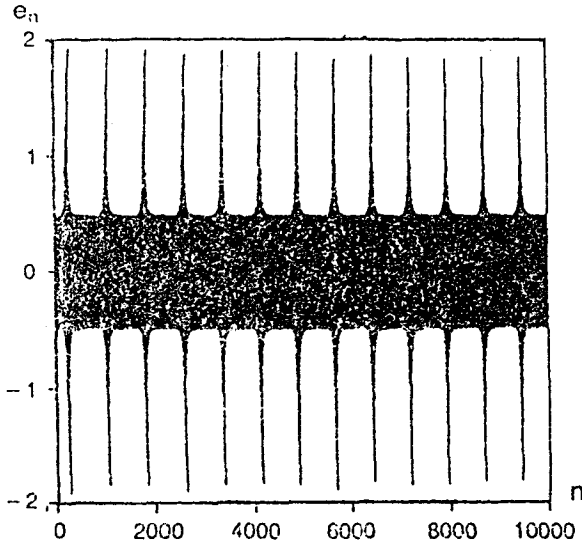


Fig. 5. - Prédicteur récursif d'ordre 1 et autostabilisation.

d'ordre 1 avec une adaptation selon (23); l'entrée est sinusoïdale $y_n = \sin(n\pi/8)$ et l'unique pôle réel oscille autour de -1 . Les équations régissant le système sont

$$(24) \quad e_n = y_n - b_{n-1} e_{n-1}$$

$$(25) \quad b_n = b_{n-1} + \mu e_n e_{n-1}$$

III. 3. RÉGULATION ADAPTATIVE ET COMPORTEMENT NON SATISFAISANT

L'exemple qui suit [10] met particulièrement bien en évidence les similitudes des aspects non linéaires du FA en Traitement du Signal et en Automatique et la différence des points de vue.

Dans le but de réguler à zéro la sortie y_n d'un système vrai (inconnu)

$$(26) \quad y_n = ay_{n-1} + u_{n-1} + d$$

où d est une petite perturbation constante, on utilise le régulateur de type « dead-beat »

$$(27) \quad u_{n-1} = -\theta_{n-1} y_{n-1}$$

dans lequel l'adaptation est choisie selon

$$(28) \quad \theta_n = \theta_{n-1} + y_n y_{n-1} / (1 + y_n^2)$$

Praly a montré que la solution du système (26)-(28) est bornée (stabilité BIBO). Mais cette solution n'est pas satisfaisante (cf. fig. 6, $d=0,1$) en commande adaptative, car elle présente justement ces bouffées indésirables décrites dans le cas d'un prédicteur récursif.

Par le changement de variables

$$(29) \quad b_n = \theta_n - a, \quad e_n = y_n / d, \quad \mu = d^2,$$

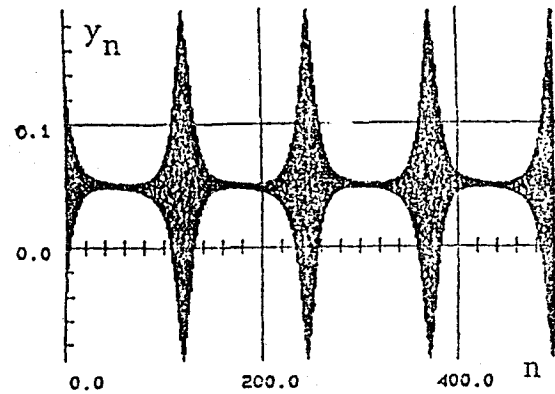


Fig. 6. - Régulation adaptative et comportement non satisfaisant.

on montre immédiatement que le système (26)-(28) est équivalent au système (24)-(25) décrivant le prédicteur récursif adaptatif d'ordre 1 précédent, c'est-à-dire

$$(30) \quad e_n = 1 - b_{n-1} e_{n-1},$$

prédicteur dont l'entrée est la constante 1 (sinusoïde à la fréquence nulle) pourvu que le pas d'adaptation μ soit normalisé (divisé par $1 + \mu e_{n-1}^2$) selon

$$(31) \quad b_n = b_{n-1} + \mu e_n e_{n-1} / (1 + \mu e_{n-1}^2)$$

Sur cet exemple il apparaît que le FA peut faire surgir des problèmes mathématiquement identiques en Traitement du Signal et en Automatique bien que l'appréciation portée sur les résultats soit totalement différente dans ces deux contextes : le résultat est acceptable dans le premier contexte (stabilité BIBO) et inacceptable dans le second contexte (instabilité au sens asymptotique).

IV. Non-linéarité due à l'adaptation et comportement qualitatif du filtre adaptatif

Dans tout ce qui précède, en Traitement du Signal ou en Automatique, l'étude du comportement du FA a été envisagée pour une adaptation lente. Lorsque l'adaptation devient rapide, la non-linéarité du système est accentuée et l'analyse du comportement se complique considérablement. L'approche consiste alors à plonger le problème de l'identification adaptative dans le cadre plus général des systèmes non linéaires; le contexte adaptation est alors oublié.

Le système adaptatif est considéré comme un système d'équations récurrentes non linéaires dont l'étude se fait par les techniques générales d'analyse des systèmes récurrents [11]. Elles permettent de mettre en évidence dans des cas algébriquement simples, pour des variations d'un paramètre de bifurcation, des cascades de divisions de fréquence pouvant mener au chaos. Cependant une telle méthode reste limitée aux systèmes d'ordre peu élevé, pour lesquels les signaux restent déterministes.

Deux exemples similaires récents en Traitement du Signal [12] et en Automatique [13] ont permis de déceler une telle complexité de comportements.

IV. 1. PRÉDICTEUR RÉCURSIF ET CHAOS

Considérons le prédicteur récursif d'ordre 1 adaptatif d'entrée sinusoïdale étudié précédemment [équations (24), (25)]. Il s'agit d'un système récurrent non linéaire non autonome du deuxième ordre; son analyse est difficile, car seul le comportement de quelques autres systèmes récurrents autonomes d'ordre 2 est connu. La transformation T qui décrit le prédicteur : $(e_{n+1}, b_n) = T(e_n, b_{n-1})$ est un endomorphisme (inverse non unique) ce qui complique encore considérablement l'analyse.

Dans un tel système, la vitesse d'adaptation μ joue le rôle d'un paramètre de bifurcation. Pour une entrée sinusoïdale [dans l'exemple présenté $y_n = \sin(n\pi/8)$] les variations de μ font apparaître des cascades de divisions de fréquence pouvant mener au chaos. La figure 7 illustre la présence d'un attracteur étrange dans le plan de phase des (e_n, b_{n-1}) pour $\mu = 0,8$.

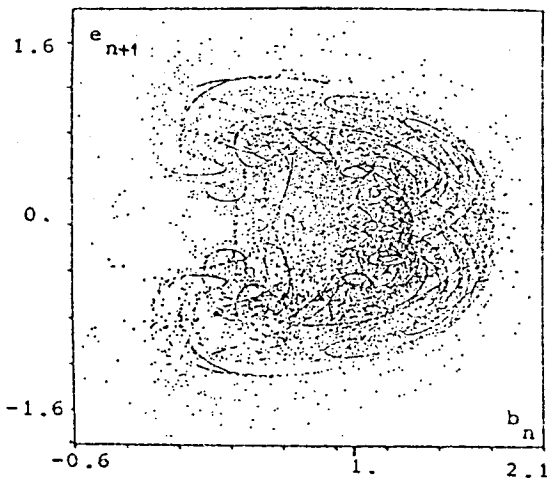


Fig. 7. — Prédicteur récursif adaptatif et chaos.

IV. 2. RÉGULATION ADAPTATIVE ET CHAOS

On considère le système vrai du second ordre [13], en l'absence de bruit ε_n :

$$(32) \quad y_n = b y_{n-1} + a y_{n-2} + u_{n-1},$$

identifié par un filtre du premier ordre :

$$(33) \quad \hat{y}_n = b_{n-1} y_{n-1} + u_{n-1}.$$

Le but de la commande adaptative est encore de réguler la sortie du modèle à 0 : on choisit $u_n = -b_n y_n$. L'adaptation se fait suivant l'algorithme des moindres carrés normalisés :

$$(34) \quad b_n = b_{n-1} + y_{n-1} y_n / (c + y_{n-1}^2),$$

où c est une petite constante positive empêchant la division par zéro. Bien que similaire de prime abord, l'étude de chacun des systèmes prédicteur et régulateur adaptatifs conduit à des degrés différents de difficulté dans l'analyse. En effet, dans le deuxième cas, la transformation récurrente

$$T : (y_{n+1}, b_{n+1}) = T(y_n, b_n)$$

est un difféomorphisme (inverse unique) : l'unicité de l'inverse est donc une difficulté supprimée. Pour la valeur zéro de c il y a apparition d'un attracteur étrange. La figure 8 illustre ceci à l'aide des variables bornées

$$x_n = \frac{y_{n-1}/y_{n-2}}{1 + |y_{n-1}/y_{n-2}|}, \quad z_n = \frac{y_n/y_{n-1}}{1 + |y_n/y_{n-1}|}.$$

Sur ces exemples il apparaît que le FA fait surgir des problèmes de comportement qualitatif des filtres similaires en Traitement du Signal et en Automatique. C'est la vitesse d'adaptation qui joue le rôle de paramètre de bifurcation, et pour une adaptation rapide on montre dans chacun des deux contextes la nécessité d'étudier le comportement des équations récurrentes non linéaires régissant le FA.

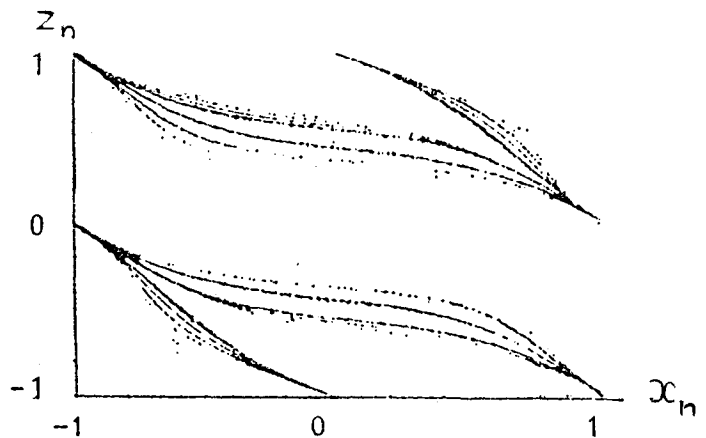


Fig. 8. — Régulation adaptative et chaos.

Conclusion

Au cours du temps les différences de constitution des systèmes d'identification adaptative utilisés en Traitement du Signal et en Automatique finissent par s'estomper : les traiteurs de signaux utilisent des filtres de structure récurrente tandis que les automaticiens en commande adaptative considèrent des systèmes perturbés. De ce fait les problèmes rencontrés lors de l'utilisation de FA et les méthodes d'analyse de ces filtres finissent par se rejoindre. Ainsi, dans chacun des deux contextes on rencontre des problèmes de non-unicité des solutions de l'identification, des problèmes de stabilité et de comportement qualitatif des FA. Ces problèmes sont liés aux aspects non linéaires du FA : l'adaptation entraîne une non-linéarité en les entrées tandis que le filtrage entraîne une non-linéarité en les paramètres.

Il apparaît que les problèmes de FA peuvent conduire à des problèmes mathématiquement identiques en Traitement du Signal et en Automatique. Cependant, les critères d'appréciation du résultat diffèrent selon les deux contextes, en particulier en ce qui concerne la notion fondamentale de stabilité.

En Traitement du Signal se sont développées des techniques locales permettant d'analyser le comporte-

ment fin des FA ; en Automatique, l'analyse des systèmes se fait par des techniques asymptotiques. Ces deux méthodes sont complémentaires, chacune d'elle correspond à une façon d'aborder les non-linéarités. Toutes deux font l'hypothèse d'une adaptation lente, et toutes deux deviennent insuffisantes dans le cas d'une adaptation rapide. Ce sont alors les techniques plus générales d'analyse des systèmes récurrents non linéaires qui s'imposent avec la même nécessité dans les deux contextes.

Manuscrit reçu le 17 janvier 1989.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] O. MACCHI et M. BELLANGER, Le filtrage adaptatif transverse, *Traitement du Signal*, vol. 5, n° 3, 1988, p. 115-132.
- [2] Ph. DE LARMINAT, On the stabilizability condition in indirect adaptive control, *Automatica*, 20, n° 6, 1984, p. 793-795.
- [3] B. WIDROW et S. D. STEARNS, *Adaptive signal processing*, Prentice Hall, 1985.
- [4] C. R. JOHNSON Jr, Adaptive IIR filtering: current results and open issues, *IEEE Trans. on Information Theory*, IT-30, n° 2, March 1984, p. 237-250.
- [5] B. D. O. ANDERSON *et al.*, *Stability of adaptive systems: passivity and averaging analysis*, MIT press, 1986.
- [6] O. MACCHI et E. EWEDA, Second-order convergence analysis of stochastic adaptive linear filtering, *IEEE Trans. AC*, 28, n° 1, 1983, p. 76-85.
- [7] O. MACCHI et M. JAIDANE-SAIDANE, Stability of an adaptive ARMA predictor in presence of narrow band input signals, *2nd IFAC workshops an ASCSP*, Lund, Sweden, juin 1986, p. 417-422.
- [8] O. MACCHI et M. JAIDANE-SAIDANE, *Stability of adaptive recursive filters*, ICASSP88, New York, april 11-14, 1988, p. 1503-1505.
- [9] J. M. TRAVASSOS-ROMANO et M. BELLANGER, Pôles et zéros des prédicteurs numériques, *Traitement du Signal*, 3, n° 2, 1986, p. 67-77.
- [10] L. PRALY et M. ESPANA, *An example of oscillations in adaptive linear control*, IFAC, 1987.
- [11] I. GUMOWSKI et C. MIRA, *Dynamique chaotique : transformations ponctuelles, transition ordre désordre*, Cepadues, 1980.
- [12] M. JAIDANE-SAIDANE et O. MACCHI, Comportement chaotique des filtres récurrents adaptatifs : application à la compression des signaux téléphoniques, *Annales des Télécommunications*, 42, n°s 5-6, 1987, p. 285-299.
- [13] I. M. Y. MAREELS et R. R. BITMEAD, Non-linear dynamics in adaptive control: chaotic and periodic stabilization 3, *Automatica*, 22, n° 6, 1986, p. 641-655.