

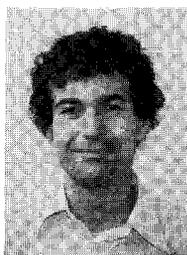
Champs stationnaires au sens large sur \mathbb{Z}^2 :

propriétés structurelles

et modèles paramétriques

Wide sense stationary processes on \mathbb{Z}^2 :

structural properties and parametric models

**Philippe LOUBATON**

École Nationale Supérieure des Télécommunications, Département Signal, 46, rue Bar-rault, 75634 PARIS CEDEX 13
et GRECO Traitement du Signal et Image.

Philippe Loubaton est ingénieur et docteur de l'ENST (81 et 88 respectivement). Après 4 années passées à la division Télécommunications de THOMSON-CSF, il devient enseignant chercheur à l'INT, puis à l'ENST où il est actuellement maître de conférence. Ses travaux de recherche concernent les signaux et les systèmes multidimensionnels et vectoriels.

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous synthétisons divers travaux concernant la structure des processus stationnaires au sens large à deux indices discrets en insistant tout particulièrement sur les modèles d'ordre fini. Après avoir présenté les principaux résultats de la généralisation au cas 2-D de la théorie de la prédiction linéaire, nous étudions les modèles ARMA, les champs markoviens stationnaires au sens large et les modèles à représentation d'état qui sont les trois types de modèles paramétriques linéaires et stationnaires les plus utilisés.

MOTS CLÉS

Processus aléatoire stationnaire bidimensionnel, théorie de la prédiction, factorisation des densités spectrales 2-D, processus ARMA à deux indices, champs markoviens au sens large, systèmes linéaires invariants déterministes et stochastiques à deux indices.

SUMMARY

In this paper, we give a survey of results on the structure of 2-D wide-sense stationary processes with special emphasis on finite-order models. We give firstly the extension of the linear prediction theory to the 2-D case. We study then the following three models: ARMA, wide-sense Markovian fields and state-space representation.

KEY WORDS

Stationary processes on \mathbb{Z}^2 , prediction theory, 2-D spectral factorization, 2-D ARMA processes, wide sense stationary Markov random fields, two-parameter deterministic and stochastic linear invariant systems.

Introduction

Le développement considérable des moyens de calcul a permis d'entrevoir au début des années 70 la possibilité d'effectuer des traitements numériques sur des signaux ou des données multidimensionnelles (m-D en abrégé). Dès lors, il est apparu nécessaire de se

doter d'outils d'analyse adaptés et les recherches se sont développées dans des domaines aussi variés que la théorie des systèmes m-D, la statistique des séries spatiales ou les processus aléatoires à plusieurs indices.

Dans cet article, nous synthétisons divers travaux concernant la *structure* des processus stationnaires au sens large sur \mathbb{Z}^2 (i. e. les processus stationnaires au

sens large à deux indices discrets) en insistant tout particulièrement sur les propriétés des modèles d'ordre fini.

La structure des processus stationnaires 1-D est parfaitement décrite par les résultats de la théorie de la prédiction de Wiener-Kolmogorov qui sont fondamentaux en modélisation puisqu'ils permettent de caractériser analytiquement l'une des représentations possibles d'un processus stationnaire 1-D comme sortie d'un filtre excité par un bruit blanc, en l'occurrence celle pour laquelle le bruit blanc générateur est l'innovation du processus. Pour pouvoir généraliser ce type de résultats au cas 2-D, il est nécessaire d'étendre la théorie de la prédiction linéaire de Wiener-Kolmogorov en choisissant le passé de telle sorte que l'erreur de prédiction soit un bruit blanc. Helson et Lowdenslager ([HEL-LOW-1], 1959) ont montré que l'ensemble des passés possédant cette propriété correspond à un ordonnancement de \mathbb{Z}^2 défini par le fait que l'ensemble des points supérieurs à $(0,0)$ coïncide avec un demi-plan asymétrique de base $(0,0)$. Dans ce cadre, les critères de déterminisme et de régularité ont une forme analogue à ceux du cas 1-D et tout processus régulier peut être vu comme la sortie d'un filtre « causal » et d'inverse « causal » excité par l'erreur de prédiction ([HEL-LOW-1]). La fonction de transfert de ce filtre factorise la densité spectrale du processus et joue le rôle de la factorisation à phase minimale du cas 1-D. Sa forme analytique précise a été obtenue beaucoup plus tard par Ekström et Woods ([EKS-WOO], 1976) dans le cas où la densité spectrale est strictement positive et admet une suite de coefficients de Fourier absolument sommable, le cas le plus général ayant été traité plus tard dans [KOR-LOU] lorsque l'ordonnancement de \mathbb{Z}^2 choisi correspond à un balayage lexicographique colonne par colonne de \mathbb{Z}^2 ; formellement, la factorisation à phase minimale est égale comme dans le cas 1-D à l'exponentielle de la fonction obtenue en tronquant le développement en série de Fourier du logarithme de la densité spectrale à sa partie causale; cette expression a été utilisée dans des problèmes de conception et de stabilité de filtres 2-D par divers auteurs ([EKS-WOO], par exemple). Il convient de mentionner que d'autres types de passés ont été envisagés. Chiang-Ze-Pei ([CHI], 1957) a considéré le problème de la prédiction le long de passés définis par des demi-plans horizontaux ou verticaux. Le cas de passés définis par des quarts de plan a été également étudié [KALMAN, SOL, KOR-LOU] mais ne peut être résolu que si les processus d'innovation associés à l'ordre lexicographique colonne par colonne et ligne par ligne coïncident, ce qui est le cas si et seulement si les coefficients de Fourier du logarithme de la densité spectrale sont nuls dans le deuxième et le quatrième quadrant [KOR-LOU].

Parallèlement à ces travaux, les modèles paramétriques 2-D ont été étudiés. La première contribution importante est due à Whittle ([WHI], 1954) qui a introduit les ARMA 2-D. Ces processus peuvent être définis comme étant la sortie d'un filtre de fonction de transfert rationnelle Φ excité par un bruit blanc à deux indices v ; bien entendu, le couple (Φ, v) n'est pas unique, et contrairement au cas 1-D, la densité spectrale (pourtant rationnelle) d'un tel processus

n'admet pas nécessairement de factorisation à phase minimale rationnelle car les polynômes 2-D ne sont pas décomposables en produit de facteurs d'ordre 1, de sorte qu'on ne peut mettre en évidence un couple (Φ, v) particulier identifiable analytiquement à partir de la densité spectrale du processus. Pour éviter ce problème, les processus ARMA doivent être par définition unilatéraux en ce sens que l'existence d'une représentation (Φ, v) avec Φ rationnelle causale à phase minimale doit être imposée. Ces modèles ont l'avantage d'être identifiables et d'être adaptés aux traitements récursifs du fait de la causalité de la fonction de transfert Φ du filtre qui les génèrent; de plus, les résultats asymptotiques de la théorie de la prédiction linéaire montrent qu'ils constituent une classe dense dans l'ensemble des processus stationnaires réguliers. Cependant leur caractérisation spectrale fait apparaître un grave défaut qui semble-t-il n'est que peu mentionné dans la littérature. Le travail de Murray ([MUR], 1978) permet de mettre en évidence qu'un processus stationnaire 2-D est un processus ARMA quart de plan (*i. e.* Φ est le quotient de deux polynômes dont le support des coefficients est inclus dans \mathbb{N}^2) si et seulement si sa densité spectrale est rationnelle et si les coefficients de Fourier de son logarithme sont nuls dans le deuxième et le quatrième quadrant. Ce résultat se généralise au cas d'un processus ARMA unilatéral quelconque bien que ceci ne semble jamais avoir été mis en évidence clairement; en effet, le support de la réponse impulsionnelle du filtre générateur Φ est le plus petit cône J^* de base $(0,0)$ contenant tous les points du support J des coefficients des deux polynômes dont le quotient est égal à Φ ; ce secteur angulaire est toujours d'ouverture inférieure à π en raison du caractère unilatéral du processus, et par une technique de changement d'axe classique ([BOSE], par exemple), on peut démontrer (*cf.* théorème 2.6) qu'un processus stationnaire 2-D est un processus ARMA unilatéral défini par une fonction de transfert quotient de polynômes dont le support des coefficients est J si et seulement si sa densité spectrale est rationnelle et si ses coefficients de Fourier sont nuls hors de $J^* \cup -J^*$. Ainsi que nous le montrons, cette propriété analytique se traduit physiquement par l'existence en tout point (m, n) de \mathbb{Z}^2 d'un secteur angulaire dont l'ouverture est égale au complément à π de celle de J^* dans lequel les valeurs prises par le processus n'interagissent pas sur sa valeur au point (m, n) . Cette propriété qui est due à l'alliance causalité-modèle d'ordre fini va à l'encontre de l'idée d'homogénéité de l'espace intuitivement sous-jacente dans la notion de champ aléatoire et doit être considérée comme un défaut structurel important.

Le problème de la modélisation d'un processus stationnaire 2-D régulier par un processus AR unilatéral a bien entendu fait l'objet de nombreux travaux qui se sont curieusement assez longtemps limités au cas des AR quart de plan, les AR unilatéraux quelconques ayant été introduits par Marzetta ([MAR-1 et MAR-2], 1977). Comme dans le cas 1-D, des équations de type Yule-Walker permettent d'identifier les coefficients du modèle; ces équations mettent en jeu des matrices Toeplitz par bloc, chaque bloc ayant lui-même une structure de Toeplitz.

Contrairement au cas 1-D, les solutions des équations de Yule-Walker ne définissent pas nécessairement un filtre FIR d'inverse stable ainsi qu'un contre-exemple l'a montré [GEN-KAM] car l'algorithme de Levinson ne se généralise pas au cas des matrices mises en jeu. Cependant, Marzetta [MAR-1] (voir aussi [DE-GE-KA]) a montré qu'à condition de considérer un support de prédiction semi-infini, l'algorithme de Levinson se généralise et que la paramétrisation des filtres FIR 2-D d'inverses stables qui en découle peut être utilisée dans un algorithme de type Burg en modélisation AR, mais aussi dans des procédures de stabilisation. Dans le même ordre d'idée, il convient de mentionner les travaux de Leroux concernant la généralisation au cas 2-D de l'algorithme de Bauer d'une part [LER-1], et utilisant la transformation de Radon pour ramener des problèmes de stabilisation de filtres 2-D à des problèmes 1-D de même nature d'autre part [LER-2].

Le deuxième grand type de modèle linéaire et stationnaire d'ordre fini constitue une généralisation naturelle de la notion de processus de Markov mais dans laquelle toute idée de causalité est abandonnée. Les champs markoviens, étudiés en particulier par Rozanov [ROZ-2] et Chay [CHAY], sont en effet définis par le fait que seul un nombre fini de voisins interagissent sur la valeur du champ en un point quelconque. Ces modèles, par essence non causaux, sont aisément identifiables et sont caractérisés par le fait qu'ils admettent une densité spectrale égale à l'inverse d'un polynôme 2-D positif sur le bi-cercle unité [CHAY] de sorte qu'ils apparaissent naturellement en estimation spectrale 2-D au sens du maximum d'entropie [MCL]. Il convient également de signaler que les modèles AR unilatéraux sont en fait des champs markoviens, la réciproque étant fautive du fait qu'un polynôme 2-D positif sur le bi-cercle unité n'est pas nécessairement factorisable par un polynôme causal à phase minimale. Ces modèles peuvent être définis dans un cadre plus large que celui des processus stationnaires au sens large. En particulier, les champs markoviens au sens strict à valeurs dans un ensemble fini, plus connus sous le nom de champs de Gibbs, ont été introduits en physique statistique pour décrire des modèles d'interaction entre particules. Leur utilisation en traitement d'image a été envisagée pour la première fois par D. Geman et S. Geman ([GEM-GEM], 1984); ce thème de recherche fait actuellement l'objet de nombreux travaux ([YOU, AZE, CHA, HEI] par exemple) qui tendent à prouver que les champs de Gibbs constituent un outil de modélisation fiable pour le traitement d'image.

Le dernier type de modèle d'ordre fini a été introduit par Attasi ([ATT-1 et ATT-2], 1975) à l'occasion d'une tentative d'extension au cas 2-D de la théorie de la réalisation stochastique motivée par d'éventuelles retombées en filtrage récursif. Le problème de la représentation d'un processus stationnaire 2-D par l'intermédiaire d'un modèle d'état récurrent à deux indices a tout naturellement amené Attasi à s'intéresser à la réalisation des filtres récursifs 2-D. Une théorie générale ne peut être développée que dans la mesure où l'équivalent 2-D de l'opérateur de Hankel est de rang fini, condition qui est réalisée si et seulement si la fonction de transfert du filtre est à dénomi-

nateur séparable; dans ce cas, l'état du filtre est généré à partir de l'entrée par une équation d'état très spécifique. Le problème de la représentation d'un processus stationnaire 2-D par un modèle d'état généré à partir d'un bruit blanc par une équation d'état de ce type a été ensuite considéré. Quand une telle représentation existe, sous certaines hypothèses assez restrictives, il n'existe qu'une seule réalisation stochastique minimale qui peut être caractérisée simplement [ATT-1]; en cas de non-unicité, la perte de la notion de filtre de Kalman ne permet pas de mettre en évidence une réalisation particulière et on est confronté à des problèmes d'identifiabilité. L'impossibilité de généraliser au cas 2-D le filtre de Kalman fait que l'intérêt essentiel du travail d'Attasi a été de mettre en évidence un nouveau type de modèle paramétrique plutôt que de développer des techniques de filtrage récursif qui ne sont en fait que des approximations judicieuses de filtres de Kalman vectoriel 1-D. Notons enfin que les processus représentables par les modèles d'Attasi admettent un autre type de représentation interne qui est un cas particulier du modèle de Roesser [ROE]; les problèmes de réalisation stochastique correspondants ont été étudiés par Clara [CLA] et Lasghari et Silverman [LAS-SIL] dans le cadre d'applications au filtrage.

Dans cet article, nous reprenons et développons la plupart des points abordés plus haut qui concernent les propriétés structurelles des processus stationnaires au sens large 2-D. En particulier, nous n'abordons pas ici les aspects qui relèvent de la statistique des modèles paramétriques 2-D et renvoyons le lecteur intéressé au travail de Guyon [GUY] qui est une excellente synthèse de l'état de l'art en la matière. La plus grande partie des résultats que nous présentons ici ne sont pas nouveaux exception faite des théorèmes (1.2.7) et (2.6) qui à notre connaissance n'avaient pas été énoncés sous leur forme la plus générale; néanmoins, afin que cet exposé soit raisonnablement autosuffisant, nous avons choisi de donner (le plus souvent en annexe) les démonstrations qui peuvent permettre de mieux comprendre les problèmes posés par l'aspect bidimensionnel des processus et qui ne présentent pas de difficultés techniques majeures. D'autre part, nous avons adopté un langage plus accessible que celui qui est utilisé dans la littérature spécialisée du domaine des processus stationnaires au sens large; en particulier, nous n'avons pas voulu utiliser la représentation spectrale des processus stationnaires ni évoquer certains points de la théorie des fonctions de classe Hardy de sorte que certains détails techniques n'ont pu être traités rigoureusement.

La première partie est consacrée à l'exposé des principaux résultats de la théorie de la prédiction des processus stationnaires au sens large sur \mathbb{Z}^2 . Après avoir défini et caractérisé les notions de déterminisme et de régularité, nous définissons la factorisation à phase minimale, justifions rigoureusement sa dénomination et en donnons l'expression analytique dans le cas où \mathbb{Z}^2 est ordonné lexicographiquement colonne par colonne de bas en haut; ensuite, nous la caractérisons par la position de ses pôles et de ses zéros quand elle est rationnelle. Nous étendons ces résultats au cas où le passé est défini par un demi-plan asymétrique quelconque en établissant que le changement d'axe

classiquement utilisé dans les problèmes de test de stabilité conserve le caractère phase minimal au sens où nous l'avons défini, ce qui à notre connaissance n'avait jamais été établi.

La seconde partie est consacrée à un exposé détaillé des propriétés des processus ARMA unilatéraux. Après avoir fait apparaître la nécessité de l'unilatéralité, nous mettons en évidence l'existence de deux demi-plans asymétriques par rapport auxquels les erreurs de prédiction d'un processus ARMA unilatéral sont égales; après avoir interprété cette propriété par l'existence de directions privilégiées, nous caractérisons spectralement les processus ARMA unilatéraux en généralisant les résultats de [KOR-LOU] et de [MUR] établis dans le cas quart de plan. Enfin, nous évoquons rapidement le problème de la modélisation par des processus AR unilatéraux en présentant l'essentiel des résultats de [MAR-1].

Nous présentons dans la troisième partie les champs markoviens au sens large et renvoyons le lecteur à la littérature spécialisée pour ce qui concerne les champs de Gibbs et leur utilisation en traitement d'image [GEM-GEM, AZE, YOU, CHA, GUY].

Enfin, dans la quatrième partie, nous exposons de façon détaillée les résultats des travaux d'Attasi. La section 4.1 est consacrée aux problèmes liés à la représentation d'état des filtres 2-D. Dans la section 4.2, nous commençons par décrire en terme de propriétés markoviennes la structure des modèles d'Attasi [KOR], puis nous présentons et commentons l'algorithme de réalisation stochastique de [ATT-1]; nous insistons tout particulièrement sur les hypothèses qui assurent l'unicité des réalisations stochastiques minimales et nous montrons qualitativement que contrairement à une opinion répandue, elles imposent de sérieuses restrictions.

Notations et définitions générales

Le disque unité ouvert (resp. fermé) de \mathbb{C} sera noté D (resp. \bar{D}) et le cercle unité T . Nous désignerons par I l'intervalle $[-0,5, 0,5]$; la mesure de Lebesgue sur I (resp. I^2) sera notée du (resp. $du dv$). Dans tout ce qui suit, les propriétés vraies presque partout le seront toujours sur I ou I^2 par rapport à du ou $du dv$ respectivement, ou de façon équivalente sur T ou T^2 par rapport à l'image de la mesure de Lebesgue par la bijection naturelle de I vers T ou de I^2 vers T^2 ; nous omettrons donc en général de préciser par rapport à quelle mesure le presque partout est relatif.

Les variables aléatoires et les processus aléatoires considérés ici sont supposés être réels, centrés, et définis sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) fixé. E désigne le symbole espérance mathématique. On rappelle que l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ des variables aléatoires de carré intégrable, muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = E(xy)$ est un espace de Hilbert dont la norme sera notée $\| \cdot \|$. Si H est un sous-espace de $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et si y est une variable aléatoire de carré intégrable, y/H désigne la projection orthogonale de y sur H . Par ailleurs, si $(y_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on désigne par $sp \{ y_i / i \in I \}$

le plus petit sous-espace de $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ contenant tous les y_i .

On dit qu'une suite $y = (y_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ de $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un processus stationnaire au sens large sur \mathbb{Z}^2 (on dira également processus ou champ stationnaire au sens large 2-D) si $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2, \forall (k,l) \in \mathbb{Z}^2, E(y_{m+k,n+l} y_{k,l})$ n'est fonction que de (m,n) ; nous noterons R_y la fonction, dite d'autocorrélation, ainsi définie. Dans la suite, nous omettrons de préciser que la stationnarité que nous considérons est la stationnarité au sens large.

Si y est un processus stationnaire sur \mathbb{Z}^2 , on désigne par spectre de y la mesure positive μ_y définie sur I^2 par

$$R_y(m, n) = \int_{I^2} e^{2i\pi(mu+nv)} d\mu_y(u, v) \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

La densité spectrale $f_y(u, v)$ de y est la densité de μ_y par rapport à $du dv$. Enfin, l'espace de Hilbert engendré par les variables aléatoires $(y_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ sera noté $H(y)$. Lorsque aucune ambiguïté ne sera à craindre, nous omettrons de préciser que $R_y, \mu_y, f_y, H(y)$ sont relatifs à y et nous les noterons R, μ, f, H respectivement.

On appelle bruit blanc 2-D tout processus stationnaire sur \mathbb{Z}^2 v tel que $E(v_{m,n} v_{0,0}) = \sigma^2 \delta_{m,n}$ où $\delta_{m,n}$ désigne le symbole de Kronecker.

Par polynôme à deux indéterminées (nous dirons aussi polynôme 2-D), nous sous-entendons toute fonction définie sur \mathbb{C}^2 par $P(z, w) = \sum_{(k,l) \in J} c_{k,l} z^k w^l$

où J est un sous-ensemble fini quelconque de \mathbb{Z}^2 . Si A est une matrice, A^T désigne sa transposée; si A est carrée, $\det A$ est le déterminant de A . Enfin, on dit que A est asymptotiquement stable si les valeurs propres de A sont de module strictement inférieures à 1.

1. Théorie de la prédiction des processus stationnaires 2-D

1.1. CAUSALITÉ, DÉTERMINISME ET RÉGULARITÉ

La manière la plus simple d'étendre la théorie de la prédiction de Wiener-Kolmogorov au cas 2-D consiste à choisir un passé pour lequel l'erreur de prédiction est un bruit blanc en fonction duquel le processus doit pouvoir être représenté. Helson et Lowdenslager [HEL-LOW-1, HEL-LOW-2] ont mis en évidence l'ensemble des passés possédant cette propriété et ont généralisé dans ce cadre bon nombre de résultats du cas 1-D; de plus, ils ont montré que leur approche pouvait être utilisée dans un cadre mathématique beaucoup plus large que celui que nous envisageons ici.

Les demi-plans asymétriques jouent un rôle fondamental dans la suite puisqu'ils sont à la base des passés considérés par Helson et Lowdenslager.

Définition 1.1.1 : On désigne par demi-plan asymétrique tout sous-ensemble S de \mathbb{Z}^2 vérifiant

$$(1.1.1) \quad S \text{ est stable par addition,}$$

$$(1.1.2) \quad S \cup -S = \mathbb{Z}^2$$

$$(1.1.3) \quad S \cap -S = \{(0,0)\}. \quad \square$$

Un tel ensemble est du type

$$(1.1.4) \quad S = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 / m\alpha + n\beta \geq 0\}$$

si α ou β est irrationnel; si α et β sont rationnels, la droite d'équation $x\alpha + y\beta = 0$ contient des points de coordonnées entières de part et d'autre de $(0,0)$ de sorte que l'ensemble défini par (1.1.4) ne vérifie pas (1.1.3); il suffit alors d'y retirer les points de \mathbb{Z}^2 autre que $(0,0)$ situés sur l'une des demi-droites de pente $-\alpha/\beta$ issue de $(0,0)$ (cf. fig. 1).

A tout demi-plan asymétrique S , on peut associer la relation d'ordre totale sur \mathbb{Z}^2 définie par

$$(1.1.5) \quad (p, q) \leq (m, n) \\ \text{si et seulement si (ssi) } (m-p, n-q) \in S.$$

On considère à présent un processus stationnaire 2-D y fixé une fois pour toutes.

Soit $\mathbb{P}_{m,n}^S$ (P pour passé) l'espace de Hilbert suivant censé représenter le passé strict de y au point (m, n) :

$$(1.1.6) \quad \mathbb{P}_{m,n}^S = sp \{y_{k,l} / (k,l) \leq (m,n), (k,l) \neq (m,n)\}.$$

Alors, il est immédiat de constater que le processus d'innovation correspondant I^S défini par

$$(1.1.7) \quad I_{m,n}^S = y_{m,n} - y_{m,n} / \mathbb{P}_{m,n}^S$$

est un bruit blanc. Sa norme a été mise en évidence dans [HEL-LOW-1].

Théorème 1.1.2 [HEL-LOW-1]: Pour tout demi-plan asymétrique S , la variance de l'erreur de prédiction est donnée par

$$(1.1.8) \quad \|I_{m,n}^S\|^2 = \exp \int_{\mathbb{I}^2} \log f(u, v) du dv. \quad \square$$

Outre le fait que l'expression de I^S est comparable à celle du cas 1-D [ROZ-1], il est remarquable de

constater que $\|I_{m,n}^S\|$ ne dépend pas du choix de S ; ceci justifie la définition suivante.

Définition 1.1.3: On dit que y est déterministe si $I_{m,n}^S = 0$ et que y est non déterministe sinon. De plus, on dit que y est régulier (on dit aussi purement non déterministe) si $H(y) = H(I^S)$, autrement dit si y s'exprime entièrement en fonction de son innovation. \square

Lorsque y est non déterministe, nous appellerons processus d'innovation normalisé de y associé au passé défini par S le bruit blanc de variance 1 v^S défini par

$$(1.1.9) \quad v_{m,n}^S = \frac{I_{m,n}^S}{\|I_{m,n}^S\|}$$

La caractérisation spectrale des notions de déterminisme et de régularité est également due à Helson et Lowdenslager et apparaît comme la généralisation naturelle du résultat correspondant dans le cas 1-D ([ROZ-1], par exemple).

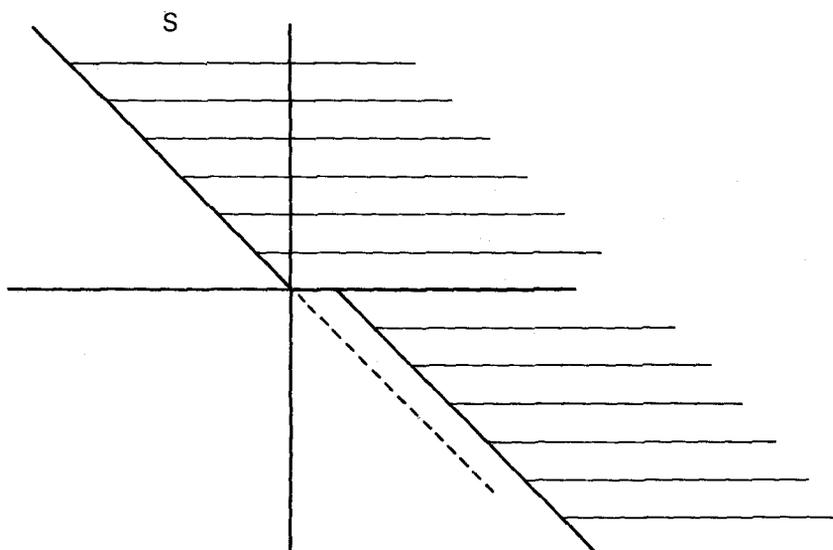
Théorème 1.1.4 [HEL-LOW-2]: Le processus y est déterministe ssi

$$(1.1.10) \quad \int_{\mathbb{I}^2} \log f(u, v) du dv = -\infty.$$

De plus, y est régulier ssi

$$(1.1.11) \quad d\mu(u, v) = f(u, v) du dv \\ \int_{\mathbb{I}^2} \log f(u, v) du dv > -\infty.$$

Lorsque y est non déterministe, le processus $y_{m,n}^r = y_{m,n} / H(v^S)$ est régulier et est appelé partie régulière de y tandis que $y_{m,n}^d = y_{m,n} / [H(v^S)]^\perp$ est déterministe et est appelé partie déterministe de y ; en outre, le spectre de y^r est la partie absolument continue par rapport à $du dv$ de μ [i. e. la mesure $f(u, v) du dv$] tandis que celui de y^d coïncide avec la partie singulière par rapport à $du dv$ de μ . \square



Le fait que les notions de déterminisme et de régularité ne dépendent pas du demi-plan asymétrique choisi s'étend au cas des processus vectoriels dont la matrice de densité spectrale est non dégénérée presque partout [HEL-LOW-1], mais pas aux processus vectoriels quelconques [LOU].

Comme dans le cas 1-D, le problème de la prédiction linéaire d'un processus régulier est intimement lié à celui de la factorisation de sa densité spectrale par des fonctions causales.

1.2. FACTORISATION SPECTRALE ET REPRÉSENTATION CANONIQUE

A partir de maintenant, le processus y est supposé régulier. Tout ce qui suit pourrait être développé dans le cas d'un passé défini par un demi-plan asymétrique quelconque. Néanmoins, afin de rendre l'exposé plus clair, nous allons considérer dans un premier temps le cas où le passé est défini à partir de l'ensemble

$$S_1 = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 / m > 0\} \cup \{(0, n) / n \geq 0\}$$

ou de l'ensemble

$$S_2 = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 / n > 0\} \cup \{(m, 0) / m \geq 0\}.$$

Le choix de S_1 correspond à un balayage lexicographique colonne par colonne, de la gauche vers la droite et de bas en haut de \mathbb{Z}^2 , tandis que celui de S_2 correspond à un balayage lexicographique ligne par ligne, du bas vers le haut et de la gauche vers la droite. On définit alors les espaces de Hilbert suivant.

$$(1.2.1) \quad H_{m,n}^1 = sp \{ y_{m-k, n-l} / (k, l) \in S_1 \},$$

$$(1.2.2) \quad H_{m,n}^2 = sp \{ y_{m-k, n-l} / (k, l) \in S_2 \}.$$

L'espace $H_{m,n-1}^1$ (resp. $H_{m-1,n}^2$) représente le passé strict de y au point (m, n) lorsque l'on ordonne \mathbb{Z}^2 lexicographiquement colonne par colonne de gauche à droite et de bas en haut (resp. ligne par ligne de bas en haut et de gauche à droite). Afin de simplifier les notations, nous noterons I^1, v^1, I^2, v^2 les processus d'innovation et d'innovation normalisé associés à S_1 et S_2 . Nous serons également amené à utiliser les espaces H_m^h et H_n^v définis par

$$(1.2.3) \quad H_m^h = sp \{ y_{k,l} / k \leq m, l \in \mathbb{Z} \},$$

$$(1.2.4) \quad H_n^v = sp \{ y_{k,l} / k \in \mathbb{Z}, l \leq n \}$$

qui correspondent à des passés définis par des demi-plans avançant horizontalement de gauche à droite (H_m^h) et verticalement de bas en haut (H_n^v).

Un des points fondamentaux est que v^1 (resp. v^2) est l'unique (au signe près) bruit blanc de variance 1 vérifiant

$$(1.2.5) \quad H_{m,n}^1 = H_{m,n}^1(v^1) \quad [\text{resp. } H_{m,n}^2 = H_{m,n}^2(v^2)].$$

Ceci implique en particulier que y se représente sous la forme

$$(1.2.6) \quad y_{m,n} = \sum_{(k,l) \in S_1} \varphi_{k,l}^1 v_{m-k, n-l}^1$$

$$\text{avec } \sum_{(k,l) \in S_1} |\varphi_{k,l}^1|^2 < \infty$$

où

$$|\varphi_{0,0}^1|^2 = \exp \int_{I^2} \log f(u, v) du dv$$

(car $I_{m,n}^1 = \varphi_{0,0}^1 v_{m,n}^1$).

La représentation (1.2.6) sera appelée représentation canonique de y (dans la mesure où le bruit blanc générateur coïncide avec l'innovation normalisée de y).

Considérons à présent la fonction $\Phi^1(z, w)$ définie par

$$(1.2.7) \quad \Phi^1(z, w) = \sum_{(k,l) \in S_1} \varphi_{k,l}^1 z^k w^l$$

Puisque $\sum_{(k,l) \in S_1} |\varphi_{k,l}^1|^2 < \infty$, on peut montrer [KÖR-

LOU] que Φ^1 est définie $\forall z \in D$ et pour presque tout $w \in T$ ainsi que pour $z=0$ et $\forall w \in D$. D'autre part, les

séries $\sum_{(k,l) \in S_1} \varphi_{k,l}^1 e^{-2in(ku+lv)}$ et $\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{0,l}^1 e^{-2inlv}$ conver-

geant en moyenne quadratique (i. e. dans \mathbb{L}^2), on peut prolonger Φ^1 presque partout sur T^2 et sur $\{0\} \times T$ en posant

$$(1.2.8) \quad \Phi^1(e^{-2inu}, e^{-2inv}) = \sum_{(k,l) \in S_1} \varphi_{k,l}^1 e^{-2in(ku+lv)},$$

$$(1.2.9) \quad \Phi^1(0, e^{-2inv}) = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{0,l}^1 e^{-2inlv}.$$

Dans la suite, nous dirons qu'une fonction « causale » Φ définie comme Φ^1 à partir d'une suite indexée par S_1 de coefficients de carré sommable admet pour domaine de définition $\bar{D} \times T \cup \{0\} \times \bar{D}$ sans préciser que le sens à donner à $\Phi(z, w)$ dépend de la position du point (z, w) dans $\bar{D} \times T \cup \{0\} \times \bar{D}$.

D'après (1.2.6), il est clair que Φ^1 factorise f i. e. que $f(u, v) = |\Phi^1(e^{-2inu}, e^{-2inv})|^2$. Par conséquent, f est factorisable par une fonction causale; la fonction Φ^1 définie par (1.2.7) sera appelée factorisation à phase minimale de f (nous justifierons cette terminologie dans la proposition 1.2.1). Comme dans le cas 1-D, la relation (1.2.6) signifie que y est la sortie d'un filtre causal de fonction de transfert Φ^1 excité par v^1 et (1.2.5) implique que v^1 doit pouvoir être obtenu causalement en fonction de y , autrement dit que Φ^1 est d'inverse causale. Il convient de remarquer que la traduction mathématique de cette dernière propriété est délicate car la fonction $1/\Phi^1(z, w)$ ne se développe pas nécessairement sous la forme (1.2.7).

Nous allons à présent justifier le qualificatif de factorisation à phase minimale en montrant que toute factorisation causale de f est égale au produit d'un déphaseur pur causal par Φ^1 .

Proposition 1.2.1: Toute factorisation causale Φ de f s'écrit sous la forme

$$(1.2.10) \quad \Phi(z, w) = \theta(z, w) \Phi^1(z, w)$$

où $\theta(z, w)$ est causale et vérifie

$$(1.2.11) \quad |\theta(e^{-2inu}, e^{-2inv})|^2 = 1 \quad (\text{presque partout}).$$

De plus, $\Phi = \Phi^1$ (à un facteur multiplicatif de module 1 près) ssi l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

$$(1.2.12) \quad \log |\varphi_{0,0}|^2 = \int_{I^2} \log f(u, v) du dv$$

où

$$\varphi_{0,0} = \int_{I^2} \Phi(e^{-2inu}, e^{-2inv}) du dv$$

$$(1.2.13) \quad \log |\varphi_{0,0}|^2 = \int_1 \log |\Phi(0, e^{-2inv})|^2 dv$$

et

$$\log |\Phi(0, e^{-2inv})|^2 = \int_1 \log f(u, v) du dv$$

presque partout. \square

La démonstration est donnée en annexe.

Remarque 1.2.2: Soit S un demi-plan asymétrique autre que S_1 . Ainsi que peut en témoigner la démonstration purement géométrique de cette proposition, une décomposition de type (1.2.10) existe pour les factorisations de f causales au sens de la relation d'ordre définie par S ; la factorisation à phase minimale Φ^S qui y intervient est celle qui correspond à la représentation canonique de y en fonction de l'innovation normalisée v^S . De plus, le critère (1.2.12) reste inchangé mais (1.2.13) qui dépend de S_1 doit être adapté. \square

(1.2.13) est intéressant en ce sens que cette condition équivaut à dire que Φ est la factorisation à phase minimale de f ssi la fonction $w \rightarrow \Phi(0, w)$ est la factorisation à phase minimale de la « densité spectrale » $|\Phi(0, e^{-2inv})|^2$ et si pour presque tout v fixé, $z \rightarrow \Phi(z, e^{-2inv})$ est la factorisation à phase minimale de la densité spectrale 1-D $u \rightarrow f(u, v)$. Autrement dit, on ramène le problème de la caractérisation de Φ^1 à des problèmes 1-D de la même nature. Cette remarque est particulièrement utile pour mettre en évidence la forme analytique de Φ^1 [cf. théorème (1.2.3)] et pour la caractériser par la position de ses pôles et de ses zéros quand elle est rationnelle [cf. Proposition (1.2.4)].

D'autre part, d'après (1.2.13),

$$|\Phi^1(0, e^{-2inv})|^2 = \exp \int_1 \log f(u, v) du.$$

Ce résultat peut être interprété en examinant la nature de la fonction $w \rightarrow \Phi^1(0, w)$. Pour ceci, il convient tout d'abord de s'intéresser au processus W^h défini par :

$$(1.2.14) \quad W_{m,n}^h = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{0,l}^1 v_{m,n-l}^1 \\ = y_{m,n} - \sum_{k \geq 1, l \in Z} \varphi_{k,l}^1 v_{m-k,n-l}^1$$

Puisque $H_{m,n}^1 = H_{m,n}^1(v^1)$, $H_m^h = H_m^h(v^1)$ [où H_m^h est défini par (1.2.3)]; dans ces conditions, il est clair

que $y_{m,n}/H_{m-1}^h = \sum_{k \geq 1, l \in Z} \varphi_{k,l}^1 v_{m-k,n-l}^1$; le processus W^h coïncide donc avec l'erreur de prédiction le long des passés H_m^h et sera appelé dans la suite processus d'innovation horizontal de y . Pour $m \neq m'$, on a évidemment

$$(1.2.15) \quad E(W_{m,n}^h W_{m',n'}^h) = 0, \quad \forall (n, n')$$

i.e., sur deux colonnes d'abscisses différentes, les variables aléatoires composant W^h sont non corrélées. Ceci implique que la densité spectrale de W^h est une fonction $g_1(v)$ ne dépendant pas de la première variable u . D'autre part, d'après (1.2.14),

$$(1.2.16) \quad g_1(v) = \left| \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{0,l}^1 e^{-2inlv} \right|^2 = |\Phi^1(0, e^{-2inv})|^2.$$

On déduit alors de ce qui précède que la densité spectrale $g_1(v)$ de W^h est égale à la fonction

$v \rightarrow \exp \int_1 \log f(u, v) du$; la valeur de la densité spec-

trale de W^h au point v peut donc s'interpréter comme la variance de l'erreur de prédiction à un pas d'un processus 1-D admettant pour densité spectrale la fonction $u \rightarrow f(u, v)$. De plus, la fonction $w \rightarrow \Phi^1(0, w)$ est la factorisation à phase minimale de $g_1(v)$ et d'après (1.2.14), ceci implique que pour chaque valeur de m fixée, $v_{m,n}^1$ coïncide avec l'innovation normalisée du processus à un indice $(W_{m,n}^h)_{n \in Z}$.

A présent, nous exploitons la condition (1.2.13) pour dériver la forme analytique générale de la factorisation à phase minimale Φ^1 .

Théorème 1.2.3 [KOR-LOU]: Soient $(b_{k,l})_{(k,l) \in Z^2}$ les coefficients de Fourier de $\log f$ i.e.

$$b_{k,l} = \int_{I^2} \log f(u, v) e^{2in(ku+lv)} du dv$$

et les fonctions $(b_k(v))_{k \in Z}$ définies par

$$b_k(v) = \int_1 \log f(u, v) e^{2inku} du.$$

Désignons par $\gamma(w)$ la factorisation à phase minimale de $g_1(v) = \exp b_0(v)$. Alors,

$$(1.2.17) \quad \Phi^1(z, e^{-2inv}) = \gamma(e^{-2inv}) \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k(v) z^k \right) \\ \forall z \in D$$

et pour presque tout v , et

$$(1.2.18) \quad \Phi^1(0, w) = \gamma(w), \quad \forall w \in D. \quad \square$$

La démonstration est donnée en annexe.

Dans [EKS-WOO], Ekström et Woods ont considéré le cas où la densité spectrale de y est strictement positive et où la suite des autocorrélations $R(m, n)$ est absolument sommable; dans ces conditions, les coefficients de Fourier de $\log f$ vérifient la condition

$$(1.2.19) \quad \sum_{(k,l) \in Z^2} |b_{k,l}| < \infty.$$

La série $(b_{0,0}/2) + \sum_{l=1}^{\infty} b_{0,l} e^{-2lnv}$ converge alors uniformément et

$$\exp\left(\frac{b_{0,0}}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} b_{0,l} e^{-2lnv}\right) = \gamma(e^{-2inv});$$

dans ce cas, (1.2.17) s'écrit de la façon suivante qui apparaît comme une généralisation de l'expression du cas 1-D obtenue en changeant \mathbb{N} en S_1 :

$$(1.2.20) \quad \Phi(z, e^{-2inv}) = \exp\left(\frac{b_{0,0}}{2} + \sum_{(k,l) \in S_1 - \{0,0\}} b_{k,l} z^k e^{-2lnv}\right).$$

Remarquons que (1.2.19) n'est pas vérifiée lorsque y est un modèle ARMA (cf. section 2) dont le numérateur possède un zéro sur T^2 et que dans ce cas, (1.2.20) n'a aucun sens.

Le cas où la factorisation à phase minimale est le quotient de deux polynômes à coefficients dans S_1 est particulièrement important.

Proposition 1.2.4: Soient

$$A(z, w) = 1 + \sum_{(k,l) \in J - \{0,0\}} a_{k,l} z^k w^l$$

et

$$B(z, w) = \sum_{(k,l) \in J} b_{k,l} z^k w^l$$

deux polynômes premiers entre eux tels que $J \subset S_1$. Supposons que y vérifie :

$$(1.2.21) \quad y_{m,n} + \sum_{(k,l) \in J - \{0,0\}} a_{k,l} y_{m-k, n-l} = \sum_{(k,l) \in J} b_{k,l} v_{m-k, n-l}$$

où v est un bruit blanc de variance 1. Alors, la fonction

$$(u, v) \rightarrow \left| \frac{B(e^{-2inu}, e^{-2inv})}{A(e^{-2inu}, e^{-2inv})} \right|_2$$

est intégrable; de plus, $v = v^1$ ssi

$$(1.2.22) \quad \begin{cases} A(z, w) \neq 0, & \forall z \in D \text{ et } \forall w \in T \\ A(0, w) \neq 0, & \forall w \in \bar{D}, \end{cases}$$

$$(1.2.23) \quad \begin{cases} B(z, w) \neq 0, & \forall z \in D \text{ et } \forall w \in T \\ B(0, w) \neq 0, & \forall w \in D, \end{cases}$$

autrement dit, $\Phi(z, w) = B(z, w)/A(z, w)$ est la factorisation à phase minimale de la densité spectrale de y ssi (1.2.22) et (1.2.23) sont vérifiées. \square

La démonstration est donnée en annexe.

Remarque 1.2.5: Les conditions (1.2.22) et (1.2.23) sont très proches de celles qui garantissent que le filtre de fonction de transfert Φ est BIBO (bounded input-bounded output) stable et d'inverse BIBO stable. Rappelons qu'un filtre est dit BIBO stable si pour toute suite d'entrée bornée, la sortie

est également bornée, propriété qui est équivalente à l'absolue sommabilité de la réponse impulsionnelle. Il est bien connu que si $C(z, w)$ est un polynôme dont le support des coefficients est inclus dans S_1 , le filtre de fonction de transfert $1/C(z, w)$ est stable ssi $C(z, w) \neq 0$ sur $\bar{D} \times T$ et $\{0\} \times \bar{D}$ ([BOSE], par exemple); par conséquent, si A et B vérifient (1.2.22) et (1.2.23) et si de plus A et B ne s'annulent pas sur la « frontière » $T^2 \cup \{0\} \times T$, le filtre de fonction de transfert Φ est stable et d'inverse stable. \square

Ces résultats qui concernent le problème de la caractérisation de la factorisation à phase minimale ont été énoncés dans le cas où le demi-plan asymétrique définissant le passé est S_1 . Ils peuvent être utilisés pour traiter le cas général grâce à une technique qui est philosophiquement équivalente à un changement d'axe de coordonnées. Un tel procédé a permis de mettre en évidence des critères de stabilité de filtres dont la réponse impulsionnelle admet un support quelconque ([BOSE], par exemple). Tout ce qui va suivre repose sur le Lemme suivant dont la démonstration est donnée en annexe.

Lemme 1.2.6: Soient $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ des entiers tels que $\delta = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$ est strictement positif et tels que (α_1, β_1) [resp. (α_2, β_2)] sont premiers entre eux. Soit E l'application

$$(1.2.24) \quad E \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (k, l) \rightarrow (\beta_2 k - \alpha_2 l, \alpha_1 l - \beta_1 k) \end{array} \right.$$

et les demi-plans asymétriques S et S' définis par

$$(1.2.25) \quad S = \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 / \beta_2 k - \alpha_2 l > 0\} \cup \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 / \beta_2 k - \alpha_2 l = 0, \alpha_1 l - \beta_1 k \geq 0\}$$

$$(1.2.25') \quad S' = \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 / \alpha_1 l - \beta_1 k > 0\} \cup \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 / \alpha_1 l - \beta_1 k = 0, \beta_2 k - \alpha_2 l \geq 0\}.$$

Alors,

$$(1.2.26) \quad E(S) \subset S_1, \quad E(S') \subset S_2, \quad E(S \cap S') \subset \mathbb{N}^2.$$

Soit $h(z, w)$ une fonction définie sur un sous-ensemble A de \mathbb{C}^2 contenant T^2 telle que

$$\int_{J^2} |h(e^{-2inu}, e^{-2inv})| du dv < \infty \text{ et considérons la fonction } h'(z', w') \text{ définie par}$$

$$(1.2.27) \quad h'(z', w') = h(z'^{\beta_2} w'^{-\beta_1}, z'^{-\alpha_2} w'^{\alpha_1}).$$

Alors, le support des coefficients de Fourier de h' est inclus dans $E(\mathbb{Z}^2)$, et de plus, on a

$$(1.2.28) \quad \int_{J^2} h(e^{-2inu}, e^{-2inv}) du dv = \int_{J^2} h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) du' dv'. \quad \square$$

Nous allons à présent utiliser ce résultat pour déduire de ce qui précède la forme de la factorisation à phase minimale relative au problème de la prédiction le long des passés définis par le demi-plan asymétrique S défini par (1.2.25). Tout repose sur le fait qu'une factorisation $\Phi(z, w)$ de f causale au sens de la rela-

tion d'ordre définie par S est à phase minimale ssi la fonction $\Phi'(z', w')$, causale au sens de la relation d'ordre définie par S_1 , définie à partir de Φ par l'intermédiaire de la transformation (1.2.27) est à phase minimale.

Soit $\Phi(z, w) = \sum_{(k, l) \in S} \varphi_{k, l} z^k w^l$ une factorisation causale au sens de la relation d'ordre définie par S de la densité spectrale de y . Désignons par $\Phi'(z', w')$ la fonction définie par la transformation (1.2.27) à partir de Φ i. e.

$$\Phi'(z', w') = \sum_{(k, l) \in S} \varphi_{k, l} (z'^{\beta_2} w'^{-\beta_1})^k (z'^{-\alpha_2} w'^{\alpha_1})^l.$$

Puisque $(\beta_2 k - \alpha_2 l, \alpha_1 l - \beta_1 k)$ appartient à $E(S) \subset S_1$ pour $(k, l) \in S$, Φ' peut se mettre sous la forme

$$\Phi'(z', w') = \sum_{(m, n) \in E(S)} \varphi'_{m, n} z'^m w'^n$$

où $\varphi'_{E(k, l)} = \varphi_{k, l}$ de sorte que Φ' est causale au sens de la relation d'ordre associée à S_1 ; de plus, $\varphi_{0,0} = \varphi'_{0,0}$ et

$$\sum_{(m, n) \in E(S)} |\varphi'_{m, n}|^2 = \sum_{(k, l) \in S} |\varphi_{k, l}|^2 < \infty.$$

Ceci implique que Φ' est définie sur $\bar{D} \times T \cup \{0\} \times \bar{D}$; mais d'après (1.2.27),

$$\Phi'(z^{\alpha_1/\delta} w^{\beta_1/\delta}, z^{\alpha_2/\delta} w^{\beta_2/\delta}) = \Phi(z, w)$$

de sorte que Φ est définie pour $|z^{\alpha_1/\delta} w^{\beta_1/\delta}| \leq 1$ et $|z^{\alpha_2/\delta} w^{\beta_2/\delta}| = 1$ i. e. tous calculs faits pour $|z| \leq 1$ et $|w| = |z|^{-\alpha_2/\beta_2}$. Par ailleurs, d'après la remarque 1.2.2, Φ est la factorisation à phase minimale de f ssi

$$\begin{aligned} \log |\varphi_{0,0}|^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \log f(u, v) du dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \log |\Phi(e^{-2inu}, e^{-2inv})|^2 du dv; \end{aligned}$$

en appliquant (1.2.28) au cas où $h = \log |\Phi|$, on obtient

$$(1.2.29) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \log |\Phi(e^{-2inu}, e^{-2inv})|^2 du dv \\ = \int_{\mathbb{R}^2} \log |\Phi'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'})|^2 du' dv'. \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $\varphi'_{0,0} = \varphi_{0,0}$, ceci implique que Φ est la factorisation à phase minimale de f ssi

$$\log |\varphi'_{0,0}|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \log |\Phi'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'})|^2 du' dv'$$

i. e. ssi Φ' est la factorisation à phase minimale de la densité spectrale

$$\begin{aligned} f'(u', v') &= |\Phi'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'})|^2 \\ &= |\Phi(e^{-2i\pi(\beta_2 u' - \beta_1 v')}, e^{-2i\pi(-\alpha_2 u' + \alpha_1 v')})|^2. \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} f(u, v) &= |\Phi(e^{-2inu}, e^{-2inv})|^2, \\ f'(u', v') &= f(\beta_2 u' - \beta_1 v', \alpha_1 v' - \alpha_2 u') \end{aligned}$$

en convenant de prolonger $f(u, v)$ à \mathbb{R}^2 en posant

$$f(u, v) = f(u - k, v - l)$$

si

$$(u, v) \in [k - 1/2, k + 1/2] \times [l - 1/2, l + 1/2].$$

En conclusion, la factorisation à phase minimale $\Phi(z, w)$ associée au demi-plan asymétrique S s'obtient comme suit.

Théorème 1.2.7: Soit $f'(u', v')$ la densité spectrale définie sur \mathbb{R}^2 par

$$(1.2.30) \quad f'(u', v') = f(\beta_2 u' - \beta_1 v', \alpha_1 v' - \alpha_2 u')$$

où f est étendue à \mathbb{R}^2 en posant

$$f(u, v) = f(u - k, v - l)$$

si

$$(u, v) \in [k - 1/2, k + 1/2] \times [l - 1/2, l + 1/2].$$

Soit $\Phi'(z', w')$ la factorisation causale (au sens de la relation d'ordre associée à S_1) à phase minimale de f' . Alors, la factorisation à phase minimale de f correspondant au problème de la prédiction de y le long des passés définis par le demi-plan asymétrique S est donnée par :

$$(1.2.31) \quad \Phi(z, w) = \Phi'(z^{\alpha_1/\delta} w^{\beta_1/\delta}, z^{\alpha_2/\delta} w^{\beta_2/\delta})$$

et est définie pour $|z| \leq 1$ et $|w| = |z|^{-\alpha_2/\beta_2}$. \square

Si la suite $(b_{k, l})_{(k, l) \in \mathbb{Z}^2}$ des coefficients de Fourier de $\log f$ est absolument sommable, Φ s'obtient en remplaçant S_1 par S dans (1.2.20) i. e.

$$(1.2.32) \quad \Phi(z, w) = \exp\left(\frac{b_{0,0}}{2} + \sum_{(k, l) \in S - \{0,0\}} b_{k, l} z^k w^l\right)$$

qui est l'expression mise en évidence dans [EKS-WOO].

Enfin, le théorème (1.2.7) permet d'adapter la proposition (1.2.4) au cas où le support des coefficients des polynômes A et B est inclus dans S; il suffit de remplacer la condition $v = v^1$ par la condition $v = v^S$ et (1.2.22), (1.2.23) par

$$(1.2.33) \quad \begin{aligned} A(z, w) &\neq 0, \quad \forall z \in D, \quad \forall w \\ \text{tel que } |w| &= |z|^{-\alpha_2/\beta_2} \\ \sum_{(\beta_2 k - \alpha_2 l) = 0} a_{k, l} z^k w^l &\neq 0 \quad \text{pour } |z^{\alpha_2} w^{\beta_2}| \leq 1 \end{aligned}$$

$$(1.2.34) \quad \begin{aligned} B(z, w) &\neq 0, \quad \forall z \in D, \quad \forall w \\ \text{tel que } |w| &= |z|^{-\alpha_2/\beta_2} \\ \sum_{(\beta_2 k - \alpha_2 l) = 0} b_{k, l} z^k w^l &\neq 0 \quad \text{pour } |z^{\alpha_2} w^{\beta_2}| < 1. \end{aligned}$$

De plus, la remarque (1.2.5) est encore valable en ce sens que les conditions qui assurent que le filtre de fonction de transfert $B(z, w)/A(z, w)$ est stable et d'inverse stable sont très proches de (1.2.33) et (1.2.34).

Les résultats qui ont été présentés dans cette section ont montré que la théorie de la prédiction de Wiener-Kolmogorov s'étend sans réelles restrictions au cas 2-D. Nous allons à présent nous intéresser aux modèles paramétriques 2-D et constater que leurs propriétés sont bien différentes de leurs homologues 1-D.

2. Les processus ARMA 2-D

Nous débutons cette étude relative aux modèles paramétriques 2-D par les processus ARMA 2-D. Un tel processus peut être *a priori* défini comme étant la sortie d'un filtre (non causal éventuellement) de fonction de transfert rationnelle $\Phi(z, w) = B(z, w)/A(z, w)$ excité par un bruit blanc v de variance 1. Comme dans le cas 1-D, H et v ne sont pas définis de façon unique et il est nécessaire que l'une de ces représentations soit identifiable à partir de la densité spectrale du processus. Dans le cas 1-D, tout processus ARMA admet une représentation unique dans laquelle le bruit blanc générateur coïncide avec le processus d'innovation normalisé car toute densité spectrale rationnelle 1-D admet comme factorisation à phase minimale une fraction rationnelle. Une telle propriété est inexacte dans le cas 2-D car une densité spectrale du type $|B(e^{-2inu}, e^{-2inv})/A(e^{-2inu}, e^{-2inv})|^2$ n'admet pas en général de factorisation causale à phase minimale rationnelle; ceci est dû au fait que les polynômes à deux indéterminées ne sont pas décomposables en produit de facteurs d'ordre 1 et que par conséquent la procédure d'assignation à l'extérieur du cercle unité des pôles et des zéros ne peut être effectuée. Ces constatations nous amènent à poser la définition (provisoire) suivante.

Définition 2.1 : Soit S_0 un demi-plan asymétrique. On dit que y est un processus ARMA unilatéral pour S_0 si la factorisation causale (au sens de la relation d'ordre associée à S_0) à phase minimale de la densité spectrale $f(u, v)$ de y est le quotient de deux polynômes dont le support des coefficients J est inclus dans S_0 i. e. si y est donné par

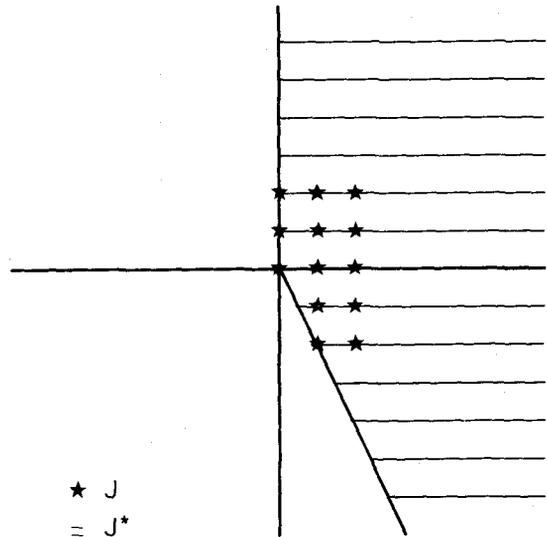
$$(2.1) \quad y_{m,n} + \sum_{(k,l) \in J - \{0,0\}} a_{k,l} y_{m-k,n-l} = \sum_{(k,l) \in J} b_{k,l} v_{m-k,n-l}^{S_0}$$

On dit que y est un processus AR (resp. MA) unilatéral pour S_0 si $b_{k,l} = 0$ pour $(k,l) \in J - \{0,0\}$ [resp. si $a_{k,l} = 0$ pour $(k,l) \in J - \{0,0\}$]. \square

L'intérêt de ce type de modèle réside dans le fait que les polynômes $A(z, w)$ et $B(z, w)$ associés à la représentation (2.1) sont définis de façon unique par le fait que $B(z, w)/A(z, w)$ coïncide avec la factorisation à phase minimale de $f(u, v)$. D'autre part, la relation (2.1) peut être implémentée de façon récursive car J est inclus dans un demi-plan asymétrique

que [en ce sens qu'il existe un mode de progression dans \mathbb{Z}^2 permettant de disposer des $y_{m-k,n-l}$ pour $(k,l) \in J - \{0,0\}$ avant d'avoir à calculer $y_{m,n}$]; les modèles ARMA unilatéraux sont donc adaptés aux traitements récursifs.

La définition (2.1) est en fait inadaptée puisque comme nous allons le voir, le bruit blanc générateur v^{S_0} coïncide avec d'autres innovations v^S associées à un ensemble de demi-plans asymétriques qui ne dépend que de l'ensemble J . Ceci repose sur le résultat suivant qui est une conséquence immédiate de faits bien connus ([BOSE], par exemple).



Proposition 2.2 : Soit y le processus donné par (2.1) et désignons par J^* le plus petit cône de \mathbb{Z}^2 , de base $(0,0)$ contenant tous les points de J (cf. fig. 2); alors, $\Phi(z, w) = B(z, w)/A(z, w)$ se développe sous la forme

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(z, w) &= \sum_{(k,l) \in J^*} \phi_{k,l} z^k w^l, \\ \sum_{(k,l) \in J^*} |\phi_{k,l}|^2 &< \infty. \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, la représentation canonique de y en fonction de v^{S_0} est de la forme

$$(2.3) \quad y_{m,n} = \sum_{(k,l) \in J^*} \phi_{k,l} v_{m-k,n-l}^{S_0} \quad \square$$

Le cône J^* s'écrit de façon unique sous la forme [BOSE]

$$(2.4) \quad J^* = \left\{ x \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} / x \geq 0, y \geq 0 \right\} \cap \mathbb{Z}^2$$

où $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ sont des entiers tels que α_1 et β_1 (resp. α_2 et β_2) sont premiers entre eux et tels que $\delta = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$; bien entendu, les droites d'équations $y = (\beta_1/\alpha_1)x$ et $y = (\beta_2/\alpha_2)x$ sont celles qui délimitent J^* . Dans la suite, nous allons supposer que $\delta > 0$. Soient S et S' les demi-plans asymétriques définis par (1.2.25) et (1.2.25'); alors, il est facile de constater que $J^* = S \cap S'$; donc, Φ est une factorisation

causale de f relativement aux relations d'ordre associées à S et S' simultanément; puisque (2.3) est la représentation canonique de y en fonction de v^{S_0} ,

$$\log |\varphi_{0,0}|^2 = \int_{\mathbb{T}^2} \log f(u, v) du dv; \text{ ceci implique que } \Phi$$

coïncide avec les factorisations à phase minimale Φ^S et $\Phi^{S'}$ associées au problème de la prédiction le long des passés $P^{S, n}$ et $P^{S', n}$ respectivement. Par conséquent, $\Phi = \Phi^S = \Phi^{S'}$ et $v^{S_0} = v^S = v^{S'}$, et de même $\Phi^S = \Phi^{S'} = \Phi^{S''}$ et $v^{S, n} = v^{S', n} = v^{S'', n}$ pour tout demi-plan asymétrique S'' contenant $J^* = S \cap S'$. Cette propriété a des conséquences sur la forme du domaine de définition de Φ et sur la localisation de ses pôles et de ses zéros. Soit E la transformation définie par (1.2.24); alors, $\Phi(z, w)$ peut s'écrire sous la forme

$$(2.5) \quad \Phi(z, w) = \sum_{(m, n) \in E(S \cap S')} \varphi'_{m, n} (z^{\alpha_1/\delta} w^{\beta_1/\delta})^m (z^{\alpha_2/\delta} w^{\beta_2/\delta})^n$$

où les coefficients $\varphi'_{m, n}$ sont définis par $\varphi'_{E(k, l)} = \varphi_{k, l}$ pour $(k, l) \in E(S \cap S')$. Puisque $E(S \cap S') \subset \mathbb{N}^2$, la série entière définissant Φ converge pour $|z^{\alpha_1} w^{\beta_1}| < 1$ et $|z^{\alpha_2} w^{\beta_2}| < 1$; de plus, elle peut être prolongée à l'ensemble $|z^{\alpha_1} w^{\beta_1}| \leq 1$ et $|z^{\alpha_2} w^{\beta_2}| \leq 1$ en remplaçant la convergence ordinaire par une convergence en moyenne quadratique (*i.e.* dans \mathbb{L}^2) de sorte que comme dans la section précédente, nous dirons par abus de langage que Φ est définie sur $|z^{\alpha_1} w^{\beta_1}| \leq 1$ et $|z^{\alpha_2} w^{\beta_2}| \leq 1$. D'autre part, $\Phi = \Phi^S$ implique que A et B vérifient (1.2.33) et (1.2.34) respectivement ou de façon équivalente que les polynômes quart de plan A' et B' définis à partir de A et B par la transformation (1.2.27) vérifient (1.2.22) et (1.2.23). Mais pour des polynômes quart de plan, (1.2.22) et (1.2.23) sont respectivement équivalents aux conditions plus fortes suivantes [BOSE]

$$(2.6) \quad \begin{cases} A'(z', w') \neq 0, & \forall (z', w') \in D^2 \\ A'(0, w') \neq 0, & \forall w' \in T, \end{cases}$$

$$(2.7) \quad B'(z', w') \neq 0, \quad \forall (z', w') \in D^2.$$

Par conséquent, (1.2.33) et (1.2.34) sont respectivement équivalents à

$$(2.8) \quad \begin{aligned} & A(z, w) \neq 0 \\ & \text{pour} \\ & |z^{\alpha_1} w^{\beta_1}| < 1 \quad \text{et} \quad |z^{\alpha_2} w^{\beta_2}| < 1 \\ & \sum_{(\beta_2 k - \alpha_2 l) = 0} a_{k, l} z^k w^l \neq 0 \end{aligned}$$

$$(2.9) \quad \begin{aligned} & \text{pour} \\ & |z^{\alpha_2} w^{\beta_2}| = 1, \\ & B(z, w) \neq 0 \end{aligned}$$

$$(2.9) \quad \text{pour} \quad |z^{\alpha_1} w^{\beta_1}| < 1 \quad \text{et} \quad |z^{\alpha_2} w^{\beta_2}| < 1.$$

On peut résulter tout ce qui précède en remplaçant la définition (2.1) par la définition suivante.

Définition 2.3: On désigne par processus ARMA unilatéral tout processus y donné par une équation du

type

$$(2.10) \quad y_{m, n} + \sum_{(k, l) \in J - \{0, 0\}} a_{k, l} y_{m-k, n-l} = \sum_{(k, l) \in J} b_{k, l} v_{m-k, n-l}$$

où

- v est un bruit blanc de norme 1;
- J est un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^2 contenant $(0, 0)$ et pour lequel le cône J^* est d'ouverture strictement inférieure à π ;

– les polynômes $A(z, w)$ et $B(z, w)$ associés à la représentation (2.10) sont tels que la fonction $(u, v) \rightarrow \{B(e^{-2inu}, e^{-2inv})/A(e^{-2inu}, e^{-2inv})\}^2$ (qui représente la densité spectrale de y) est intégrable et vérifie (2.8) et (2.9) respectivement [ou de façon équivalente (1.2.33) et (1.2.34)], $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ étant définis par (2.4).

Dans ces conditions, si S et S' sont les demi-plans asymétriques tels que $J^* = S \cap S'$, $v_{m, n} = v^S_{m, n} = v^{S'}_{m, n} = v^{S''}_{m, n}$ pour tout demi-plan asymétrique S'' contenant J^* . \square

L'égalité $v^S_{m, n} = v^{S'}_{m, n}$ peut s'interpréter simplement lorsque la densité spectrale de y est strictement positive. Dans ce cas ([ROZ-1], par exemple), la famille $(y_{m, n})_{(m, n) \in \mathbb{Z}^2}$ est une base de l'espace $H(y)$ en ce sens que la décomposition de tout élément z de $H(y)$ sous la forme $z = \sum_{(k, l) \in \mathbb{Z}^2} c_{k, l} y_{m-k, n-l}$ (qui existe par définition) est unique. Or, $v^S_{m, n}$ et $v^{S'}_{m, n}$ se décomposent respectivement sous la forme

$$(2.11) \quad v^S_{m, n} = \sum_{(k, l) \in S} c_{k, l} y_{m-k, n-l}$$

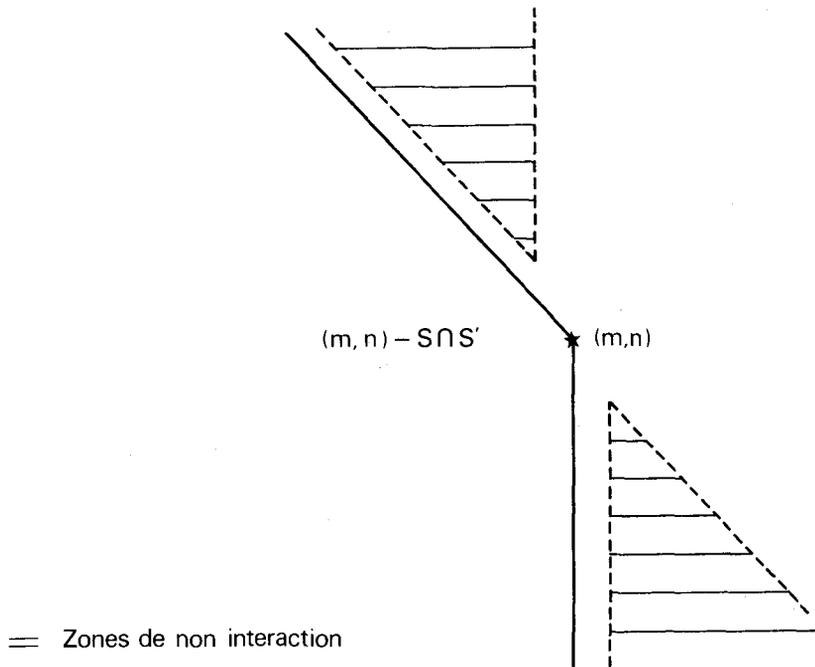
$$(2.12) \quad v^{S'}_{m, n} = \sum_{(k, l) \in S'} c'_{k, l} y_{m-k, n-l}$$

L'égalité $v^S_{m, n} = v^{S'}_{m, n}$ et l'unicité de la décomposition (2.11) et (2.12) impliquent que

$$(2.13) \quad v^S_{m, n} = v^{S'}_{m, n} = \sum_{(k, l) \in S \cap S'} c_{k, l} y_{m-k, n-l}$$

Par conséquent, $y_{m, n}/P^S_{m, n} = y_{m, n}/P^{S'}_{m, n}$ n'est fonction que des $y_{m-k, n-l}$ pour (k, l) appartenant à $S \cap S'$. Ceci peut s'interpréter en disant que les variables $y_{m-k, n-l}$ pour (k, l) appartenant à $(S - S \cap S') \cup (S' - S \cap S')$ n'interagissent pas avec la variable $y_{m, n}$ (*cf.* fig. 3). Bien entendu, cette propriété qui signifie qu'il existe des directions privilégiées va à l'encontre de l'idée que l'on peut se faire d'un champ aléatoire et est inquiétante quant à la capacité de ce type de processus à modéliser un champ aléatoire quelconque. Par ailleurs, le cône J^* est toujours d'ouverture strictement inférieure à π car le modèle est d'ordre fini (*i.e.* J est fini); le défaut structurel des processus ARMA unilatéraux que nous venons de mentionner ne provient donc pas directement de leur caractère causal, mais de l'alliance causalité-modèle d'ordre fini.

Nous allons à présent donner la caractérisation spectrale des processus ARMA unilatéraux. Ainsi que nous allons le voir, ces processus coïncident avec l'ensemble des processus stationnaires 2-D à spectre



rationnel pour lesquels il existe deux demi-plans asymétriques S et S' tels que $v_{m,n}^S = v_{m,n}^{S'}$. Ce résultat est implicitement contenu dans un certain nombre de travaux, mais ne semble pas avoir été énoncé clairement dans toute sa généralité.

Nous allons tout d'abord donner la caractérisation spectrale des processus pour lesquels $v_{m,n}^1 = v_{m,n}^2$ ($S=S_1$ et $S=S_2$); le théorème suivant, présenté dans [KOR-LOU], repose sur un résultat classique de théorie des fonctions holomorphes de deux variables [RUD-2].

Théorème 2.4 [KOR-LOU]: Soit y un processus stationnaire 2-D régulier de densité spectrale $f(u, v)$. Alors, y vérifie $v_{m,n}^1 = v_{m,n}^2$ ssi

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathbb{I}^2} \log f(u, v) e^{2in(ku+lv)} du dv = 0 \\ \text{pour } kl < 0. \end{array} \right.$$

Dans ce cas, la factorisation causale à phase minimale (simultanément au sens des passés définis par S_1 et S_2) est la fonction $\Phi(z, w) = \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2} \varphi_{k,l} z^k w^l$ telle que

$$(2.15) \quad \Phi(z, w) = \exp \left(\frac{b_{0,0}}{2} + \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\}} b_{k,l} z^k w^l \right) \quad \forall (z, w) \in \mathbb{D}^2$$

où $b_{k,l} = \int_{\mathbb{I}^2} \log f(u, v) e^{2in(ku+lv)} du dv$. \square

La caractérisation complète des processus ARMA quart de plan (i.e. J est inclus dans \mathbb{N}^2) est une conséquence du théorème précédent et d'un résultat important dû à Murray qui a établi dans [MUR] que si f est rationnelle, la fonction Φ définie par (2.15) est le quotient de deux polynômes quart de plan; de

plus, il est démontré dans [MUR] que si f est un polynôme (resp. l'inverse d'un polynôme), Φ est un polynôme (resp. l'inverse d'un polynôme) quart de plan. On en déduit le théorème suivant.

Théorème 2.5: Un processus stationnaire 2-D régulier y est un processus ARMA (resp. AR, MA) quart de plan ssi

(i) la densité spectrale f de y est rationnelle (resp. est l'inverse d'un polynôme, un polynôme);

(ii) $\int_{\mathbb{I}^2} \log f(u, v) e^{2in(ku+lv)} du dv = 0$ pour $kl < 0$. \square

Il est important de signaler que ce résultat n'a aucun équivalent dans le cas vectoriel.

Ces deux théorèmes peuvent être étendus au cas de deux demi-plans asymétriques définis par des droites de pente rationnelle en utilisant le changement d'axe (1.2.24).

Théorème 2.6 : Soient S et S' deux demi-plans asymétriques définis par (1.2.25) et (1.2.25') et y un processus stationnaire 2-D régulier. Alors, $v_{m,n}^S = v_{m,n}^{S'}$ ssi

$$(2.16) \quad \int_{\mathbb{I}^2} \log f(u, v) e^{2in(ku+lv)} du dv = 0 \quad \text{pour } (k, l) \in (S - S \cap S') \cup (S' - S \cap S').$$

Dans ce cas, la factorisation causale à phase minimale (simultanément au sens des passés définis par S et S') est la fonction

$$\Phi(z, w) = \sum_{(k,l) \in S \cap S'} \varphi_{k,l} z^k w^l$$

telle que

$$(2.17) \quad \Phi(z, w) = \exp\left(\frac{b_{0,0}}{2} + \sum_{(k,l) \in S \cap S' - \{0,0\}} b_{k,l} w^l\right)$$

pour

$$|z^{\alpha_1} w^{\beta_1}| < 1 \quad \text{et} \quad |z^{\alpha_2} w^{\beta_2}| < 1$$

où les $b_{k,l}$ sont les coefficients de Fourier de $\log f$.

De plus, y est un processus ARMA (resp. AR, MA) unilatéral défini par des polynômes A et B dont le support des coefficients est inclus dans $S \cap S'$ ssi f est rationnelle (resp. est l'inverse d'un polynôme, un polynôme). \square

Les grandes lignes de la démonstration sont données en annexe.

La première conclusion à tirer de ce théorème est que la classe des processus ARMA unilatéraux ne coïncide pas avec celle des processus à spectre rationnel. La seconde conclusion concerne le problème de la modélisation d'un processus régulier quelconque y par un processus ARMA unilatéral; le théorème démontre en effet tout l'intérêt qu'il y a choisir le support J des coefficients du modèle de façon à ce que la propriété (2.16) ait le moins de répercussion possible sur l'erreur de modélisation; à notre connaissance, aucune étude de cette nature n'a été menée en ce sens. Enfin, ce qui précède peut être interprété en disant que modulo la condition (2.16), les techniques de factorisation des densités spectrales rationnelles 1-D s'étendent au cas 2-D.

Nous allons à présent parler brièvement des problèmes liés à la modélisation d'un processus y régulier par un processus AR unilatéral de façon à mettre en évidence une nouvelle différence importante entre les modèles 1-D et 2-D.

Soit y un processus régulier dont la fonction d'auto-corrélation R est supposée connue. On cherche un processus AR unilatéral, dont le support J des coefficients de son polynôme générateur est fixé, « approchant » au mieux y . Nous allons considérer ici le cas où

$$J = \{(0, n) / 0 \leq n \leq N_1\} \cup \{(m, n) / 1 \leq m \leq M, -N_2 \leq n \leq N_1\}$$

(J est alors inclus dans S_1). Pour résoudre ce problème, on peut être tenté de généraliser l'approche du cas 1-D consistant à approximer le processus d'innovation de y par celui du modèle AR cherché. La solution est alors donnée par des équations de type Yule-Walker obtenues en écrivant que

$$(2.18) \quad E[(y_{m,n} + \sum_{(k,l) \in J - \{0,0\}} a_{k,l} y_{m-k, n-l}) y_{m-p, n-q}] = 0$$

pour tout (p, q) appartenant à $J - \{0, 0\}$; ceci équivaut à

$$(2.19) \quad \Gamma a = -\gamma$$

où Γ est la matrice de covariance du vecteur aléatoire

$$Z = (y_{m, n-1}, \dots, y_{m, n-N_1}, y_{m-1, n+N_2}, \dots, y_{m-1, n-N_1}, \dots, y_{m-M, n+N_2}, \dots, y_{m-M, n-N_1})^T,$$

a est le vecteur des coefficients du polynôme associé au modèle AR i.e.

$$a = (a_{0,1}, \dots, a_{0,N_1}, a_{1,-N_2}, \dots, a_{1,N_1}, \dots, a_{M,-N_2}, \dots, a_{M,N_1})^T$$

et γ est le vecteur

$$R(0, 1), \dots, R(0, N_1), R(1, -N_2), \dots, R(1, N_1), R(M, -N_2), \dots, R(M, N_1))^T.$$

Malheureusement, le polynôme

$$A(z, w) = \sum_{(k,l) \in J - \{0,0\}} a_{k,l} z^k w^l$$

associé au vecteur a peut avoir des zéros dans l'ensemble $\bar{D} \times T \cup \{0\} \times \bar{D}$ de sorte que le modèle identifié n'est pas nécessairement un processus AR unilatéral. Ceci est particulièrement grave si celui-ci doit être utilisé dans des applications de type codage ou synthèse dans lesquelles une approximation du processus y de départ est générée en mettant en œuvre le filtre de fonction de transfert $1/A(z, w)$ dont la stabilité n'est pas garantie.

Dans le cas 1-D, la stabilité de l'inverse du filtre prédicteur n'est certaine que si le support de ses coefficients coïncide avec l'ensemble des entiers compris entre 0 et N (N étant l'ordre du modèle) auquel cas le filtre peut être calculé de façon récursive grâce à l'algorithme de Levinson. Dans le cas qui nous intéresse, l'ensemble J fini ne peut coïncider avec l'ensemble des points compris entre (0, 0) et (M_1, N_1) au sens de l'ordre lexicographique colonne par colonne de sorte que la situation est radicalement différente de celle du cas 1-D. Partant de cette remarque, Marzetta [MAR-1, MAR-2] s'est intéressé à la structure des filtres prédicteurs à horizon semi-infini dont le support des coefficients est l'ensemble des points compris (0, 0) et (M, N) au sens de l'ordre lexicographique colonne par colonne; il a en particulier montré que toutes les bonnes propriétés du cas 1-D se généralisent à ces filtres.

Désignons par \preceq la relation d'ordre associée à S_1 et pour tout (M, N) strictement plus grand que (0, 0), soient

$$J(M, N) = \{(k, l) / (0, 1) \preceq (k, l) \preceq (M, N)\}$$

et

$$H_{m,n}(M, N) = sp\{y_{m-k, n-l} / (k, l) \in J(M, N)\}.$$

Posons

$$(2.20) \quad y_{m,n} - y_{m,n} / H_{m,n}(M, N) = y_{m,n} + \sum_{(k,l) \in J(M,N)} a_{k,l} y_{m-k, n-l}$$

$$(2.21) \quad A_{M,N}(z, w) = 1 + \sum_{(k,l) \in J(M,N)} a_{k,l} z^k w^l$$

Alors [MAR-1], moyennant des hypothèses assez peu restrictives sur la densité spectrale de y , le filtre de fonction de transfert $A_{M,N}(z, w)$ est stable et d'inverse stable. De plus, les $A_{M,N}$ vérifient une relation de récurrence du type

$$(2.22) \quad \begin{aligned} A_{M,N}(z, w) &= A_{M,N-1}(z, w) \\ &+ \rho_{M,N} z^M w^N A_{M,N-1}(1/z, 1/w) \\ A_{M,-\infty}(z, w) &= A_{M-1,+\infty}(z, w). \end{aligned}$$

Les $\rho_{M,N}$ sont de valeur absolue inférieure à 1 et jouent un rôle identique à celui des coefficients de réflexion apparaissant dans l'algorithme de Levinson. L'intérêt pratique du travail de Marzetta réside dans le fait que tout filtre RIF généré par les équations (2.22) est d'inverse stable dès que les coefficients $\rho_{M,N}$ sont de valeur absolue inférieure à 1. En pratique, on impose aux $\rho_{M,N}$ d'être nuls pour $|N|$ assez grand et on utilise un algorithme de type Burg pour approximer les $A_{M,N}$ par des polynômes n'ayant aucun zéro dans $\bar{D} \times T \cup \{0\} \times \bar{D}$. Le grand inconvénient de cet algorithme est que le support des coefficients de réflexion utilisés pour calculer le filtre d'ordre (M, N) est très différent de celui des coefficients de ce filtre; par conséquent, un choix optimal des coefficients de réflexion peut conduire à une suite de coefficients très mal adaptée.

3. Les champs markoviens au sens large

Alors que les modèles ARMA 2-D doivent être par nature unilatéraux pour garantir l'identifiabilité des représentations associées, la notion de processus de Markov peut être généralisée de façon très naturelle au cas 2-D en faisant abstraction de toute idée de causalité. Un champ markovien y est en effet caractérisé par le fait que $y_{m,n}$ n'a d'interaction qu'avec un nombre fini de voisins disposés de façon quelconque autour du point (m, n) .

Dans le cadre de cet article, nous ne considérons que les champs markoviens au sens large. Cependant, les modèles non linéaires sont de plus en plus utilisés en restauration et segmentation d'image; ils permettent en particulier d'intégrer les non-stationarités dues aux contours et d'utiliser des critères de restauration du type maximum de vraisemblance *a posteriori*. Le lecteur intéressé pourra se référer à [GEM-GEM], [AZE], [YOU], [CHA], [GUY] pour plus de détails.

Avant de poursuivre, nous allons rappeler un résultat bien connu de théorie de l'interpolation. Soit y un processus stationnaire 2-D dont le spectre est absolument continu; appelons $H_{m,n}^*$ l'espace engendré par les variables aléatoires $y_{k,l}$ autres que $y_{m,n}$ i. e.

$$(3.1) \quad H_{m,n}^* = sp \{y_{k,l} / (k, l) \neq (m, n)\}.$$

On dit que y est minimal si le processus e défini par

$$(3.2) \quad e_{m,n} = y_{m,n} - y_{m,n} / H_{m,n}^*$$

n'est pas identiquement nul. Ces processus sont caractérisés comme suit.

Théorème 3.1 [ROZ-1] : Soit f la densité spectrale de y . Alors, y est minimal ssi

$$(3.3) \quad \int_{I^2} \frac{du dv}{f(u, v)} < \infty.$$

Dans ce cas, la densité spectrale de l'erreur d'interpolation e est égale à $\sigma_e^2 / f(u, v)$ où $\sigma_e^2 = E(e_{m,n}^2)$. \square
Nous sommes à présent en mesure d'introduire les champs markovien au sens large.

Définition 3.2 : Soit L un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^2 ne contenant pas $(0, 0)$. On dit que y est un L -champ markovien au sens large si

$$(3.4) \quad \begin{aligned} e_{m,n} &= y_{m,n} - y_{m,n} / H_{m,n}^* \\ &= y_{m,n} + \sum_{(k,l) \in L} c_{k,l} y_{m-k, n-l} \quad \square \end{aligned}$$

La caractérisation spectrale de processus est particulièrement simple.

Proposition 3.3 [CHAY] : y est un L -champ markovien au sens large ssi la densité spectrale de y est donnée par

$$(3.5) \quad f(u, v) = \frac{\sigma^2}{R(e^{-2inu}, e^{-2inv})}$$

où $R(z, w) = 1 + \sum_{(k,l) \in L} c_{k,l} z^k w^l$ est tel que $R(e^{-2inu}, e^{-2inv}) > 0, \forall (u, v) \in I^2$.

Dans ce cas, l'erreur d'interpolation $e_{m,n}$ est donné par

$$(3.6) \quad e_{m,n} = y_{m,n} + \sum_{(k,l) \in L} c_{k,l} y_{m-k, n-l}$$

et sa densité spectrale $f_e(u, v)$ vaut

$$(3.7) \quad f_e(u, v) = \sigma^2 (1 + \sum_{(k,l) \in L} c_{k,l} e^{-2in(ku+lv)}). \quad \square$$

Dans le cas 1-D, ces processus coïncident avec les processus autorégressifs car il est toujours possible de trouver un polynôme $A(z)$ ayant tous ses zéros à l'extérieur du cercle unité vérifiant $R(e^{-2inu}) = |A(e^{-2inu})|^2$ [où R est défini de façon analogue à (3.5)]. Dans le cas 2-D, y ne coïncide avec un processus AR unilatéral que si les coefficients de Fourier de $\log R(e^{-2inu}, e^{-2inv})$ sont nuls dans un cône de base $(0, 0)$. Les modèles markoviens sont donc plus généraux que les modèles autorégressifs unilatéraux et on peut raisonnablement penser que le nombre de coefficients d'un champ markovien destiné à approximer un processus quelconque sera bien inférieur à celui d'un modèle AR unilatéral à erreur d'estimation identique.

Les champs markoviens jouent un rôle important en estimation spectrale 2-D au sens du maximum d'entropie. Rappelons que ce problème peut être formulé comme suit : étant donnée une suite $R(m, n)$ censée représenter les estimées des valeurs de la fonction d'autocorrélation d'un champ aléatoire stationnaire et définie sur un sous-ensemble Δ fini de \mathbb{Z}^2 symétrique par rapport à $(0, 0)$ [et contenant $(0, 0)$], on cherche à déterminer lorsqu'elle existe une fonction

$\hat{f}(u, v) > 0$ maximisant $\int_{I^2} \log \hat{f}(u, v) du dv$ sous les contraintes

$$(3.8) \quad R(m, n) = \int_{I^2} \hat{f}(u, v) e^{2in(mu+nv)} du dv$$

$\forall (m, n) \in \Delta.$

En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, il est clair que si une telle fonction existe, elle est du type

$$(3.9) \quad \hat{f}(u, v) = \frac{\sigma^2}{(1 + \sum_{(k,l) \in \Delta - \{0,0\}} c_{k,l} e^{-2in(ku+lv)})}$$

de sorte que si l'estimateur du maximum d'entropie existe, il coïncide avec le spectre d'un L champ markovien où $L = \Delta - \{0, 0\}$. Nous ne rappelons pas ici les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de cet estimateur ni la manière dont on peut le calculer. Nous renvoyons à [MCL] qui est une excellente synthèse des problèmes spécifiques posés par l'estimation spectrale multidimensionnelle.

4. Les modèles à représentation d'état

Dans les problèmes d'estimation récursive 1-D, les représentations internes des processus sont fréquemment utilisées pour mettre en œuvre les techniques dérivées du filtre de Kalman. Bien que les procédés de filtrage récursif ne soient pas structurellement nécessaires en traitement spatial, ils présentent de l'intérêt car ils permettent de résoudre des problèmes de mise en œuvre dus le plus souvent à un trop grand encombrement mémoire. C'est donc tout naturellement que l'on s'est penché avec attention sur le problème de la représentation d'un processus stationnaire 2-D par un modèle d'état récurrent à deux indices [ATT-1 et ATT-2, CLA, LAS-SIL]. Avant d'aborder cette question, il est nécessaire de considérer le problème de la représentation interne des filtres récursifs 2-D.

4.1. THÉORIE DE LA RÉALISATION DÉTERMINISTE

Considérons le filtre récursif défini par l'équation aux différences

$$(4.1.1) \quad y_{m,n} = - \sum_{(k,l) \in J - \{0,0\}} a_{k,l} y_{m-k,n-l} + \sum_{(k,l) \in J} b_{k,l} u_{m-k,n-l}$$

où J est un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^2 , contenant $(0, 0)$ et pour lequel le cône J^* (cf. proposition 2.2) a une ouverture strictement inférieure à π ; rappelons que le support de la réponse impulsionnelle $(\varphi_{k,l})$ du filtre défini par (4.1.1) est précisément J^* . Compte tenu du lemme 1.2.6, on peut se contenter d'étudier le cas où $J \subset \mathbb{N}^2$ (filtre quart de plan). De plus, par raison de simplicité, nous n'allons considérer que les filtres quart de plan strictement causaux i.e. ceux pour lesquels $\varphi_{0,l} = 0, \forall l \geq 0$ et $\varphi_{k,0} = 0, \forall k \geq 0$.

L'apport d'Attasi à la théorie de la réalisation des filtres 2-D est essentiel. Son approche consiste à généraliser au cas 2-D la construction algébrique de l'état basé sur la factorisation de l'opérateur de Hankel. Cet opérateur peut être défini de deux façons différentes, dans le domaine spatial ou dans le domaine des transformées en (z, w) ; c'est cette dernière définition que nous allons adopter.

Introduisons tout d'abord quelques notations. On désigne par \mathcal{S} l'ensemble des séries formelles à deux indéterminées à coefficients réels i.e. l'ensemble des séries du type $\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} u_{m,n} z^m w^n$ où $u_{m,n} \in \mathbb{R}$,

$\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Le sous-espace de \mathcal{S} constitué des éléments du type $\sum_{m \leq 0, n \leq 0} u_{m,n} z^m w^n$ (resp.

$\sum_{m \geq 0, n \geq 0} u_{m,n} z^m w^n$) sera noté \mathcal{S}^+ (resp. \mathcal{S}^-); on désigne par z (resp. w) l'opérateur de multiplication par z (resp. w). Enfin, l'opérateur de « projection » sur $zw \mathcal{S}^-$ qui à $u(z, w) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} u_{m,n} z^m w^n$ fait correspondre $\sum_{m \geq 1, n \geq 1} u_{m,n} z^m w^n$ sera noté $E^{zw} \mathcal{S}^-$.

\mathcal{S}^+ dans $zw \mathcal{S}^-$ défini par

Définition 4.1.1 : Considérons un filtre quart de plan strictement causal de fonction de transfert $\Phi(z, w) = \sum_{m \geq 1, n \geq 1} \varphi_{m,n} z^m w^n$. Alors, l'opérateur de \mathcal{S}^+ dans $zw \mathcal{S}^-$ défini par

$$(4.1.2) \quad \mathcal{H} \begin{cases} \mathcal{S}^+ \rightarrow zw \mathcal{S}^- \\ u(z, w) \rightarrow E^{zw} \mathcal{S}^- ((\Phi u)(z, w)) \end{cases}$$

est appelé opérateur de Hankel associé au filtre. \square

Bien entendu, cet opérateur peut également être interprété dans le domaine spatial comme l'application qui à une suite $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ fait correspondre la suite $(y_{m,n})_{m \geq 1, n \geq 1}$ constituée par les échantillons de sortie du filtre excité par u pour $m \geq 1$ et $n \geq 1$.

Toute la théorie classique de la réalisation peut être généralisée pour l'ensemble des filtres dont l'opérateur de Hankel est de rang fini; malheureusement, ces filtres constituent une classe assez restreinte puisqu'ils coïncident avec ceux dont la fonction de transfert est rationnelle à dénominateur séparable. Plus précisément, on a le résultat suivant dont une partie de la démonstration est donnée en annexe.

Théorème 4.1.2 [ATT-1 et ATT-2] : Soit

$$\Phi(z, w) = \sum_{m \geq 1, n \geq 1} \Phi_{m,n} z^m w^n$$

la fonction de transfert d'un filtre quart de plan strictement causal. Alors, l'opérateur de Hankel \mathcal{H} qui lui est associé est de rang fini si l'une des deux conditions équivalentes suivante est réalisée.

$$(4.1.3) \quad \Phi(z, w) = \frac{zw B(z, w)}{A_1(z) A_2(w)}$$

où B est un polynôme quart de plan et où A_1 et A_2 sont des polynômes à une indéterminée.

(ii) Il existe un quadruplet de matrices (H, F_1, F_2, L) ,

appelé réalisation de la réponse impulsionnelle du filtre, qui vérifient $F_1 F_2 = F_2 F_1$ et

$$(4.1.4) \quad \varphi_{k,l} = H F_1^{k-1} F_2^{l-1} G, \quad \forall k \geq 1 \text{ et } l \geq 1$$

ce qui équivaut à l'existence d'une représentation interne du filtre sous la forme

$$(4.1.5) \quad \begin{aligned} X_{m+1, n+1} &= F_1 X_{m, n+1} \\ &+ F_2 X_{m+1, n} - F_1 F_2 X_{m, n} + G u_{m, n} \\ y_{m, n} &= H X_{m, n} \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\text{rang } \mathcal{H} = p$ est la dimension minimale des réalisations; de plus, toutes les réalisations de dimension minimale sont algébriquement équivalentes et sont caractérisées par le fait que (H, F_1, F_2) est observable i.e. la matrice \mathcal{O} définie par

$$(4.1.6) \quad \mathcal{O} = (H^T, (HF_1)^T, (HF_2)^T, (HF_1 F_2)^T, \dots, (HF_1^M F_2^N)^T, \dots)^T$$

est de rang plein, et que (F_1, F_2, G) est commandable i.e. la matrice \mathcal{C} définie par

$$(4.1.7) \quad \mathcal{C} = (G, F_1 G, F_2 G, F_1 F_2 G, \dots, F_1^M F_2^N G, \dots)$$

est de rang plein. \square

Les filtres dont la fonction de transfert Φ admet un dénominateur séparable peuvent être également représentés par l'intermédiaire de deux variables d'état X^h et X^v se propageant horizontalement et verticalement respectivement et dont les dimensions minimales sont les degrés de Φ par rapport à z et à w respectivement [HIN]. Les équations d'état sont du type

$$(4.1.8) \quad \begin{aligned} X_{m+1, n}^h &= A_1 X_{m, n}^h + A_2 X_{m, n}^v \\ X_{m, n+1}^v &= A_4 X_{m, n}^v + B u_{m, n} \\ Y_{m, n} &= C X_{m, n}^h \end{aligned}$$

Un tel modèle, qualifié de modèle de Roesser séparable, donne lieu à une factorisation de la fonction de transfert Φ sous la forme

$$(4.1.9) \quad \Phi(z, w) = zw C (I - z A_1)^{-1} A_2 (I - w A_4)^{-1} B.$$

La théorie de la réalisation par les modèles de Roesser séparable a été développée dans [HIN]; nous allons uniquement mettre en évidence une réalisation de $\Phi(z, w) = zw B(z, w) / A_1(z) A_2(w)$ sous la forme (4.1.9) pour montrer l'équivalence entre le modèle d'Attasi et le modèle de Roesser séparable.

Reprenons les notations du théorème précédent et supposons pour simplifier que $M' = M$ et $N' = N$. Alors, il est immédiat de constater que les matrices (C, A_1, A_2, A_4, B) suivantes constituent une réalisation de Φ sous la forme (4.1.9) :

$$C = (1, 0, \dots, 0)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,M} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & \dots & b_{0,N-1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & \dots & b_{1,N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{M-1,0} & b_{M-1,N-1} & \dots & b_{1,N-1} \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -a_{2,1} & -a_{2,2} & \dots & -a_{2,N} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous ne parlons pas ici des algorithmes de réalisation. Pour le modèle d'Attasi, ils reposent sur une factorisation minimale de la matrice associée à l'opérateur de Hankel tronquée à un ordre suffisant; pour le modèle de Roesser séparable, ils sont équivalents à deux algorithmes de réalisation de systèmes 1-D convenablement choisis; nous renvoyons à [ATT-2] et [HIN] pour plus de précisions.

Dans le cas des fonctions de transfert générales, la théorie de la réalisation 1-D ne peut être étendue. Néanmoins, on peut représenter un filtre quart de plan strictement causal par l'intermédiaire d'une ou plusieurs variables de dimension finie vérifiant une équation du premier ordre. Divers modèles d'état ont été envisagés, le plus populaire étant celui proposé par Roesser; ce modèle se déduit du modèle de Roesser séparable en introduisant X^h dans l'équation d'état de X^v . Malheureusement, on ne sait pas caractériser la dimension des réalisations minimales et aucun algorithme de réalisation ne peut être mis en évidence faute d'avoir une définition algébrique précise de X^v et X^h .

Pour terminer ce paragraphe, nous indiquons comment adapter les résultats précédents au cas de filtres récursifs non nécessairement quart de plan. Considérons un filtre récursif de fonction de transfert $\Phi(z, w)$ pour lequel le cône J^* associé au support J des coefficients est donné par (2.4) mais où on suppose de plus que $\delta = 1$; cette restriction est due au fait que pour notre propos, l'application E définie lemme 1.2.7 doit être une bijection. Comme précédemment, le filtre est supposé strictement causal en ce sens que sa réponse impulsionnelle $(\varphi_{k,l})$ est nulle sur la frontière de J^* . L'opérateur de Hankel \mathcal{H} est l'opérateur qui a une série formelle $u(z, w)$ de la forme

$$u(z, w) = \sum_{(m, n) \in -J^*} u_{m, n} z^m w^n$$

fait correspondre la série formelle $E^{\mathcal{S}_{J^*}}((\Phi u)(z, w))$ où \mathcal{S}_{J^*} désigne l'ensemble des séries formelles dont les coefficients admettent l'intérieur strict de J^* comme support et où $E^{\mathcal{S}_{J^*}}$ désigne la projection sur \mathcal{S}_{J^*} . En utilisant la transformation E du lemme 1.2.6, on peut montrer que l'opérateur de Hankel \mathcal{H} est de rang fini si

$$(4.1.10) \quad \Phi(z, w) = \frac{z^{\alpha_1 + \alpha_2} w^{\beta_1 + \beta_2} B(z, w)}{A_1(z^{\alpha_1} w^{\beta_1}) A_2(z^{\alpha_2} w^{\beta_2})}$$

où B est un polynôme dont les coefficients admettent J pour support et où A_1 et A_2 sont des polynômes

causaux à une indéterminée. Dans ce cas, le filtre se représente sous la forme

$$(4.1.11) \quad \begin{aligned} X_{m+\alpha_1+\alpha_2, n+\beta_1+\beta_2} &= F_1 X_{m+\alpha_2, n+\beta_2} \\ &+ F_2 X_{m+\alpha_1, n+\beta_1} - F_1 F_2 X_{m, n} + G u_{m, n} \\ y_{m, n} &= H X_{m, n} \end{aligned}$$

où F_1 et F_2 sont deux matrices qui commutent, ou sous la forme

$$(4.1.12) \quad \begin{aligned} X_{m+\alpha_1, n+\beta_1}^h &= A_1 X_{m, n}^h + A_2 X_{m, n}^v \\ X_{m+\alpha_2, n+\beta_2}^v &= A_4 X_{m, n}^v + B u_{m, n} \\ y_{m, n} &= C X_{m, n}^h \end{aligned}$$

4.2. LE PROBLÈME DE LA RÉALISATION STOCHASTIQUE

Les résultats présentés dans le paragraphe précédent suggèrent d'étudier le problème de la représentation d'un processus stationnaire sur $\mathbb{Z}^2 y$ par un modèle d'état du type (4.1.16) ou (4.1.17), obtenu en remplaçant l'entrée déterministe par un bruit blanc éventuellement vectoriel; comme dans le cas déterministe, aucune théorie générale de la réalisation stochastique ne peut être développée pour des modèles d'état plus généraux. Nous n'allons considérer que le cas où l'équation d'état est de type quart de plan afin de simplifier les notations. De plus, il existe une correspondance simple entre les modèles d'Attasi et les modèles de Roesser séparables représentant y [LOU]; nous ne traiterons donc ici que du problème de la réalisation par un modèle d'Attasi. Nous allons commencer par décrire les propriétés structurelles des modèles d'Attasi; puis, nous présentons et commentons en détail l'algorithme de réalisation proposé par Attasi qui ne fonctionne en fait que dans le cas où il existe une réalisation stochastique minimale unique; enfin, nous montrons que cette situation est exceptionnelle et que dans les cas usuels, le problème de la réalisation par un modèle d'Attasi pose des problèmes non résolus dus principalement à la perte de la notion de filtre de Kalman.

Dans cette section, nous allons être amené à introduire des processus à deux indices à valeurs vectorielles; bien entendu, toutes les notations et les définitions que nous avons introduites dans le cas des processus scalaires s'étendent sans problème et nous les utiliserons sans plus de précisions.

Nous allons commencer par décrire les propriétés des processus qui vérifient l'équation d'état d'Attasi; la proposition suivante est un des résultats de [KOR].

Proposition 4.2.1 [KOR] : Soit $(X_{m, n})_{m, n \in \mathbb{Z}^2}$ un processus stationnaire vectoriel 2-D. Alors, les deux conditions sont équivalentes.

(i) X se représente sous la forme

$$(4.2.1) \quad \begin{aligned} X_{m+1, n+1} &= F_1 X_{m, n+1} + F_2 X_{m+1, n} \\ &- F_1 F_2 X_{m, n} + L v_{m, n} \end{aligned}$$

où F_1 et F_2 sont deux matrices asymptotiquement stables qui commutent et où v est un bruit blanc éventuellement vectoriel dont la matrice de covariance est égale à l'identité.

(ii) Le processus X est tel que

$$(4.2.2) \quad X_{m+1, n} / H_m^h(X) = F_1 X_{m, n}$$

$$(4.2.2') \quad X_{m, n+1} / H_n^v(X) = F_2 X_{m, n}$$

où F_1 et F_2 sont deux matrices asymptotiquement stables. Dans ce cas, les matrices F_1 et F_2 définies par (4.2.2) et (4.2.2') commutent et coïncident avec celles de la représentation (4.2.1). \square

Cette proposition est partiellement démontrée en annexe.

Il est intéressant de constater que le processus d'innovation horizontal

$$W_{m, n}^h = X_{m, n} - X_{m, n} / H_{m-1}^h(X) = X_{m, n} - F_1 X_{m-1, n}$$

est égal à $F_2(X_{m, n-1} - F_1 X_{m-1, n-1}) + L v_{m-1, n-1}$ i. e. à $F_2 W_{m, n-1}^h + L v_{m-1, n-1}$; pour m fixé, le processus à un indice $(W_{m, n}^h)_{n \in \mathbb{Z}}$ est donc markovien de matrice de transition F_2 et d'innovation $L v_{m-1, n-1}$. Bien entendu, le processus d'innovation vertical $W_{m, n}^v$ vérifie le même type de propriété.

Interprétons à présent (4.2.2) et (4.2.2') en terme de propriété markovienne. (4.2.2) implique que la projection de $X_{m+1, n}$ sur $H_m^h(X)$ appartient à l'espace engendré par les variables aléatoires situées sur la colonne d'abscisse m ; autrement dit, le processus 1-D de dimension infinie dont la valeur à « l'instant » m est le vecteur de composantes $(X_{m, n})_{n \in \mathbb{Z}}$ est markovien. Par dualité, ceci implique que la projection de $X_{m-1, n}$ sur l'espace $H_m^h(X)$ engendré par les variables d'ordonnée supérieure à m appartient à l'espace engendré par les $(X_{m, n})_{n \in \mathbb{Z}}$; cependant, on ne peut affirmer dans le cas général que cette projection se réduit à $X_{m-1, n} / X_{m, n}$; par conséquent, la propriété (4.2.2) [et de façon analogue (4.2.2')] dépend de l'orientation des axes. A noter que (4.2.2) et (4.2.2') restent valables après retournement des axes ssi les matrices $P^{-1} F_2 P$ et F_1^T commutent où $P = E(X_{m, n} X_{m, n}^T)$ [LOU]. Enfin, il convient de signaler que les modèles d'Attasi sont des champs markoviens au sens où nous les avons définis précédemment puisqu'il est aisé de constater que $X_{m, n}$ n'a d'interaction qu'avec ses huit plus proches voisins; bien entendu, les coefficients qui régissent cette dépendance sont spécifiques (dans le cas scalaire, $c_{1,1} = c_{1,0} c_{0,1}$, $c_{-1,1} = c_{-1,0} c_{0,1}$, $c_{1,-1} = c_{1,0} c_{0,-1}$, $c_{-1,-1} = c_{-1,0} c_{0,-1}$).

Nous aurons également besoin de l'expression explicite de la fonction d'autocorrélation d'un modèle d'Attasi.

Proposition 4.2.2 [ATT-2] : Soit X un processus vectoriel vérifiant (4.2.1). Alors, la fonction d'autocorrélation $R_X(m, n) = E(X_{m, n} X_{0,0}^T)$ est donnée par

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} R_X(m, n) &= F_1^m F_2^n P \\ R_X(m, -n) &= F_1^m P (F_2^n)^T \\ \forall (m, n) &\in \mathbb{N}^2 \end{aligned}$$

où $P = E(X_{m, n} X_{m, n}^T)$. De plus, la matrice de covariance P vérifie l'équation de Liapunov

$$(4.2.4) \quad \begin{aligned} P - F_1 P F_1^T - F_2 P F_2^T \\ + F_1 F_2 P F_1^T F_2^T = LL^T. \quad \square \end{aligned}$$

La démonstration est élémentaire.

Considérons à présent y un processus stationnaire 2-D supposé scalaire et de densité spectrale f . Dans l'optique d'une généralisation de l'approche de Faurre [F-C-G], le problème de la représentation de y par l'intermédiaire d'un modèle d'Attasi peut être posé comme suit [ATT-2].

Étant donné la fonction d'autocorrélation $R(m, n)$ de y , on cherche (si existence) un quadruplet de matrices (H, F_1, F_2, L) de dimension minimal tel que

(i) F_1 et F_2 sont deux matrices asymptotiquement stables qui commutent;

(ii) (H, F_1, F_2) est observable et (F_1, F_2, L) est commandable;

(iii) il existe une représentation de y sous la forme

$$(4.2.5) \quad \begin{aligned} X_{m+1, n+1} &= F_1 X_{m, n+1} + F_2 X_{m+1, n} \\ &\quad - F_1 F_2 X_{m, n} + L v_{m, n} \\ y_{m, n} &= H X_{m, n} \end{aligned}$$

où v est un bruit blanc éventuellement vectoriel de matrice de covariance égale à l'identité.

Mettons tout d'abord en évidence les conditions d'existence d'une telle représentation; il est clair que l'existence d'une représentation (4.2.5) équivaut à l'existence d'un vecteur ligne $\Phi(z, w)$ (dont la dimension est égale à celle de v) tel que

$$(4.2.6) \quad \Phi(z, w) = zwH(I - zF_1)^{-1}(I - wF_2)^{-1}L$$

$$(4.2.7) \quad f(u, v) = (\Phi\Phi^*)(e^{-2inu}, e^{-2inv}).$$

Il est facile de voir que ceci implique que f est rationnelle et à dénominateur séparable et que

$$(4.2.8) \quad f(u, v) = \frac{T(e^{-2inu}, e^{-2inv})}{S_1(e^{-2inu})S_2(e^{-2inv})}$$

où T, S_1, S_2 sont des polynômes positifs sur T^2 . Réciproquement, si f est de la forme (4.2.8), f se factorise sous la forme (4.2.7) ssi il existe un vecteur ligne $\Psi(z, w)$ dont les composantes sont des polynômes quart de plan tel que

$$(4.2.9) \quad T(e^{-2inu}, e^{-2inv}) = (\Psi\Psi^*)(e^{-2inu}, e^{-2inv}).$$

Il est malheureusement impossible de caractériser les polynômes T satisfaisant cette condition de sorte que la classe des processus représentables par un modèle d'Attasi ne peut être identifiée grâce à des critères simples. On peut néanmoins établir facilement que les processus qui sont superposition de processus ARMA quart de plan à dénominateur séparable non corrélés sont représentables par un modèle d'Attasi. Plus précisément, on a le résultat suivant

Proposition 4.2.3 : Si y est la somme de p processus ARMA quart de plan à dénominateur séparable non corrélés, y est représentable par un modèle d'Attasi dont le bruit blanc générateur est de dimension p . □

Il est important de remarquer que les processus considérés dans cette proposition ne sont pas des processus ARMA de sorte que le modèle d'Attasi est le seul à pouvoir les représenter. D'autre part, la dimension minimale du bruit blanc générateur est en général

égale au nombre de composantes non corrélées de y ; représenter un processus de ce type par un modèle d'Attasi permet donc de séparer ses composantes non corrélées. Une telle propriété devrait pouvoir être exploitée dans nombre d'applications.

Nous allons à présent présenter et commenter l'algorithme de réalisation mis en évidence par Attasi. Comme dans le cas 1-D, il se décompose en deux phases. Dans la première, la suite $(R(m, n))_{m, n \in \mathbb{N}^2}$ est réalisée de façon déterministe, puis dans la seconde, la matrice de covariance P de l'état est calculée. Dans le cas 1-D, il est bien connu qu'il existe une infinité de réalisations stochastiques minimales, ceci étant dû au fait qu'il existe une infinité de factorisations spectrales de degré minimal. L'algorithme de Faurre [F-C-G], intimement lié au filtre de Kalman, permet de caractériser une réalisation stochastique minimale particulière. Dans le problème qui nous intéresse, les réalisations stochastiques minimales sont en correspondance biunivoque avec les factorisations spectrales de degré minimal qui se mettent sous la forme (4.2.6); compte tenu des difficultés liées au problème de la factorisation par des polynômes à deux indéterminées, l'ensemble de ces factorisations est totalement dénué de structure générale; il peut être réduit à un élément unique, auquel cas il n'existe qu'une seule réalisation stochastique minimale, mais il peut aussi contenir une infinité d'éléments; dans ce cas, il existe une infinité de réalisations stochastiques minimales et on ne dispose d'aucun algorithme pour caractériser l'une d'entre elles.

L'algorithme d'Attasi ne fonctionne que dans le cas où il n'existe qu'une seule réalisation stochastique minimale; il repose sur le résultat suivant qui est un corollaire immédiat de la proposition 4.2.2.

Proposition 4.2.4 [ATT-1] : Le processus y est réalisable par un modèle d'Attasi ssi il existe (H, F_1, F_2) et une matrice positive P telles que

(i) F_1 et F_2 sont deux matrices asymptotiquement stables qui commutent;

(ii) (H, F_1, F_2) est observable;

(iii) $P - F_1 P F_1^T - F_2 P F_2^T + F_1 F_2 P F_1^T F_2^T = Q \geq 0$

$$(4.2.10) \quad \begin{cases} R(m, n) = H F_1^m F_2^n P H^T \\ \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$$

$$(4.2.11) \quad \begin{cases} R(m, n) = H F_1^m P (F_2^n)^T H^T \\ \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$$

Dans ce cas, y se représente sous la forme (4.2.5) où L est une racine carrée de dimension minimale de Q et où v est un bruit blanc dont la dimension coïncide avec le rang de Q . □

Soit y un processus réalisable par un modèle d'Attasi. (4.2.10) implique que $(R(m, n))_{m, n \in \mathbb{N}^2}$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre représentable par un modèle d'Attasi (déterministe). La première phase de l'algorithme de réalisation stochastique consiste à réaliser la suite $(R(m, n))_{m, n \in \mathbb{N}^2}$ i.e. à trouver un quadruplet (H, F_1, F_2, G) tel que $F_1 F_2 = F_2 F_1$, (H, F_1, F_2) observable, (F_1, F_2, G) commandable et $R(m, n) = H F_1^m F_2^n G$. Si l'on suppose que la dimension

minimale des réalisations déterministes de $(R(m, n))_{m, n \in \mathbb{N}^2}$ coïncide avec celle des réalisations stochastiques minimales de y , cette première étape permet de calculer (H, F_1, F_2) dans une base particulière. Notons que les restrictions induites par l'hypothèse qui vient d'être formulée n'ont pas encore été bien comprises.

Supposons à présent que les valeurs propres de F_1 et F_2 sont toutes d'ordre de multiplicité 1; puisque F_1 et F_2 commutent, F_2 est une fonction polynômiale de F_1 et réciproquement; dans ce cas, la condition (H, F_1, F_2) observable implique que les paires (H, F_1) et (H, F_2) sont observables; par conséquent, l'équation $R(m, -n) = HF_1^m P(F_2^n)^T H^T, \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$ admet une solution unique P_0 ; il existe donc une réalisation stochastique minimale unique et la représentation (4.2.5) de y peut être aisément déduite de la connaissance de P_0 .

Il faut cependant être conscient des limites imposées par l'hypothèse que F_1 et F_2 ont toutes leurs valeurs propres simples. Supposons pour simplifier l'analyse qui va suivre que la matrice de covariance Q_0 définie à partir de P_0 par (iii) soit de rang 1. Le bruit blanc v générant l'état X est alors scalaire de même que la factorisation

$\Phi(z, w) = zw H(I - zF_1)^{-1}(I - wF_2)^{-1} L_0$ où L_0 est un vecteur tel que $Q_0 = L_0 L_0^T$. A priori, on sait que $\Phi(z, w)$ s'écrit sous la forme $zw B(z, w)/A_1(z)A_2(w)$ où B est un polynôme quart de plan. Soit N la dimension de l'état; appelons $(a_{k,1})_{k=1, N}$ et $(a_{k,2})_{k=1, N}$ les valeurs propres (que nous supposons non nulles) de F_1 et F_2 ; alors, il existe $(\alpha_k)_{k=1, N}$ tels que

$$(4.2.12) \quad \Phi(z, w) = zw \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{(1 - za_{k,1})(1 - wa_{k,2})}$$

donc,
$$A_1(z) = \prod_{k=1}^N (1 - za_{k,1}) \quad \text{et}$$

$$A_2(w) = \prod_{k=1}^N (1 - wa_{k,2});$$
 par conséquent, la décomposition en élément simples de Φ apparaît comme extrêmement dégénérée dans la mesure où les termes du type $1/(1 - za_{k,1})(1 - wa_{l,2})$ pour $k \neq l$ n'y apparaissent pas; on conçoit donc que l'existence de telles factorisations impose de très sérieuses restrictions sur y ; en particulier, les densités spectrales séparables n'admettent pas de factorisation de ce type. En conclusion, le cas où il n'existe qu'une seule réalisation stochastique est exceptionnel de sorte que l'algorithme d'Attasi doit être utilisé avec prudence. Lorsqu'il existe plusieurs réalisations stochastiques minimales, il ne semble malheureusement pas possible de mettre en évidence d'algorithme permettant de caractériser l'une d'entre elles ainsi que nous allons le voir. Dans le cas 1-D, la difficulté liée à la non-unicité des réalisations minimales est levée en identifiant grâce à l'algorithme de Faurre celle qui est associée à la factorisation à phase minimale de la densité spectrale *i. e.* celle dont l'espace d'état est le filtre de Kalman [F-C-G, RUC]. Rappelons brièvement ce résultat essentiel qui sous la forme suivante est dû à Ruckebusch.

Proposition 4.2.5 [RUC]: Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire à spectre rationnel de fonction d'autocorrélation R et considérons une réalisation stochastique minimale de y donnée par l'équation

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= FX_n + L v_n \\ y_n &= HX_n \end{aligned}$$

Alors, si $H_n(y)$ désigne l'espace engendré par les variables y_k pour $k \leq n$, le processus $\hat{X}_n = X_n/H_n(y)$ est une réalisation minimale de y . La représentation correspondante s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+1} &= F\hat{X}_n + K \hat{v}_n \\ y_n &= H\hat{X}_n \end{aligned}$$

où le bruit blanc \hat{v}_n coïncide avec l'innovation normalisée de y à l'instant $n+1$; de plus, la matrice de covariance \hat{P} est limite de la suite croissante de matrices positives P_n définie par

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= FP_n F^T + (G - FP_n F^T H^T) \\ &\quad \times (R(0) - HFP_n F^T H^T)^{-1} (G - FP_n F^T H^T)^T \end{aligned}$$

où G est définie par le fait que (H, F, G) est une réalisation minimale de la suite $(R(n))_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Envisageons à présent le cas 2-D. Soit y un processus stationnaire 2-D représentable par un modèle d'Attasi X de dimension minimale sous la forme

$$\begin{aligned} X_{m+1, n+1} &= F_1 X_{m, n+1} + F_2 X_{m+1, n} \\ &\quad - F_1 F_2 X_{m, n} + L v_{m, n} \\ y_{m, n} &= HX_{m, n} \end{aligned}$$

Alors, aucun analogue 2-D du filtre de Kalman n'existe dans le cas général; pour illustrer notre propos, supposons que $\hat{X}_{m, n} = X_{m, n}/H_{m, n}^1(y)$ soit une réalisation stochastique de y ; dans ces conditions, on peut montrer [LOU] que y se représente sous la forme

$$\begin{aligned} \hat{X}_{m+1, n+1} &= \hat{F}_1 \hat{X}_{m, n+1} + \hat{F}_2 \hat{X}_{m+1, n} \\ &\quad - \hat{F}_1 \hat{F}_2 \hat{X}_{m, n} + \hat{L} \hat{v}_{m, n} \end{aligned}$$

où les matrices $\hat{H}, \hat{F}_1, \hat{F}_2$ ne sont pas nécessairement égales à (H, F_1, F_2) et où $\hat{v}_{m, n}$ coïncide avec l'innovation (au sens de la relation d'ordre associée à S_1) normalisée de y au point $(m+1, n+1)$. Mais ceci implique que la factorisation à phase minimale de la densité spectrale de y se met sous la forme $B(z, w)/A_1(z)A_2(w)$ où B est un polynôme quart de plan dépourvu de zéros dans D^2 ; par conséquent, y est un processus ARMA quart de plan à dénominateur séparable. D'une façon plus générale, les processus admettant une représentation X pour laquelle $H(y) = H(X)$ (ce qui est le cas de tout processus pour lequel un filtre de Kalman peut être défini) sont ceux dont la densité spectrale admet une factorisation de la forme $B(z, w)/A_1(z)A_2(w)$ où B est un polynôme quart de plan (non nécessairement dépourvu de zéros dans D^2); en particulier, les processus qui sont superposition de modèles ARMA quart de plan à dénominateur séparable n'appartiennent pas à cette catégorie. Par conséquent, il est impossible de généraliser la notion de filtre de Kalman au cas 2-D.

Ceci rend plus délicat la conception et la mise en œuvre des procédés de filtrage récursif en traitement d'image. Les techniques récursives utilisées, souvent qualifiées à tort de filtre de Kalman 2-D, sont en fait basées sur des approximations judicieuses de filtres de Kalman vectoriels 1-D ([WOO-RAD], par exemple). Le cas le plus simple est celui où l'image peut être modélisée par un processus représentable par un modèle d'Attasi perturbé par un bruit blanc [ATT, CLA, LAS-SIL] puisque la mise en œuvre du filtre de Kalman vectoriel se résume à deux filtrages 1-D opérant sur des processus scalaires.

Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté un certain nombre de propriétés structurelles des champs stationnaires au sens large sur Z^2 en accordant une place importante aux modèles paramétriques.

Nous avons indiqué tout d'abord comment la théorie de la prédiction linéaire de Wiener-Kolmogorov pouvait être étendue au cas 2-D grâce au choix d'un passé pour lequel l'erreur de prédiction est un bruit blanc; les critères de déterminisme et de régularité correspondants sont du même type que ceux du cas 1-D et la notion de factorisation à phase minimale peut être définie et caractérisée analytiquement.

Les principales difficultés que l'on rencontre lors du passage 1-D \rightarrow 2-D apparaissent essentiellement lorsqu'on cherche à définir des modèles d'ordre fini et ceci en raison de l'impossibilité de factoriser les polynômes 2-D en produit de facteurs d'ordre 1. Nous avons commencé par présenter les propriétés des modèles ARMA 2-D. Ces processus doivent être par nature unilatéraux en raison de problèmes d'identifiabilité de sorte qu'ils coïncident avec les processus à spectre rationnel possédant une factorisation causale à phase minimale rationnelle; la caractérisation analytique des densités spectrales correspondantes fait alors apparaître l'existence de directions privilégiées, ce qui va à l'encontre de l'idée d'homogénéité de l'espace sous-jacent dans la notion de champ aléatoire. Une difficulté d'une autre nature est rencontrée dans le problème de la modélisation AR en raison de la perte de l'algorithme de Levinson; cependant, il existe une paramétrisation des filtres FIR d'inverses stables faisant intervenir des coefficients de réflexion qui contrôlent la stabilité des filtres générés. Malgré tous les problèmes posés par ces modèles, il faut être conscient du fait que leur utilisation est incontournable dans les applications mettant en jeu des traitements récursifs; il semble donc important de poursuivre un certain nombre d'investigations permettant par exemple de mieux comprendre l'effet des directions privilégiées ou d'utiliser les représentations des filtres FIR d'inverses stables dans des problèmes d'identification récursive.

Nous avons également abordé brièvement les modèles markoviens au sens large qui peuvent être définis indépendamment de toute idée de causalité. Ces processus sont ceux dont la densité spectrale coïncide avec l'inverse d'un polynôme positif sur le bi-cercle

unité et constituent une classe plus générale que celle des AR unilatéraux; leur utilisation est à conseiller en particulier dans des problèmes d'estimation spectrale où il n'est pas nécessaire de disposer d'une représentation entrée-sortie.

La quatrième partie de cet article a été consacrée à l'étude des processus représentables par des modèles d'état d'Attasi. Nous avons commencé par montrer que les modèles d'état d'Attasi sont ceux qui sont associés à des opérateurs de Hankel de rang fini et que par conséquent, ils donnent lieu au développement d'une théorie de la réalisation déterministe. Ensuite, nous avons présenté les problèmes liés à la réalisation stochastique par ce genre de modèles en mettant en évidence les problèmes d'identifiabilité dus à la perte du filtre de Kalman dans le cas 2-D. Nous pensons que les techniques de réalisation déterministe et stochastiques par ce type de modèles devraient pouvoir être utilisées en priorité dans des problèmes d'estimation spectrale mettant en jeu des superpositions d'ondes planes en raison de la séparabilité qui y est sous-jacente. Il y a par contre lieu d'être plus réservé sur leur utilisation dans des applications tels que la restauration d'image où d'une façon générale les modèles linéaires et stationnaires ne sont pas suffisamment riches pour intégrer les non-stationnarités dues aux contours.

Manuscrit reçu le 26 février 1988, version révisée le 9 janvier 1989.

BIBLIOGRAPHIE

- [ATT-1] S. ATTASI, Modelling and recursive estimation for doubled indexed sequences. In *System Identification: advances and studies*, R.-K. MEHRA et D. G. LAINIOTIS éd., *Mathematics in Science and Engineering*, 126, 1976, p. 289-348.
- [ATT-2] S. ATTASI, Modélisation et Traitement des Suites à Deux Indices, *Thèse d'État*, Université Paris-VI, 1975.
- [AZE] R. AZENCOTT, Markov fields and image analysis, AFCET INRIA 6^e congrès de Rec. des Formes et Intelligence Artificielle, novembre 1987, p. 1183-1191, Antibes.
- [BOSE] N. K. BOSE, *Applied Multidimensional System Theory*, Van Nostrand Reinhold, 1982.
- [CHA] B. CHALMOND, Image restoration using an estimated Markov model, *Signal Processing*, 15, n° 2, September 1988.
- [CHAY] S. C. CHAY, On quasi Markov random fields, *Journal of Multivariate Analysis*, 2, 1972, p. 14-76.
- [CHI] CHIANG-ZE-PEI, On the linear extrapolation of a continuous homogeneous random field, *Theory of Probability and its Applications*, 2, n° 1, 1957, p. 58-89.
- [CLA] F. CLARA, A State-Space Approach to Image Modelling, Restoration and Identification, *P.H.D. Thesis*, University of Southern California, 1983.
- [DE-GE-KA] P. DELSARTE, Y. V. GENIN et Y. G. KAMP, Half-plane Toeplitz systems, *IEEE Trans on IT*, 26, n° 4, July 1980.
- [EKS-WOO] M. P. EKSTRÖM et J. M. WOODS, Two dimensional spectral factorization with applications in recursive digital filtering, *IEEE Trans on ASSP*, 24, n° 2, April 1976, p. 115-128.

- [F-C-G] P. FAURRE, M. CLERGET et F. GERMAIN, Opérateurs Rationnels Positifs. Applications à l'Hyperstabilité et aux Processus Aléatoires, *Méthodes Mathématiques pour l'Informatique*, 8, Dunod, Paris, 1979.
- [GEM-GEM] S. GEMAN et D. GEMAN, Stochastic relaxation, Gibbs distribution and the Bayesian restoration of images, *IEEE Trans on PAMI*, 6, n° 6, November 1984, p. 721-741.
- [GEN-KAM] Y. V. GENIN et Y. G. KAMP, Two-dimensional stability and orthogonal polynomials on the hypercircle, *Proc. IEEE*, 25, June 1977, p. 873-881.
- [GUY] X. GUYON, Champs aléatoires stationnaires sur Z^2 : modèles, statistiques et simulations, Preprint 85-T-21, Orsay, 1985.
- [HEI] F. HEITZ, Restitution de la Radiographie d'un Tableau Dissimulé par une Composition Postérieure, *Thèse de doctorat*, ENST, juillet 1988.
- [HEL-LOW-1] H. HELSON et D. LOWDENSLAGER, Prediction theory and Fourier series in several variables. I, *Acta Mathematica*, 99, 1959, p. 165-202.
- [HEL-LOW-2] H. HELSON et D. LOWDENSLAGER, Prediction theory and Fourier series in several variables. II, *Acta Mathematica*, 106, 1962, p. 175-213.
- [HIN] T. HINAMOTO, Realizations of a state space model from two-dimensional input-output map, *IEEE Trans on CAS*, 27, n° 1, January 1980, p. 36-44.
- [KAL-MAN] G. KALLIANPUR et V. MANDREKAR, Non-deterministic random fields and Wold and Halmos decompositions for commuting isometries. In *Prediction Theory and Harmonic Analysis, the Pesi Masani Volume*, V. MANDREKAR et H. SALEHI éd., North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [KOR] H. KOREZLIOGLU, Processus autorégressifs à deux indices et leur filtrage linéaire récursif, *7^e Colloque GRETSI*, Nice, 1979, p. 14.1-14.6.
- [KOR-LOU] H. KOREZLIOGLU et P. LOUBATON, Spectral factorization of wide-sense stationary processes on Z^2 , *Journal of Multivariate Analysis*, 19, n° 1, June 1986, p. 26-47.
- [LAS-SIL] B. LASGHARI et L. M. SILVERMAN, Recursive estimation of two-dimensional processes with applications to image processing, *Circuit, Systems and Signal Processing*, 5, n° 2, 1986, p. 211-226.
- [LER-1] J. LE ROUX, 2-D Bauer factorization, *IEEE Trans on ASSP*, 32, n° 3, June 1984.
- [LER-2] J. LE ROUX, 2-D spectral factorization and stability tests for matrix polynomial based on the Radon projection, *Proc. ICASSP 86*, Tokyo, April 1986, p. 1041-1044.
- [LOU] P. LOUBATON, Prédiction et Représentation Markovienne des Processus Stationnaires Vectoriels sur Z^2 . Utilisation de Techniques d'Estimation Spectrale 2-D en Traitement d'Antenne, *Thèse de Doctorat*, ENST, juillet 1988.
- [MCL] J. H. MAC-CLELLAN, Multidimensional spectral estimation, *Proc. IEEE*, 70, September 1982, p. 1029-1039.
- [MAR-1] T. L. MARZETTA, Two-dimensional linear prediction: autocorrelation array, minimum phase prediction error filters, and reflection coefficients arrays, *IEEE Trans on ASSP*, 28, December 1980, p. 725-733.
- [MAR-2] T. L. MARZETTA, A Linear Prediction Approach for Two-Dimensional Spectral Estimation, *Ph.D. Thesis*, MIT Cambridge, February 1978.
- [MUR] J. J. MURRAY, Spectral factorization and quarter-plane digital filters, *IEEE Trans on CAS*, 25, n° 8, August 1978.
- [ROZ-1] Y. A. ROZANOV, *Stationary Random Processes*, Holden-Day, 1967.
- [ROZ-2] Y. A. ROZANOV, On Gaussian fields with given conditional distributions, *Theory of Prob. and Appl.*, XII, n° 3, 1967, p. 381-391.
- [RUC] G. RUCKEBUSCH, Représentations markoviennes de processus Gaussiens stationnaires et applications statistiques, *Journées de Statistique des Processus Stochastiques*, Springer-Verlag, Berlin, *Lectures Notes in Math.*, 695, Grenoble, 1977, p. 115-139.
- [RUD-1] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, Mac-Graw Hill, New York, 1970.
- [RUD-2] W. RUDIN, *Function Theory on Polydiscs*, Benjamin, Amsterdam, 1969.
- [SOL] A. R. SOLTANI, Extrapolations on moving average representation for stationary random fields and Beurling's theorem, *Annals of Probability*, 12, 1984, p. 120-132.
- [WHI] P. WHITTLE, On stationary processes in the plane, *Biometrika*, 41, 1954, p. 434-449.
- [WILL] A. S. WILLSKY, *Digital Signal Processing and Control and Estimation Theory*, chap. 4, MIT Press, Cambridge, Mass., 1979.
- [WOO-RAD] J. W. WOODS et C. H. RADEWAN, Kalman filtering in two dimensions, *IEEE Trans on IT*, 23, n° 4, July 1977, p. 473-482.
- [YOU] L. YOUNES, Problèmes d'Estimation Paramétrique pour des Champs de Gibbs Markoviens. Applications au Traitement d'Image, *Thèse de l'Université Paris-XI*, septembre 1988.

Annexe

Démonstration de la proposition 1.2.1

Établissons l'existence de la décomposition (1.2.10). Soit Φ une factorisation causale de f et posons

$$\Phi(z, w) = \sum_{(k, l) \in S_1} \varphi_{k, l} z^k w^l.$$

Puisque

$$f(u, v) = |\Phi(e^{-2inu}, e^{-2iv})|^2,$$

il existe un bruit blanc v de variance 1 tel que

$$(A.1) \quad y_{m, n} = \sum_{(k, l) \in S_1} \varphi_{k, l} v_{m-k, n-l}$$

Donc, $y_{m, n} \in H_{m, n}^1(v)$ et $H_{m, n}^1 \subset H_{m, n}^1(v)$; d'après (1.2.5), $v_{m, n}^1 \in H_{m, n}^1(v)$ et se représente donc causalement en fonction de v_i .

$$v_{m, n}^1 = \sum_{(k, l) \in S_1} \theta_{k, l} v_{m-k, n-l}$$

avec

$$\sum_{(k, l) \in S_1} |\theta_{k, l}|^2 < \infty.$$

Puisque v^1 est un bruit blanc de variance 1, la fonction

$$\theta(z, w) = \sum_{(k, l) \in S_1} \theta_{k, l} z^k w^l$$

doit vérifier (1.2.11); (1.2.10) se déduit de ce qui précède et de (1.2.6).

Si $\Phi = \Phi^1$, (1.2.12) est vérifié d'après (1.1.8). Supposons que Φ vérifie (1.2.12). Soit v le bruit blanc défini par (A.1). Alors,

$$\|y_{m,n} - y_{m,n}/H_{m,n-1}^1(v)\|^2 = \|y_{m,n} - y_{m,n}/H_{m,n-1}^1(v^1)\|^2;$$

puisque $H_{m,n-1}^1(v^1) \subset H_{m,n-1}^1(v)$, l'égalité des normes des erreurs de prédiction implique l'égalité des erreurs elles-mêmes; donc, $v_{m,n}^1 = v_{m,n}$.

Montrons enfin l'équivalence entre (1.2.12) et (1.2.13). (1.2.13) implique évidemment (1.2.12). Supposons que (1.2.12) soit vérifié. Il est bien connu [RUD-1] que toute fonction $h(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} h_k z^k$ telle que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |h_k|^2 < \infty \text{ vérifie}$$

$$\log |h_0|^2 \leq \int_1 \log |h(e^{-2inu})|^2 du;$$

cette inégalité appliquée à la fonction $w \rightarrow \Phi(0, w)$ et à la fonction $z \rightarrow \Phi(z, e^{-2inv})$ pour v fixé implique que

$$\log |\varphi_{0,0}|^2 \leq \int_1 \log |\Phi(0, e^{-2inv})|^2 dv$$

et que

$$\log |\Phi(0, e^{-2inv})|^2 \leq \int_1 \log f(u, v) du dv$$

presque partout; mais l'égalité (1.2.12) implique que toutes ces inégalités sont en fait des égalités. \square

Démonstration du théorème 1.2.3 : Posons

$$\Phi(z, e^{-2inv}) = \gamma(e^{-2inv}) \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k(v) z^k\right).$$

Tout d'abord, on peut démontrer assez aisément que $\Phi(z, e^{-2inv})$ se développe sous la forme $\sum_{(k,l) \in S_1} \varphi_{k,l} z^k w^l$ avec $\sum_{(k,l) \in S_1} |\varphi_{k,l}|^2 < \infty$ et que

$\gamma(e^{-2inv}) = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{0,l} e^{-2inlv}$, dans ces conditions, Φ peut être prolongée à $\{0\} \times \bar{D}$ et on a nécessairement $\Phi(0, w) = \gamma(w)$. D'autre part,

$$\Phi(z, e^{-2inv}) = \frac{\gamma(e^{-2inv})}{\exp(b_0(v)/2)} \times \exp\left(\frac{b_0(v)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(v) z^k\right).$$

Or, pour v fixé la factorisation causale à phase minimale de la densité spectrale 1-D $u \rightarrow f(u, v)$ est précisément la fonction $\exp\left(\frac{b_0(v)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(v) z^k\right)$ définie pour z appartenant à D [ROZ-1]. Mais d'une façon générale, les factorisations à phase minimales sont définies à un facteur multiplicatif de module 1 près, qui dans le contexte de la densité spectrale

$u \rightarrow f(u, v)$ peut être une fonction de v ; puisque par définition

$$|\gamma(e^{-2inv})|^2 = \exp b_0(v), \quad z \rightarrow \Phi(z, e^{-2inv})$$

est factorisation à phase minimale de $u \rightarrow f(u, v)$. $\Phi(0, w)$ étant égal par définition à la factorisation à phase minimale de $g_1(v)$, Φ vérifie (1.2.13) de sorte que $\Phi = \Phi^1$. \square

Démonstration de la proposition 1.2.4 : La fonction $(u, v) \rightarrow |B(e^{-2inu}, e^{-2inv})/A(e^{-2inu}, e^{-2inv})|^2$ doit être intégrable puisqu'elle est égale à la densité spectrale de y . D'après la proposition (1.2.1), Φ est la factorisation à phase minimale de la densité spectrale de y ssi $w \rightarrow \Phi(0, w)$ est la factorisation à phase minimale de $|B(0, e^{-2inv})/A(0, e^{-2inv})|^2$ et si pour presque tout $v, z \rightarrow \Phi(z, e^{-2inv})$ est la factorisation à phase minimale de $u \rightarrow |B(e^{-2inu}, e^{-2inv})/A(e^{-2inu}, e^{-2inv})|^2$. $\Phi(0, w) = B(0, w)/A(0, w)$; la première condition a donc lieu ssi $B(0, w) \neq 0$ dans D et si $A(0, w) \neq 0$ dans \bar{D} . $\Phi(z, e^{-2inv}) = B(z, e^{-2inv})/A(z, e^{-2inv})$; la seconde condition a donc lieu ssi $B(z, e^{-2inv}) \neq 0$ dans D et $A(z, e^{-2inv}) \neq 0$ dans \bar{D} pour presque tout v ; en utilisant des arguments de continuité, ceci implique que $B(z, e^{-2inv})$ et $A(z, e^{-2inv})$ sont non nuls $\forall z \in D$ et $\forall v \in I$; à noter qu'il peut exister $v_0 \in I$ et z_0 de module 1 tels que $A(z_0, e^{-2inv_0}) = 0$ pourvu que $B(z_0, e^{-2inv_0}) = 0$ et que la fonction $(u, v) \rightarrow |B(e^{-2inu}, e^{-2inv})/A(e^{-2inu}, e^{-2inv})|^2$ soit intégrable; contrairement au cas 1-D, cette situation n'est pas contradictoire avec le fait que A et B sont premiers entre eux. \square

Démonstration du lemme 1.2.6 : Commençons par établir (1.2.28). D'après (1.2.27),

$$h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) = h(e^{-2inu}, e^{-2inv})$$

avec

$$u = \beta_2 u' - \beta_1 v'$$

et

$$v = \alpha_1 v' - \alpha_2 u' \text{ i.e. } u' = \alpha_1 u + \beta_1 v/\delta$$

et

$$v' = \alpha_2 u + \beta_2 v/\delta. \text{ Donc,}$$

$$\int_{I^2} h(e^{-2inu}, e^{-2inv}) du dv = \int_{I^2} h'(e^{-2in(\alpha_1 u + \beta_1 v/\delta)}, e^{-2in(\alpha_2 u + \beta_2 v/\delta)}) du dv.$$

D'après la formule du changement de variable, cette dernière intégrale vaut

$$\delta \int_A h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) du' dv'$$

où

$$A = \{(u', v') / -0,5 \leq \beta_2 u' - \beta_1 v' \leq 0,5 \text{ et } -0,5 \leq \alpha_1 v' - \alpha_2 u' \leq 0,5\}.$$

A est bien entendu un parallélogramme de surface $1/\delta$.

D'autre part, puisque

$$h(e^{-2inu}, e^{-2inv}) = h(e^{-2i\pi(u+m)}, e^{-2i\pi(v+n)})$$

pour $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$,

$$h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) = h'(e^{-2i\pi(u' + (\alpha_1 m + \beta_1 n)/\delta)}, e^{-2i\pi(v' + (\alpha_2 m + \beta_2 n)/\delta)}).$$

Appelons $\Delta_{m,n}$ la translation qui à (u', v') fait correspondre $(u' + m\alpha_1/\delta + n\beta_1/\delta, v' + m\alpha_2/\delta + n\beta_2/\delta)$ et posons $A_{m,n} = \Delta_{m,n}(A)$; alors, la fonction h' est invariante par $\Delta_{m,n}$ et par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_A h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) du' dv' \\ = \int_{A_{m,n}} h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) du' dv'. \end{aligned}$$

\mathbb{I}^2 peut être recouvert par un nombre fini de parallélogrammes $A_{m,n}$ i.e. il existe un sous-ensemble fini D de \mathbb{Z}^2 tel que $\mathbb{I}^2 = \bigcup_{(m,n) \in D} (\mathbb{I}^2 \cap A_{m,n})$. L'idée de la

démonstration consiste à remarquer que les $A_{m,n}$ étant de surface $1/\delta$, on peut reconstituer l'ensemble \mathbb{I}^2 grâce à un « puzzle » dont les éléments proviennent de δ sous-ensembles $A_{m,n}$. Ceci se traduit plus rigoureusement de la façon suivante : il existe δ points de $\mathbb{Z}^2 (k_1, l_1), \dots, (k_\delta, l_\delta)$ et des sous-ensembles $D(k_i, l_i), i=1, \delta$ de \mathbb{Z}^2 tels que

$$\begin{aligned} A_{k_i, l_i} &= \bigcup_{(m,n) \in D(k_i, l_i)} \Delta_{-m+k_i, -n+l_i}(\mathbb{I}^2 \cap A_{m,n}) \\ D &= \bigcup_{i=1, \delta} D(k_i, l_i) \end{aligned}$$

où les ensembles $\Delta_{-m+k_i, -n+l_i}(\mathbb{I}^2 \cap A_{m,n})$ pour $(m, n) \in D(k_i, l_i)$ ont une intersection deux à deux de surface nulle. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{I}^2} h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) du' dv' \\ = \sum_{i=1}^{\delta} \sum_{(m,n) \in D(k_i, l_i)} \int_{A_{m,n} \cap \mathbb{I}^2} h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) du' dv'. \\ \int_{A_{m,n} \cap \mathbb{I}^2} h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) du' dv' \\ = \int_{\Delta_{-m+k_i, -n+l_i}(A_{m,n} \cap \mathbb{I}^2)} h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) du' dv' \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in D(k_i, l_i)} \int_{A_{m,n} \cap \mathbb{I}^2} h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) du' dv' \\ = \sum_{(m,n) \in D(k_i, l_i)} \int_{\Delta_{-m+k_i, -n+l_i}(A_{m,n} \cap \mathbb{I}^2)} h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) du' dv' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{A_{k_i, l_i}} h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) du' dv' \\ &= \int_A h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) du' dv'. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{I}^2} h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) du' dv' \\ = \delta \int_A h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) du' dv' \\ = \int_{\mathbb{I}^2} h(e^{-2inu}, e^{-2inv}) du dv. \end{aligned}$$

Montrons à présent que les coefficients de Fourier de h' admettent $E(\mathbb{Z}^2)$ comme support. Soient $h_{k,l}$ les coefficients de Fourier de $h(e^{-2inu}, e^{-2inv})$; alors,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{I}^2} |h(e^{-2inu}, e^{-2inv}) - h_M(e^{-2inu}, e^{-2inv})| du dv = 0$$

où

$$h_M(e^{-2inu}, e^{-2inv}) = \sum_{(k,l) \in [-M, M]} h_{k,l} e^{-2i\pi(ku+lv)}.$$

appelons $h'_M(e^{-2inu'}, e^{-2inv'})$ la fonction obtenue à partir de $h_M(e^{-2inu}, e^{-2inv})$ par l'intermédiaire de la transformation (1.2.27); alors,

$$h'_M(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) = \sum_{(m,n) \in E([-M, M])} h'_{m,n} e^{-2i\pi(mu'+nv')}$$

et en appliquant (1.2.28),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{I}^2} |h(e^{-2inu}, e^{-2inv}) - h_M(e^{-2inu}, e^{-2inv})| du dv \\ = \int_{\mathbb{I}^2} |h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'}) - h'_M(e^{-2inu'}, e^{-2inv'})| du' dv' \end{aligned}$$

En passant à la limite, ceci implique que les coefficients de Fourier de $h'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'})$ sont les $h_E(k,l)$ pour (k,l) décrivant \mathbb{Z}^2 . \square

Démonstration du théorème 2.6: Nous ne donnons que les grandes lignes de la démonstration.

Supposons que $v_{m,n}^S = v_{m,n}^{S'}$ et montrons que (2.16) a lieu. Soit $\Phi(z, w)$ la factorisation à phase minimale associée aux passés définis par S et S' . Alors, $v_{m,n}^S = v_{m,n}^{S'}$ implique que $\Phi(z, w)$ se met sous la forme $\Phi(z, w) = \sum_{(k,l) \in S \cap S'} \varphi_{k,l} z^k w^l$. Reprenons les notations

du lemme 1.2.6 et désignons par $\Phi'(z', w')$ la fonction obtenue à partir de $\Phi(z, w)$ à partir de la transformation (1.2.27). Alors,

$$\Phi'(z', w') = \sum_{(m,n) \in E(S \cap S')} \varphi'_{m,n} z'^m w'^n$$

et

$$\log |\varphi'_{0,0}|^2 = \int_{\mathbb{I}^2} \log |\Phi'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'})|^2 du' dv'$$

d'après le lemme 1.2.6. D'après [RUD-2], p. 73 (qui est la version fonctionnelle du théorème 2.4), ceci implique que

$$\int_{\mathbb{I}^2} \log |\Phi'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'})|^2 e^{2in(mu'+nv')} du' dv' = 0$$

pour $mn < 0$. En utilisant (1.2.28), il vient

$$\int_{\mathbb{I}^2} \log |\Phi(e^{-2inu}, e^{-2inv})|^2 e^{2in(ku+lv)} du dv = 0$$

pour $(k, l) \in (S - S \cap S') \cup (S' - S \cap S')$.

Réciproquement, si (2.16) a lieu, on peut montrer que la fonction

$$\Phi(z, w) = \exp(b_{0,0/2} + \sum_{(k,l) \in S \cap S' - \{0,0\}} b_{k,l} z^k w^l)$$

s'écrit sous la forme

$$\Phi(z, w) = \sum_{(k,l) \in S \cap S'} \varphi_{k,l} z^k w^l$$

avec

$$\sum_{(k,l) \in S \cap S'} |\varphi_{k,l}|^2 < \infty$$

et coïncide avec la factorisation à phase minimale de f simultanément au sens des passés associés à S et à S' . Ceci implique que $v_{m,n}^S = v_{m,n}^{S'}$.

Si y est un processus ARMA unilatéral défini par des polynômes A et B dont le support des coefficients est inclus dans $S \cap S'$, il est clair que (2.16) a lieu et que f est rationnelle.

Réciproquement, si (2.16) a lieu et que f est rationnelle, il faut établir que $\Phi(z, w)$ donnée par (2.17) est le quotient de deux polynômes dont le support des coefficients est inclus dans $S \cap S'$. Pour ceci, il suffit de constater que $\Phi'(z', w')$ définie à partir de $\Phi(z, w)$ à partir de la transformation (1.2.27) est le quotient de deux polynômes quart de plan A' et B' du fait que

$$\int_{\mathbb{I}^2} \log |\Phi'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'})|^2 e^{2in(mu'+nv')} du' dv' = 0$$

pour $mn < 0$ et que $|\Phi'(e^{-2inu'}, e^{-2inv'})|^2$ est rationnelle (par application de la deuxième partie du théorème 2.5). Pour compléter la démonstration, il faut montrer que le support des coefficients de A' et B' est inclus dans $E(S \cap S')$ de façon à pouvoir transformer $A'(z', w')$ et $B'(z', w')$ en deux polynômes dont le support des coefficients est inclus $S \cap S'$; ceci se démontre en remarquant que le support des coefficients de $\Phi'(z, w')$ est inclus dans $E(S \cap S')$ et en reprenant point par point la démonstration du théorème A_2 de [MUR] et celle du théorème 5.5.2 de [RUD-2]. \square

Démonstration du théorème 4.1.2 : Nous n'allons établir que l'équivalence entre (i), (ii) et la condition rang \mathcal{H} fini. Commençons par montrer que si rang \mathcal{H} est fini, la condition (ii) est vérifiée. Posons $\mathcal{X} = \text{Im } \mathcal{H}$; alors, tout élément de \mathcal{X} est une série formelle $x(z, w)$

qui s'écrit sous la forme $E^{zw\mathcal{S}^-}((\Phi u)(z, w))$ où $u \in \mathcal{S}^+$; de plus,

$$\begin{aligned} E^{zw\mathcal{S}^-}(z^{-1}x(z, w)) &= E^{zw\mathcal{S}^-} E^{w\mathcal{S}^-}(z^{-1}(\Phi u)(z, w)) \\ &= E^{zw\mathcal{S}^-}(z^{-1}(\Phi u)(z, w)); \end{aligned}$$

puisque $z^{-1}u(z, w)$ appartient à \mathcal{S}^+ , ceci implique que $E^{zw\mathcal{S}^-}(z^{-1}x(z, w))$ est un élément de \mathcal{X} ; de même, $E^{zw\mathcal{S}^-}(w^{-1}x(z, w)) \in \mathcal{X}$. On définit donc deux opérateurs de \mathcal{X} dans \mathcal{X} en posant pour tout $x \in \mathcal{X}$

$$(A.2) \quad \mathcal{F}_1 x = E^{zw\mathcal{S}^-}(z^{-1}x)$$

$$(A.3) \quad \mathcal{F}_2 x = E^{zw\mathcal{S}^-}(w^{-1}x).$$

De plus, on vérifie aisément que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^m \mathcal{F}_2^n x &= \mathcal{F}_2^n \mathcal{F}_1^m x = E^{zw\mathcal{S}^-}(z^{-m}w^{-n}x) \\ \forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \text{ et } \forall x \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Appelons \mathcal{P} l'opérateur de \mathcal{X} dans \mathbb{R} qui à

$$x(z, w) = \sum_{m \geq 1, n \geq 1} x_{m,n} z^m w^n$$

fait correspondre $x_{1,1}$. Alors, on a

$$(A.4) \quad \begin{cases} \varphi_{m,n} = \mathcal{P} \mathcal{F}_1^{m-1} \mathcal{F}_2^{n-1}(\Phi(z, w)), \\ \forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}. \end{cases}$$

Puisque \mathcal{X} est de dimension finie p , \mathcal{X} admet une base (x_1, x_2, \dots, x_p) ; désignons par (g_1, g_2, \dots, g_p) les composantes de Φ dans cette base et par F_1 et F_2 les matrices des opérateurs \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 ; posons $h_1 = \mathcal{P}x_1, \dots, h_p = \mathcal{P}x_p$; alors, $F_1 F_2 = F_2 F_1$ et (A.4) implique que $\varphi_{m,n} = \text{HF}_1^{m-1} F_2^{n-1} G$ avec $H = (h_1, h_2, \dots, h_p)$ et $G = (g_1, g_2, \dots, g_p)^T$. De plus, la fonction de transfert $\Phi(z, w)$ s'écrit sous la forme

$$(A.5) \quad \Phi(z, w) = zwH(I - zF_1)^{-1}(I - wF_2)^{-1}G$$

et coïncide donc avec la fonction de transfert du système défini par (4.1.5).

Réciproquement, supposons que (4.1.4) soit vérifié. Soit \mathcal{S}_c^+ le sous-ensemble de \mathcal{S}^+ constitué par les séries formelles associées à des suites à support compact. Soit

$$u(z, w) = \sum_{m \geq 0, n \geq 0} u_{m,n} z^m w^n$$

un élément de \mathcal{C}_c^+ ; alors,

$$(A.6) \quad (\mathcal{H}u)(z, w) = \sum_{m \geq 1, n \geq 1} \text{HF}_1^{m-1} F_2^{n-1} \times \left(\sum_{k \geq 0, l \geq 0} F_1^k F_2^l G u_{k,l} \right) z^m w^n.$$

Désignons par q la dimension de la réalisation (4.1.4); soient \mathcal{C} et \mathcal{O} les opérateurs de commandabilité et d'observabilité définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_c^+ &\rightarrow \mathbb{R}^q \\ \mathcal{C} \quad u(z, w) &\rightarrow \sum_{k \geq 0, l \geq 0} F_1^k F_2^l G u_{k,l} \end{aligned}$$

$$\mathcal{O} \quad h \rightarrow \sum_{m \geq 1, n \geq 1} \mathbb{R}^q \rightarrow zw \mathcal{S}^- \quad (\mathbf{H}\mathbf{F}_1^{m-1} \mathbf{F}_2^{n-1} h) z^m w^n.$$

Alors, (A.6) implique que $\mathcal{H} = \mathcal{O}\mathcal{C}$; mais rang \mathcal{O} et rang \mathcal{C} sont inférieurs ou égaux à q de sorte qu'à fortiori, rang \mathcal{H} est fini.

Enfin, établissons l'équivalence entre (4.1.3) et (4.1.4). Si (4.1.4) est vérifié,

$$\Phi(z, w) = zw \mathbf{H} (\mathbf{I} - z \mathbf{F}_1)^{-1} (\mathbf{I} - w \mathbf{F}_2)^{-1} \mathbf{G};$$

d'après la règle de Cramer,

$$(\mathbf{I} - z \mathbf{F}_1)^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{I} - z \mathbf{F}_1)}{\det(\mathbf{I} - z \mathbf{F}_1)}$$

et

$$(\mathbf{I} - w \mathbf{F}_2)^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{I} - w \mathbf{F}_2)}{\det(\mathbf{I} - w \mathbf{F}_2)}$$

où adj désigne la matrice transposée de celle des cofacteurs. Par conséquent,

$$\Phi(z, w) = zw \frac{\mathbf{H} \text{adj}(\mathbf{I} - z \mathbf{F}_1) \text{adj}(\mathbf{I} - w \mathbf{F}_2) \mathbf{G}}{\det(\mathbf{I} - z \mathbf{F}_1) \det(\mathbf{I} - w \mathbf{F}_2)}$$

et Φ a bien la forme (4.1.3).

Si (4.1.3) est vérifié, posons

$$\mathbf{A}_1(z) = \sum_{k=0}^M a_{1,k} z^k,$$

$$\mathbf{A}_2(w) = \sum_{l=0}^N a_{2,l} w^l,$$

$$\mathbf{B}(z, w) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} b_{k,l} z^k w^l$$

et normalisons \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 de telle sorte que $a_{1,0} = a_{2,0} = 1$. Dans ces conditions, on a

$$\frac{1}{\mathbf{A}_1(z)} = - \sum_{k=1}^M a_{1,k} \frac{z^k}{\mathbf{A}_1(z)}$$

et

$$\frac{1}{\mathbf{A}_2(w)} = - \sum_{l=1}^N a_{2,l} \frac{w^l}{\mathbf{A}_2(w)}.$$

Posons

$$x_{k,l}(z, w) = \frac{z^k w^l}{\mathbf{A}_1(z) \mathbf{A}_2(w)}$$

et

$$\mathcal{X}' = sp \{ x_{k,l}(z, w) / k=1, \sup(M, M'), l=1, \sup(N, N') \};$$

il est alors clair que les opérateurs \mathcal{F}'_1 et \mathcal{F}'_2 définis par $\mathcal{F}'_1 = \mathbf{E}^{zw} \mathcal{S}^- z^{-1} | \mathcal{X}'$ et $\mathcal{F}'_2 = \mathbf{E}^{zw} \mathcal{S}^{-1} w^{-1} | \mathcal{X}'$ sont à valeurs dans \mathcal{X}' et vérifient

$$\mathcal{F}'_1 \mathcal{F}'_2 x = \mathcal{F}'_2 \mathcal{F}'_1 x = \mathbf{E}^{zw} \mathcal{S}^- z^{-m} w^{-n} | \mathcal{X}'.$$

D'autre part,

$$\Phi(z, w) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} b_{k,l} x_{k,l}(z, w)$$

de sorte que $\Phi \in \mathcal{X}'$; mais, puisque

$$\text{Im } \mathcal{H} = sp \{ \mathbf{E}^{zw} \mathcal{S}^- (z^{-m} w^{-n} \Phi) / m \geq 0 \text{ et } n \geq 0 \},$$

$$\text{Im } \mathcal{H} = sp \{ \mathcal{F}'_1^m \mathcal{F}'_2^n \Phi / m \geq 0 \text{ et } n \geq 0 \}.$$

et par conséquent, Im \mathcal{H} est inclus dans \mathcal{X}' ; \mathcal{X}' étant de dimension finie, il en est de même pour Im \mathcal{H} .

Nous ne démontrons pas la deuxième partie du théorème qui est une conséquence directe de la factorisation de \mathcal{H} sous la forme $\mathcal{H} = \mathcal{O}\mathcal{C}$.

Il est nécessaire de remarquer que la réalisation associée à l'espace \mathcal{X}' n'est pas forcément minimale. Considérons par exemple la fonction

$$\Phi(z, w) = zw \left(\frac{1}{1 - a_{1,1} z} \frac{1}{1 - a_{2,1} w} + \frac{1}{1 - a_{1,2} z} \frac{1}{1 - a_{2,2} w} \right);$$

alors, il est facile de montrer que Im \mathcal{H} est de dimension 2 alors que \mathcal{X}' est de dimension 4. Par conséquent, Im \mathcal{H} n'est pas nécessairement le produit tensoriel de l'espace d'état associé à $z/A_1(z)$ et de l'espace d'état associé à $w/A_2(w)$. \square

Démonstration de la proposition 4.2.1: Nous ne démontrons que l'implication (i) et (ii). La réciproque que l'on peut trouver dans [KOR] nécessite l'introduction de définitions relativement lourdes.

Supposons que X se représente sous la forme (4.2.1); posons $\mathbf{I}_{m+1, n+1} = \mathbf{L} \mathbf{v}_{m, n}$ et montrons que

$$(A.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{I}_{m+1, n+1} &= \mathbf{X}_{m+1, n+1} - \mathbf{X}_{m+1, n+1} / \mathbf{H}_{m+1, n}^1(\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{X}_{m+1, n+1} - \mathbf{X}_{m+1, n+1} / \mathbf{H}_{m, n+1}^2(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

autrement dit que les innovations de X au point $(m+1, n+1)$ associées aux passés définis par \mathbf{S}_1 et \mathbf{S}_2 sont égales et coïncident avec $\mathbf{L} \mathbf{v}_{m, n}$. Par définition, $\mathbf{I}_{m+1, n+1} \in \mathbf{H}_{m+1, n+1}^1(\mathbf{X})$; d'autre part, compte tenu des hypothèses sur \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 , $\mathbf{X}_{m+1, n+1}$ se développe sous la forme

$$(A.8) \quad \mathbf{X}_{m+1, n+1} = \sum_{(k, l) \in \mathbb{N}^2} \mathbf{F}_1^k \mathbf{F}_2^l \mathbf{I}_{m+1-k, n+1-l}$$

de sorte que $\mathbf{X}_{m+1, n+1} \in \mathbf{H}_{m+1, n+1}^1(\mathbf{I})$; par conséquent,

$$\mathbf{H}_{m+1, n+1}^1(\mathbf{I}) = \mathbf{H}_{m+1, n+1}^1(\mathbf{X})$$

et

$$\mathbf{I}_{m+1, n+1} = \mathbf{X}_{m+1, n+1} - \mathbf{X}_{m+1, n+1} / \mathbf{H}_{m+1, n}^1(\mathbf{X});$$

on démontre de même que

$$\mathbf{I}_{m+1, n+1} = \mathbf{X}_{m+1, n+1} - \mathbf{X}_{m+1, n+1} / \mathbf{H}_{m, n+1}^2(\mathbf{X}).$$

D'après (A.7) et (A.8),

$$\mathbf{X}_{m+1, n} / \mathbf{H}_m^h(\mathbf{X}) = \sum_{k \geq 1, l \geq 0} \mathbf{F}_1^k \mathbf{F}_2^l \mathbf{I}_{m+1-k, n+1-l}$$

En mettant \mathbf{F}_1 en facteurs, on obtient (4.2.2); (4.2.2') se montre de façon analogue. \square