

## Signaux à fort pouvoir de résolution

## temps-fréquence

## Comparaison entre les signaux de Costas

## et les signaux à modulation binaire

## de phase (B.P.S.K.)

## Signals exhibiting « optimal » ambiguity properties



Joël MILLET

CEPHAG/ENSIEG, BP n° 46, 38402 SAINT MARTIN D'HÈRES CEDEX.

Ingénieur diplômé de l'INSA de Lyon (Génie Electrique 1987), titulaire du DEA d'Acoustique de l'INSA de Lyon (1987) et du DEA de Mathématiques Fondamentales et Applications de l'Université de Rennes I (1988), J. Millet est également diplômé de la Chambre Franco-Britannique de Commerce et d'Industrie en 1987. Durant l'année universitaire 1987-1988 il a occupé le poste d'Ingénieur-Professeur à l'ESEAT de Rennes. Chargé de cours au CNAM, J. Millet prépare actuellement un doctorat de l'INPG en Automatique et Traitement du Signal.



Geneviève JOURDAIN

CEPHAG/ENSIEG, BP n° 46, 38402 SAINT MARTIN D'HÈRES CEDEX.

Geneviève Jourdain, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, encadre une équipe de recherche sur les thèmes suivants : identification active de cibles et de milieux dispersifs, communications optimales, applications en acoustique sous-marine. G. Jourdain est l'auteur d'une cinquantaine de publications ou communications à des congrès. Elle est membre du conseil scientifique du GRETSI, référée pour diverses revues (Traitement du Signal, Signal Processing, IEEE...). Elle est actuellement Directeur du CEPHAG.

## RÉSUMÉ

On se propose d'établir une comparaison entre deux classes de signaux à fort pouvoir de résolution temps-fréquence : les signaux de Costas (modulation par saut de fréquence) et les signaux à modulation binaire de phase (BPSK). On présente également des signaux « mixtes », construits à partir de signaux de Costas et de signaux BPSK. On étudie à la fois les propriétés d'autoambiguïté et d'interambiguïté de ces 2 classes de signaux. Les signaux BPSK se révèlent finalement être les plus performants.

**Mots clés :** ambiguïté optimale, signaux de Costas, signaux BPSK, signaux « mixtes », classification de cibles, Interambiguïté.

## SUMMARY

*After a short presentation of the main properties of the ambiguity function, we are to compare two classes of signals exhibiting « optimal » ambiguity properties : Costas signals and Binary Phase Shift Keyed signals. We present also « mixed » signals that are derived from the previous ones. Both autoambiguity and crossambiguity properties of these signals are presented here. The BPSK signals are finally recognised as the most performant ones.*

**KEY WORDS :** « optimal » ambiguity properties, Costas signals, BPSK signals, mixed signals, target identification, crossambiguity.

## 1. Introduction

Dans les problèmes d'identification de cibles mobiles par radar ou sonar actif, on s'intéresse à la répartition des points brillants (réflecteurs du signal émis) dans le plan (retard, Doppler). Ces points brillants permettent de caractériser et de classer la cible étudiée.

Afin d'obtenir une bonne résolution combinée en retard et en Doppler, on doit utiliser des signaux « performants ». Ces signaux sont dits résolvanants en retard et Doppler et doivent présenter une fonction d'ambiguïté proche d'un dirac dans le plan (retard, Doppler).

On se propose essentiellement dans cet article de comparer deux classes de signaux réputés à fonction d'ambiguïté « optimale », une classe de signaux codés en fréquence : les signaux de Costas, et une classe de signaux à modulation binaire de phase : les signaux BPSK.

Les définitions et propriétés des fonctions d'ambiguïté étant largement connues [32], [27], [4], on n'en rappellera ici que très rapidement les propriétés essentielles. De la même façon, puisqu'il s'agit de comparaison, on ne travaillera ici qu'avec la fonction d'ambiguïté en translation (ou de Woodward [32]). D'autres papiers s'intéressent au cas large bande, ou à la fonction d'ambiguïté en compression, qui doit être effectivement considérée dans le cas du sonar actif par exemple [21] pour la résolution de points brillants proches.

L'organisation de ce papier est donc la suivante : après un bref rappel sur la fonction d'ambiguïté (§ 2), on présente aux § 3 et 4 les deux classes de signaux étudiés. On s'intéresse particulièrement aux deux classes de signaux cités ci-dessus étant entendu que tous les autres types de modulation plus classiques (FMLinéaire, FMHyperbolique...) conduisent à de moins bons résultats au niveau de la fonction d'ambiguïté. La comparaison de ces deux classes de signaux à produit durée-bande identique donné, conclut en faveur des signaux BPSK.

On présente également, pour chacun des deux types diverses variantes originales et encore améliorées de ces classes de signaux.

On s'intéresse enfin (§ 6) aux propriétés d'interambiguïté des signaux au sein d'une même classe ; ceci est particulièrement important dans le cas où on veut utiliser les signaux d'une même classe comme alphabet d'émission.

## 2. Fonction d'ambiguïté

Très intéressante, en particulier pour les problèmes de détection active, la fonction d'ambiguïté peut être introduite de diverses manières et sa définition peut ainsi subir quelques légères variations d'un auteur à l'autre.

On peut en effet utiliser un raisonnement basé sur le filtre adapté [27] ou utiliser, ce qui revient au même, un critère de distance entre signaux [1]. On peut aussi déduire la fonction d'ambiguïté à partir de

l'estimation selon le maximum de vraisemblance [1], [31], [8]. Ce type d'introduction de la fonction d'ambiguïté est celui premier de Woodward *et al.* [32]. A ce niveau là apparaissent, suivant les hypothèses faites sur la largeur de bande des signaux et la vitesse relative caractéristique de la cible, les diverses fonctions d'ambiguïté en compression, ou bande large [30], [18], et celle en translation ou bande étroite (dite de Woodward).

On peut aussi raisonner en termes de représentation conjointe temps-fréquence d'un signal, et on sait que la forme symétrisée de la fonction d'ambiguïté de Woodward n'est autre que la transformée de Fourier à deux dimensions de la distribution de Wigner-Ville [23]. Le lien entre la fonction d'ambiguïté et la représentation conjointe en temps et fréquence montre l'importance de cette fonction dans l'étude des signaux fortement modulés en phase et en fréquence, souvent rencontrés dans les systèmes de communication. D'autre part, la fonction d'ambiguïté en compression est reliée à la représentation en ondelettes du signal [12].

La fonction d'ambiguïté peut également aider à caractériser des systèmes linéaires non invariants dans le temps [22], [19] (extension de l'identification de la fonction de transfert de système).

Dans toutes les approches mentionnées ci-dessus, les signaux sont *certain*s et les fonctions d'ambiguïté aussi. La notion de fonction d'ambiguïté a également été étendue au cas de signaux *aléatoires* [17], [14]. Les résultats sont encore liés aux notions de représentation conjointe en temps et fréquence des signaux aléatoires [22].

Nous redonnons ci-après quelques unes des propriétés essentielles des fonctions d'ambiguïté de Woodward. Nous nous limiterons ici à la fonction d'ambiguïté en translation puisqu'il s'agit essentiellement de comparaison entre classes de signaux. Par ailleurs pour les classes des signaux assez performants utilisés ici il n'y aurait pas grande différence entre les fonctions d'ambiguïté en translation et en compression.

### 2.1. FONCTION D'AMBIGUÏTÉ DE WOODWARD [32]

Pour un signal certain  $s(t)$  d'enveloppe complexe  $\mu(t)$  relative à la fréquence porteuse  $f_0$

$$s(t) = \text{Re} \{ \mu(t) e^{j2\pi f_0 t} \},$$

la fonction d'ambiguïté de Woodward normalisée est :

$$(1) \quad \chi(\tau, \nu) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) \mu^*(t - \tau) e^{-j2\pi \nu t} dt$$

où :

$$(2) \quad E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu(t)|^2 dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2 d\nu$$

S étant la transformée de Fourier de  $s$ .

Plus généralement, soient 2 signaux  $S_1$  et  $S_2$ , tout deux passe-bande autour de  $f_0$  et d'enveloppes complexes, relatives à  $f_0$ , respectives  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , la

fonction d'interambiguïté en translation normalisée est donnée par :

$$(3) \quad \chi_{12}(\tau, \nu) = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_1(t) \mu_2^*(t - \tau) e^{-j 2 \pi \nu t} dt .$$

### 2.2. PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION D'AMBIGUÏTÉ EN TRANSLATION

On rappelle ici les principales propriétés de la fonction d'ambiguïté de Woodward.

$$(4) \quad \begin{aligned} |\chi(\tau, \nu)| &\leq |\chi(0, 0)| = 1 \\ \chi(-\tau, -\nu) &= e^{-j 2 \pi \nu \tau} \chi^*(\tau, \nu) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(\tau, \nu)|^2 d\tau d\nu &= 1 . \end{aligned}$$

La dernière propriété signifie que le volume situé en dessous de la surface définie par  $|\chi(\tau, \nu)|^2$  est constant indépendamment du type de signal émis.

Dans les problèmes d'identification active on cherche à avoir une fonction d'ambiguïté la plus proche possible d'un « double Dirac ». Il faudra donc trouver des signaux dont la fonction d'ambiguïté soit telle que son volume soit distribué uniformément dans le plan avec un pic très fin à l'origine [26].

Ce problème de synthèse de signaux ayant une fonction d'ambiguïté donnée, malgré quelques tentatives de résolution [2], [31], [20], reste encore très ouvert. On le résout en fait pratiquement en cherchant des signaux pour lesquels la fonction d'ambiguïté présente un pic pointu à l'origine ( $\tau = 0$ ,  $\nu = 0$ ) surmontant un piedestal.

### 2.3. COUPES RETARD ET DOPPLER

Dans le cas de l'autoambiguïté la « coupe retard » est donnée par :

$$(5) \quad \chi(\tau, 0) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) \mu^*(t - \tau) dt$$

il s'agit de la fonction de corrélation de  $\mu$ , qui s'écrit encore :

$$(6) \quad \chi(\tau, 0) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} |M(f)|^2 e^{j 2 \pi f \tau} df$$

où  $M$  est la transformée de Fourier de  $\mu$ .

La « coupe Doppler » est donnée par :

$$(7) \quad \chi(0, \nu) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu(t)|^2 e^{-j 2 \pi \nu t} dt .$$

Notons  $B_S$  et  $T_S$  les largeur de bande et durée utiles des signaux, qui sont celles de l'enveloppe complexe  $\mu(t)$ . Il n'est jamais très facile de définir précisément ces deux grandeurs. Nous choisirons de choisir ici les définitions de Woodward [32] et Rihaczek [27] :

$$B_S^2 = \frac{4 \pi^2}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |M(f)|^2 df$$

$$\text{et } T_S^2 = \frac{4 \pi^2}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |\mu(t)|^2 dt .$$

Pour avoir une bonne fonction d'ambiguïté il faudra de toute façon que la résolution sur les deux coupes ci-dessus soit bonne ; or la résolution en temps est directement liée à l'inverse de la bande utile (6) et la résolution en fréquence directement liée à l'inverse de la durée (7).

Un signal performant aura donc forcément une durée utile  $T_S$  grande et une largeur de bande  $B_S$  grande. Ce sont des signaux à grand produit  $B_S T_S$ .

Il reste maintenant à faire en sorte que dans tout le plan (retard, Doppler) les valeurs de  $|\chi(\tau, \nu)|$  restent faibles. Nous présentons ci-après deux classes de signaux possédant cette propriété.

### 3. Signaux de Costas

Dans l'optique d'obtenir des fonctions d'ambiguïté « optimales », c'est-à-dire présentant en pratique un pic très étroit au-dessus d'un piedestal, Costas a formalisé le problème de la synthèse des signaux par le biais de l'étude de matrices particulières liées à l'évolution de la fréquence instantanée en fonction du temps. Il propose de construire le signal global à partir de  $N$  signaux élémentaires : un signal élémentaire étant défini par sa durée  $T$  et sa fréquence instantanée  $f_i$  choisie parmi les fréquences de la forme  $\frac{n}{T}$ ,  $n = 1$  à  $N$  ; le signal global obtenu est à sauts de fréquence (« frequency hopping »).

La loi d'évolution de la fréquence instantanée du signal a l'allure suivante :

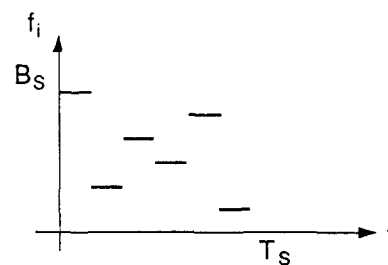


Schéma 1.

Lorsque les  $N$  signaux élémentaires arrivent avec un Doppler nul (cible immobile) ils sont détectés, retardés, et associés pour fournir la réponse du filtre correspondant au Doppler nul.

Si on considère maintenant la présence d'une autre cible, mobile cette fois-ci, le signal reçu est affecté de Doppler. Alors, si pour un certain retard on a  $k$  coïncidences entre le schéma  $f_i(t)$  du signal non dopplérisé et le schéma  $f_i(t)$  du signal dopplérisé, on aura une réponse à ces  $k$  signaux élémentaires en sortie du filtre à Doppler nul.

La valeur de  $k$  ne peut pas être nulle pour tous les décalages temporels et fréquentiels possibles mais elle peut être réduite à 1.

3.1. FORMALISATION DE COSTAS [9]

Le problème peut se modéliser de la façon suivante : plaçons  $N$  valeurs « 1 » et  $N^2 - N$  valeurs « 0 » dans une matrice de taille  $N \times N$  de telle sorte qu'il n'y ait qu'un seul « 1 » par ligne et par colonne.

Une telle matrice est alors une *matrice de Costas* [25] si et seulement si

« La fonction de coïncidence  $c(r, s)$  satisfait à la condition suivante :

$$(8) \quad c(r, s) \leq 1, \quad \forall (r, s) \neq (0, 0), \\ |r| \leq N - 1, \quad |s| \leq N - 1$$

$c(r, s)$  étant définie comme le nombre de coïncidences entre la matrice de départ et la matrice obtenue par translation aperiodique de  $r$  colonnes vers la droite et de  $s$  lignes vers le haut. »

Une matrice de Costas fournira alors un schéma  $f_i(t)$  permettant de construire un signal à fonction d'ambiguïté « optimale ».

Le problème ainsi posé est celui de la détermination des matrices qui satisfont la condition énoncée ci-dessus. En dépit de la simplicité de cet énoncé, les recherches dans ce domaine n'ont donné à l'heure actuelle que peu de résultats généraux et la détermination algébrique des matrices de Costas reste un problème ouvert.

Golomb, Taylor [15] et Chang [7] ont cependant donné quelques résultats théoriques en ce qui concerne notamment les constructions de matrices de Costas à l'aide des méthodes de Welch, Lempel, Golomb, basées sur des théorèmes de l'algèbre polynomiale.

Golomb et Taylor [15] ont tabulé l'ensemble des constructions algébriques connues pour des  $N$  allant jusqu'à 360. Ces auteurs ont également fait le lien entre les matrices de Costas et une partie de la théorie des jeux (échecs).

Une formalisation différente mais équivalente à la précédente est basée sur la méthode du « tableau des différences ».

Celui-ci est formé à partir d'une permutation d'entiers de 1 à  $N$  de la façon suivante :

— former la 1<sup>re</sup> ligne en prenant les différences entre 2 termes adjacents.

⋮

— former la  $i$ -ième ligne en prenant les différences entre 2 termes « éloignés » de  $i$  places dans la séquence.

— etc...

Si le tableau des différences n'admet aucun terme répétitif dans chaque ligne, on pourra en déduire un réseau, ou matrice, de Costas.

\* Exemple :  $N = 10$  ;

$$\{\theta_n\} = \{ 2 ; 4 ; 8 ; 5 ; 10 ; 9 ; 7 ; 3 ; 6 ; 1 \}$$

$\{\theta_n\}$	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
L										
1	2	4	-3	5	-1	-2	-4	3	-5	
2	6	1	2	4	-3	-6	-1	-2		
3	3	6	1	2	-7	-3	-6			
4	8	5	-1	-2	-4	-8				
5	7	3	-5	1	-9					
6	5	-1	-2	-4						
7	1	2	-7							
8	4	-3								
9	-1									

Pour chaque ligne de ce tableau, toutes les différences sont uniques, la séquence  $\{\theta_n\}$  est donc une séquence de Costas. La matrice de Costas associée est la suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si cette reformulation du problème semble attrayante, il faut souligner que la difficulté n'a pas été levée. En effet, il n'existe pas à l'heure actuelle de solution algébrique générale permettant de construire une séquence  $\{\theta_n\}$  de Costas même en s'aidant de cette reformulation.

Certaines séquences de Costas ont été découvertes grâce au théorème de Welch [15]. Un certain nombre de conjectures ont également été établies par Golomb : il existe au moins une séquence de Costas pour tout  $N$  (on sait [25] qu'elles existent jusqu'à  $N = 31$ ), le nombre de séquences de Costas augmente avec  $N$  mais la densité de ces séquences diminue. Pour des valeurs de  $N$  relativement faibles, il est possible de déterminer de manière exhaustive toutes les séquences de Costas en testant à l'aide du tableau des différences les  $N!$  séquences possibles pour chaque  $N$ .

Nous avons développé des programmes permettant la détermination des séquences de Costas jusqu'à  $N = 10$  [24]. Remarquons que le temps de calcul croît approximativement comme  $N!$ .

On obtient :

N	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de séquences de Costas	4	12	40	116	200	444	760	2160
Densité = $\frac{Nb}{N!}$	0,67	0,50	0,33	0,16	0,04	0,01	0,002	0,0006

\* *Remarque* :

— Le nombre de séquences de Costas est toujours pair, en effet, il est clair que si la séquence  $\{\theta_0; \dots; \theta_{N-1}\}$  est une séquence de Costas, la séquence  $\{\theta_{N-1}; \dots; \theta_0\}$  est aussi une séquence de Costas.

### 3.2. AUTOAMBIGUÏTÉ DES SIGNAUX DE COSTAS

Considérons une séquence de Costas  $\{\theta_n\}$  telle qu'elle a été définie précédemment, soit :

$\forall L \in \{1; \dots; N-2\} \quad \Delta_{L,r} \neq \Delta_{L,s} \text{ pour } r \neq s$   
où :

$$\Delta_{L,k} = \theta_{k+L} - \theta_k \text{ pour } k \in \{0; \dots; N-1-L\}.$$

Les signaux de Costas sont obtenus par « accolement des morceaux de cosinus » de fréquences instantanées  $f_n = \frac{\theta_n}{T}$  pour  $n = 0$  à  $N-1$  (cf. schéma 1).

L'enveloppe complexe  $\mu(t)$  d'un signal de Costas est donc :

$$(9) \quad \mu(t) = \sum_{n=0}^{N-1} p_n(t - nT)$$

où :  $p_n(t) = e^{j2\pi f_n t}$  pour  $0 \leq t \leq T$  et  $p_n(t) = 0$  ailleurs.

La durée totale du signal est  $T_s = NT$ , sa largeur de bande est  $B_s \approx \frac{N}{T}$ , de sorte que le produit Bande  $\times$  Durée est de l'ordre de  $N^2$ .

Le calcul de la fonction d'ambiguïté du signal de Costas se fait en remplaçant  $\mu(t)$  par son expression (9) dans (1). Une première expression globale a été obtenue par Costas et est rappelée en Annexe. En fait la forme de la fonction d'ambiguïté s'interprète beaucoup mieux si on développe le calcul de  $\chi(\tau, \nu)$  à l'aide de la fonction d'interambiguïté entre signaux élémentaires :

$$(10) \quad \phi_{nm}(\tau, \nu) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t) p_m^*(t - \tau) e^{-j2\pi\nu t} dt.$$

En remplaçant  $p_n$  et  $p_m$  par leurs valeurs on obtient finalement [9] :

$$(11) \quad \chi(\tau, \nu) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\phi_{nm}(\tau, \nu) + \sum_{m=0, m \neq n}^{N-1} \phi_{nm}(\tau - (n-m)T, \nu)] e^{-j2\pi\nu\tau}.$$

Ainsi :

$$(12) \quad \chi(0, \nu) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \phi_{nm}(0, \nu) e^{-j2\pi\nu\tau} = \frac{\sin(\pi N y)}{\pi N y} e^{-j\pi N y}$$

en définissant la fréquence normalisée  $y$  relativement à un motif  $T$  par :  $y = \nu T$ .

Le premier zéro de  $\chi(0, y)$  correspond à  $y = \pm \frac{1}{N}$  et mesure la « résolution » fréquentielle du signal.

En posant :

$$(13) \quad \chi'(\tau, 0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \phi_{nm}(\tau, 0)$$

on montre que :

$$(14) \quad \chi'(x, 0) = (1 - |x|) \frac{\sin(\pi N x)}{N \sin(\pi x)} e^{j\pi(N-1)x}$$

pour  $|x| < 1$

où le retard normalisé relativement à un motif  $T$  est défini par :  $x = \frac{\tau}{T}$ .

Le comportement au voisinage de l'origine de  $|\chi'(x, 0)|$  est donc de la forme  $\frac{\sin Nz}{N \sin z}$ .

Pour  $|x| \geq 1$ ,  $\chi'(x, 0) = 0$  et la valeur de  $\chi(\tau, 0)$  est liée aux termes d'intercorrélations  $\phi_{nm}$ .

D'autre part, les  $\phi_{nm}$  contribuent essentiellement à la formation des « lobes secondaires » et plus généralement du piedestal de la fonction d'ambiguïté. Alors que la somme faisant intervenir les  $\phi_{nm}$  engendre le pic central.

On montre par ailleurs que  $\phi_{nm} = 1$  pour :

$$(15) \quad \tau = \tau_p = (n - m)T = LT \text{ et } \nu = \nu_p = f_n - f_m = \frac{\Delta_{L,m}}{T}, \quad L = 1 \text{ à } N-1.$$

Le tableau des différences permet donc de « prédire » la localisation des pics secondaires, aux valeurs entières de  $x$  et  $y$ .

Il y aura  $N-L$  pics secondaires à  $\tau = LT$  pour  $L = 1$  à  $N-1$  et également  $N-L$  pics secondaires pour  $\nu = \pm \frac{L}{T}$  pour  $L = 1$  à  $N-1$ .

Ces pics secondaires sont de largeur  $2T$  en retard et ont un comportement du type  $\frac{\sin z}{z}$  en fréquence. Ils ont une valeur maximale de  $\frac{1}{\sqrt{B_s T_s}}$  ; mais lorsqu'ils

sont proches, des effets complexes de renforcement ou d'annulation font que cette valeur peut être supérieure à  $\frac{1}{N}$ , surtout près de l'origine ; ce qui rend le piedestal très peu uniforme près de l'origine. Ainsi la zone proche de l'origine sera « très active » (cf. fig.).

### 3.3. NOUVEAUX SIGNAUX DE COSTAS PONDÉRÉS

La coupe Doppler de  $\chi$  fait de toute façon apparaître une allure en sinus cardinal. Ceci est d'ailleurs un point que nous retrouvons pour les signaux BPSK. Il paraît donc intéressant d'essayer de réduire les lobes secondaires de ce sinus cardinal et pour cela de moduler ou de pondérer l'enveloppe  $\mu(t)$ .

On propose donc d'associer une pondération à chaque « morceau de cosinus ». Ainsi à la séquence

$\{\theta_n\}$  de Costas on associe  $\{q_n\} = \{q_0; \dots; q_{N-1}\}$  de telle sorte que l'enveloppe complexe soit :

$$(16) \quad \mu(t) = \sum_{n=0}^{N-1} q_n p_n(t - nT).$$

Remarquons que la séquence pondérée a en général une durée équivalente moins grande que la séquence non pondérée, ainsi on prolonge cette séquence par périodisation avant de la pondérer afin de garder un produit Bande  $\times$  Durée identique.

On donne en Annexe le calcul de  $\chi(\tau, \nu)$  pour ces nouveaux signaux. On obtient une formule du même type que celle que Costas avait donnée pour les signaux non pondérés. Ce sont ces formules que nous utiliserons pour l'obtention des résultats numériques qui suivent.

3.4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Donnons tout d'abord les fonctions d'ambiguïté de quelques signaux classiques, pour mettre en évidence les performances des signaux de Costas.

Tous les tracés donnés représentent les *modules* des fonctions d'ambiguïté.

Les fréquences ainsi que les retards sont *normalisés par rapport à la durée  $T_S$*  du signal :  $\nu_n = \nu T_S$  et  $\tau_n = \frac{\tau}{T_S}$ .

Le premier tracé (fig. 1) correspond à une sinusoïde de durée limitée.

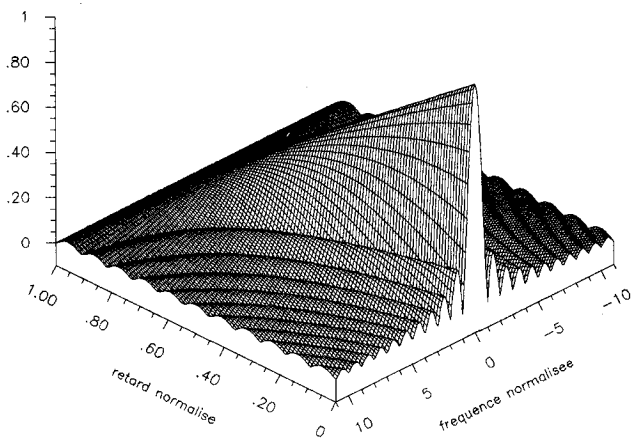


Fig. 1. — Module de la fonction d'ambiguïté. Sinusoïde limitée.

On reconnaît sur l'axe Doppler un sinus cardinal, transformée de Fourier du carré du module de l'enveloppe complexe (ici une « porte ») et un triangle sur l'axe retard, autocorrélation de l'enveloppe complexe.

On montre ensuite (fig. 2) la fonction d'ambiguïté correspondant à la séquence harmonique  $S_H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ . On reconnaît une modulation linéaire de fréquence, ici quantifiée par paliers.

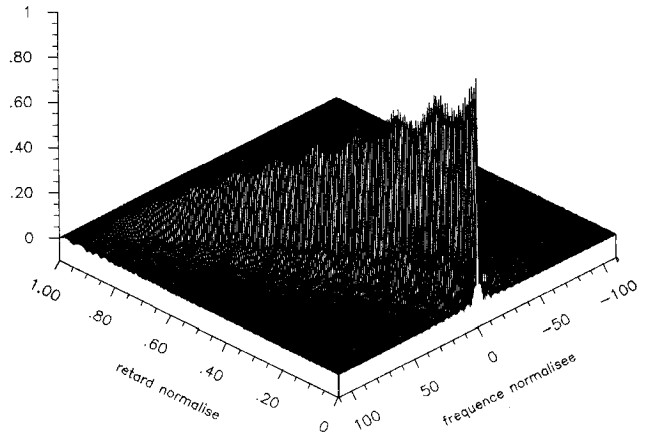


Fig. 2. — Module de la fonction d'ambiguïté. Séquence 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

On présente ensuite (fig. 3) la séquence  $\{2; 5; 7; 3; 10; 1; 4; 6; 8; 9\}$ , choisie au hasard. Ainsi on a :

	2	5	7	3	10	1	4	6	8	9
L										
1	3	2	-4	7	-9	3	2	2	1	
2	5	-2	3	-2	-6	5	4	3		
3	1	5	-6	1	-4	7	5			
4	8	-4	-3	3	-2	8				
5	-1	-1	-1	5	-1					
6	2	1	1	6						
7	4	3	2							
8	6	4								
9										

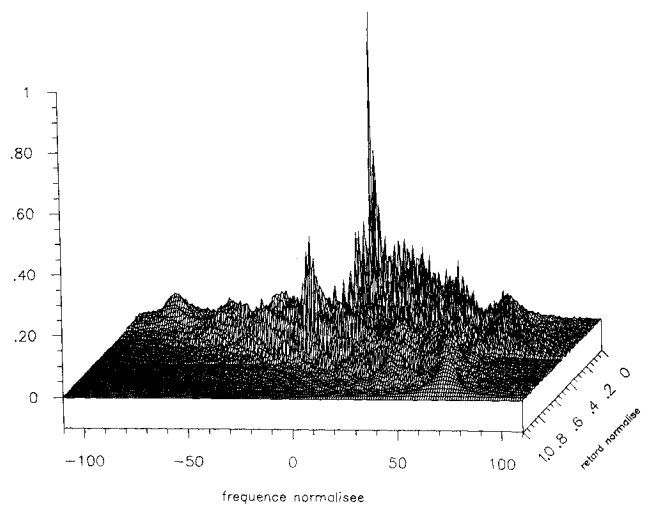


Fig. 3. — Module de la fonction d'ambiguïté. Séquence 2, 5, 7, 3, 10, 1, 4, 6, 8, 9.

Cette séquence n'est donc pas une séquence de Costas.

On constate évidemment un fort pic secondaire pour  $(x, y) = (5, -1)$ , i.e.  $\tau_n = 0,5$  et  $\nu_n = -10$ .

La séquence de Costas  $S_C = \{2; 4; 8; 5; 10; 9; 7; 3; 6; 1\}$  est ensuite étudiée (fig. 4).

On constate que les pics secondaires prévisibles sont bien là ; on voit notamment le pic secondaire à  $\tau_n = 0,9$  et  $\nu_n = -10 [(x, y) = (9, -1)]$  au premier plan en vue « depuis l'axe retard ».

On remarque particulièrement la zone de « forte activité » près de l'origine.

On note l'importance des pics secondaires (de l'ordre de 40 %).

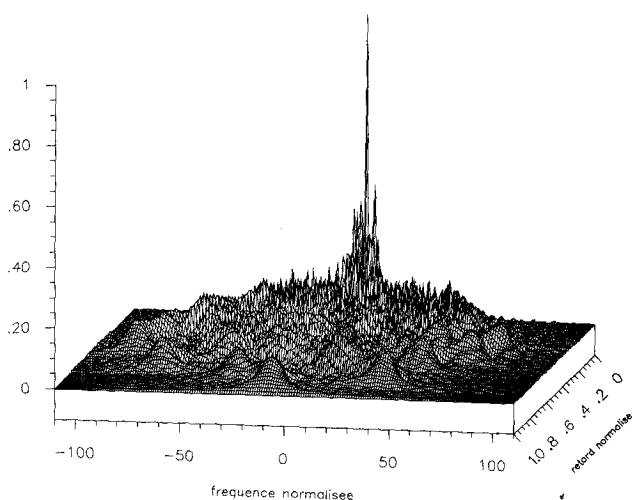


Fig. 4. — Module de la fonction d'ambiguïté. Séquence de Costas 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1.

Des coupes sont également effectuées (fig. 5). On retrouve les comportements attendus :

- sinus cardinal sur l'axe Doppler
- $\frac{\sin Nz}{N \sin z}$  près de l'origine sur l'axe retard.

Globalement, ces signaux se révèlent relativement satisfaisants. Comme par ailleurs ils sont de mise en œuvre facile, ils connaissent actuellement un certain succès [3], [25].

Pour les signaux de Costas pondérés, on utilise une pondération « gaussienne » du type suivant :

$$\text{pondération} = \exp - \left[ \frac{\left(k - \frac{N}{2}\right)^2}{2\sigma^2} \right]$$

où  $k$  est le rang des éléments de la séquence de Costas.

On constate (fig. 6) que, si la pondération réduit les lobes secondaires sur l'axe Doppler, ceux-ci ne sont pas réduits dans le reste du plan (retard, Doppler). Ceci même avec une pondération « sévère » ( $\sigma \approx 5$ ). On note également l'apparition d'un pic « de périodisation ». Cette pondération n'est donc pas très efficace ici.

Certains auteurs [11] ont proposé une pondération à la fois temporelle et fréquentielle, d'autres ont proposé de rajouter des sauts de phase à chaque début de motif, ou encore de combiner sauts de

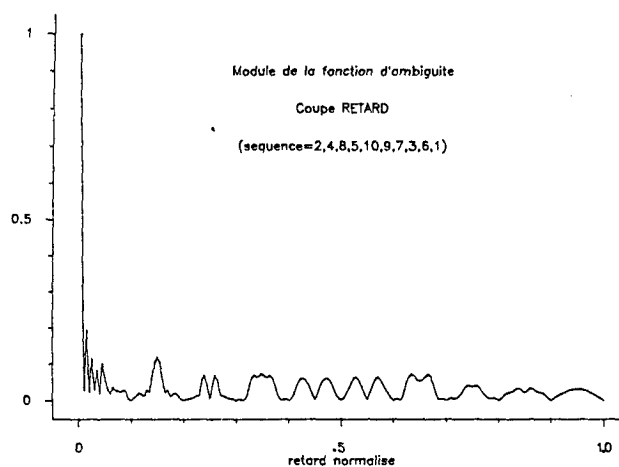
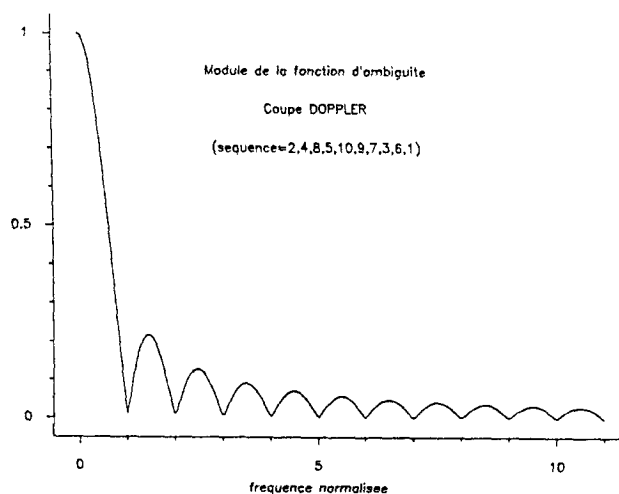


Fig. 5. — Coupes Retard et Doppler. Séquence de Costas 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 1.

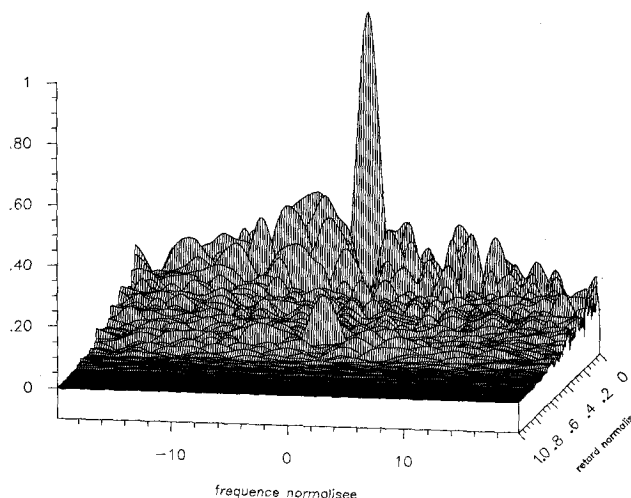


Fig. 6. — Module de la fonction d'ambiguïté. Séquence 7, 3, 6, 1, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1, 2, 4, 8, 5, avec pondération.

phase et de fréquence [13], les mêmes auteurs proposent aussi d'utiliser un train de pulses de Costas. Dans tous les cas, les résultats obtenus sont du même ordre.

### 4. Signaux BPSK

#### 4.1. GÉNÉRATION DES SIGNAUX BPSK

Ces signaux sont aussi des signaux longs et à large bande, mais ils sont codés en phase. Ils sont obtenus en modulant la phase de la porteuse. La séquence de modulation  $c(t)$  est une séquence binaire de longueur maximale (SBLM) ou pseudo-aléatoire :

$$(17) \quad s(t) = \cos [2 \pi f_0 t + \lambda c(t)]$$

où  $c(t)$  est la SBLM, à valeurs  $\pm 1$ . Les propriétés de corrélation de ces signaux ont été étudiées par exemple par Birdsall [5] et [28]. Nous choisirons ici  $\lambda = \pi/2$ , ce qui correspond à une modulation *binnaire de phase*, mais aussi — et c'est un des avantages — à une modulation *d'amplitude* de la porteuse  $f_0$  :

$$(18) \quad s(t) = \cos \left[ 2 \pi f_0 t + \frac{\pi}{2} c(t) \right] = c(t) \sin 2 \pi f_0 t .$$

L'enveloppe complexe du signal BPSK est donc :

$$(19) \quad \mu(t) = -j c(t)$$

et les propriétés d'ambiguïté sont directement liées à celles de la SBLM  $c(t)$ . Comme la séquence  $c(t)$  est pseudo-aléatoire, on peut penser qu'elle pourra conduire à de bonnes propriétés dans le plan (retard, Doppler).

Le processus de génération des SBLM, ainsi que leurs propriétés sont largement connus et peuvent être trouvés dans [29], [10], [6]. Rappelons simplement que la méthode la plus courante pour générer ces signaux est l'utilisation de registres à décalage, bouclés suivant une certaine loi ; cette loi est liée au polynôme de récurrence de la séquence. La séquence est de longueur maximale si le polynôme de récurrence est primitif. Si le polynôme est de degré  $n$ , la SBLM a pour longueur  $2^n - 1 = N$ .

Pour  $n$  donné tel que  $2^n - 1$  soit premier, on a :  $\frac{2^n - 2}{n}$  polynômes primitifs distincts de degré  $n$ , soit  $\frac{2^n - 2}{n}$  SBLM distinctes.

Les propriétés de *corrélation* des SBLM sont habituellement étudiées pour les séquences *bouclées* c'est-à-dire périodisées. On rappelle que pour une séquence  $c(t)$  de période  $T_S = N\theta$  ( $\theta$  est l'intervalle de temps sans changement d'état) la fonction de corrélation normée est périodique et très « pointue » (donc possède une bonne résolution en retard) :

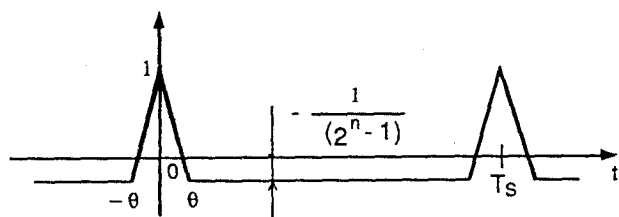


Schéma 2.

Lorsqu'on utilise — et c'est le cas pour les problèmes de radar-sonar actif — un seul motif de la SBLM (1 seule période) la fonction de corrélation se modifie et certains secondaires apparaissent.

#### 4.2. FONCTIONS D'AMBIGUÏTÉ DES SIGNAUX BPSK

Le calcul explicite de la fonction d'ambiguïté en translation (1) n'est pas facile puisqu'il faut connaître la suite des changements d'état de la SBLM  $c(t)$ .

L'étude analytique générale ne peut être faite que *statistiquement*, en considérant que chaque séquence SBLM est la réalisation d'un processus aléatoire. On a ainsi pu définir et caractériser l'*espérance* d'ambiguïté de ce processus aléatoire ainsi que sa *variance* [17], [14]. Ceci donne une idée moyenne sur l'allure de  $\chi$  pour toute la classe des séquences SBLM ayant un produit  $B_S T_S$  donné.

L'expression de l'espérance d'ambiguïté normalisée obtenue est :

$$(20) \quad E \{ \chi(\tau, \nu) \} = \Lambda_\theta(\tau) \Lambda_{T_S}(\tau) \times \text{sinc } \nu (T_S - |\tau|) e^{-j\pi\nu\tau}$$

où :

$$\text{sinc } x = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad \text{et} \quad \Lambda_{T_S}(t) = \left( 1 - \frac{t}{T_S} \right), \quad |t| < T_S .$$

On voit qu'on retrouve pour les coupes Doppler et retard les formes moyennes attendues. La coupe retard  $E \{ \chi(\tau, 0) \}$  est toujours le triangle de la fonction d'autocorrélation « moyenne » de la SBLM. Le pouvoir de résolution moyen en Doppler est  $1/T_S$ , et le pouvoir de résolution moyen en retard est  $1/B_S$ .

La coupe Doppler moyenne  $E \{ \chi(0, \nu) \}$  a toujours la forme en  $\text{sinc}(\nu T_S)$ , liée à l'inverse de la durée  $T_S$  du signal.

Dans tout le plan  $(\tau, \nu)$  les « secondaires » de la fonction d'ambiguïté sont liés au calcul de  $\text{Var } \chi$  ; on a pu montrer [17], [14] qu'ils restent de l'ordre de  $\frac{1}{\sqrt{B_S T_S}}$ .

Les calculs numériques effectués ci-après pour certains cas précis de SBLM vont préciser cela.

#### 4.3. SIGNAUX BPSK PONDÉRÉS [33]

Les seuls lobes secondaires présents ici sont ceux correspondant au sinus cardinal sur l'axe Doppler. Ainsi qu'on l'a fait pour les signaux de Costas, on propose de réduire les secondaires en pondérant l'amplitude de la SBLM. Si la pondération introduit une perte importante en résolution Doppler, le prolongement partiel du motif permet de remédier à ce problème. Ce prolongement fait alors apparaître un pic dû à la périodisation de la SBLM. Mais ceci n'est pas important car ce pic secondaire apparaît avec un retard très grand (de l'ordre de  $T_S$ ) et ne perturbe pas le voisinage de l'origine du plan  $(\tau, \nu)$ . Par ailleurs dans les résultats numériques qui suivent, ce prolongement a été optimisé : on fait en



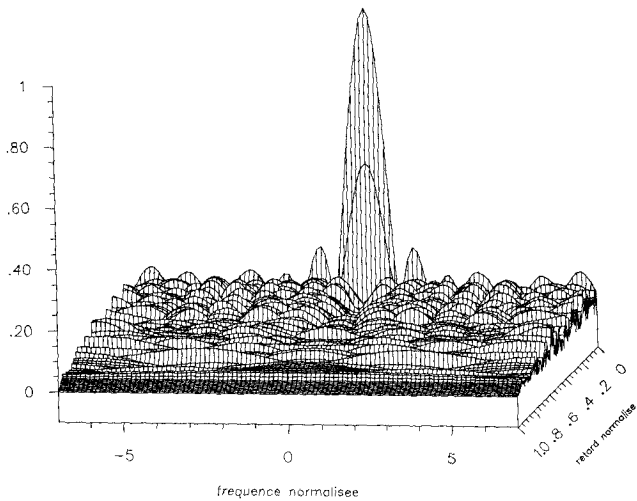


Fig. 7. — Module de la fonction d'ambiguïté. Signal BPSK-127.

sorte que le pic de périodisation ne dépasse pas le niveau du piédestal et que les lobes secondaires du sinus cardinal soient aussi ramenés à ce niveau.

#### 4.4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES POUR LES SIGNAUX BPSK

On utilise ici des SBLM de longueur 127. Ceci représente le produit  $B_S T_S$  le plus proche de celui (100) utilisé pour les signaux de Costas.

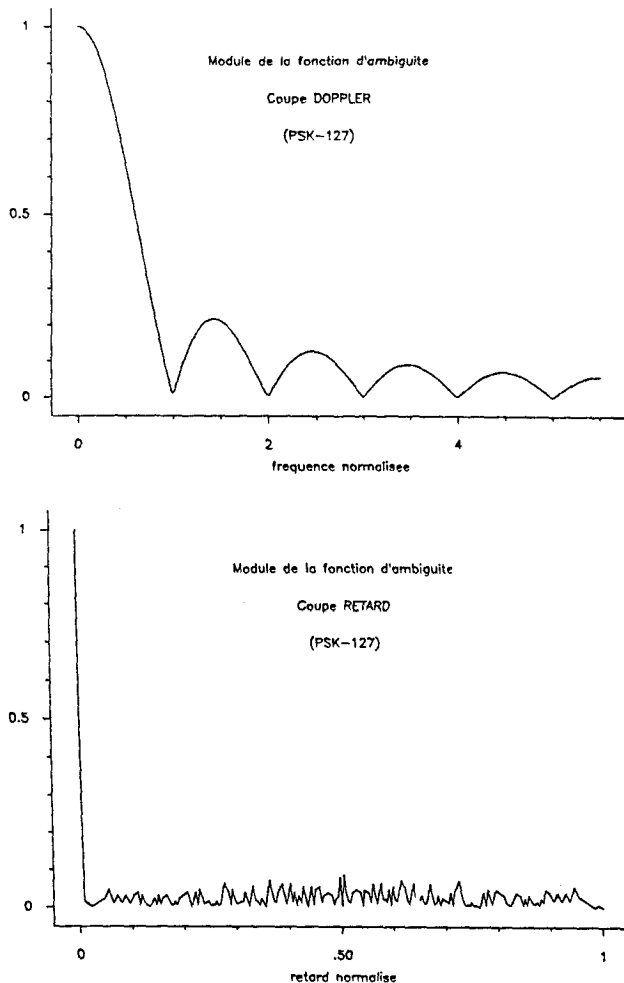


Fig. 9. — Coupes Retard et Doppler. Signal BPSK-127.

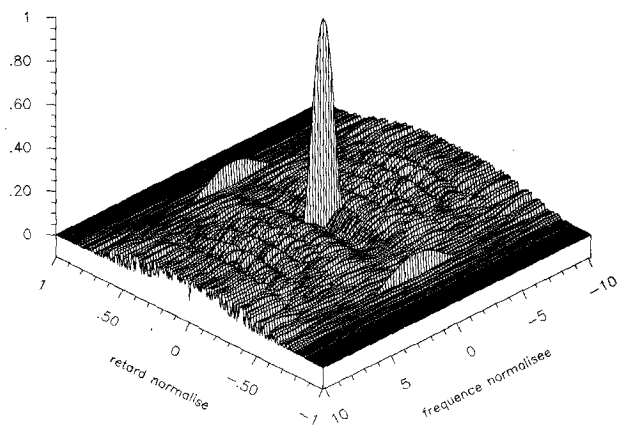


Fig. 8. — Module de la fonction d'ambiguïté. Signal BPSK-127, périodisé et pondéré.

Les diverses vues, et coupes (fig. 9 et 10) montrent le « bon comportement en ambiguïté » du « PSK-127 ». Le « PSK-127 » non pondéré est présenté en figure 7.

Les secondaires restent de l'ordre de 5 % dans tout le plan, en dehors de l'axe Doppler où les lobes sont de l'ordre de 20 %. En pondérant la séquence on fait disparaître ces lobes (fig. 8). Le pic de périodisation apparaît pour un retard de l'ordre de  $T_S$ .

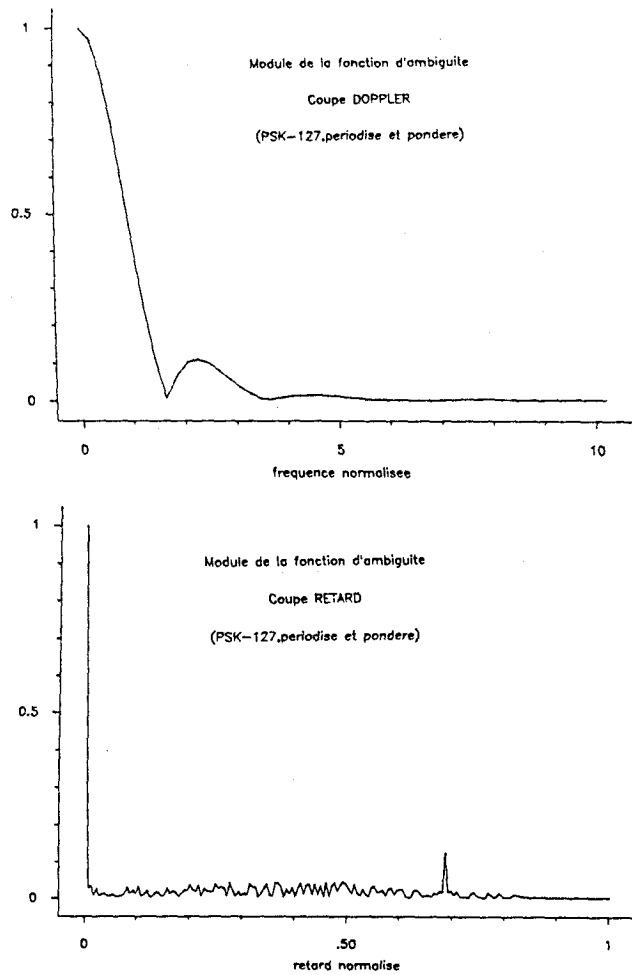


Fig. 10. — Coupes Retard et Doppler. Signal BPSK-127, périodisé et pondéré.

### 5. Signaux mixtes

Les deux classes de signaux étudiés ci-dessus ont des performances relativement bonnes en ce qui concerne l'autoambiguïté car les lois de modulation (de fréquence pour les signaux de Costas, de phase pour les signaux BPSK) ont un certain aspect aléatoire. On peut songer à mélanger les divers types de lois pour améliorer peut-être encore les performances.

#### 5.1. SIGNAUX FM-PSK

La combinaison la plus simple de signaux modulés à la fois en fréquence et en phase consiste à prendre un signal modulé linéairement en fréquence (MLF) pour lequel on sait que la fonction d'ambiguïté présente un « mur » dans le plan  $(\tau, \nu)$  et de rendre aléatoire la loi de modulation en rajoutant une modulation de phase pseudo-aléatoire.

On a choisi un signal de base MLF à 31 pseudo-périodes et on module la phase de façon binaire (0 ou  $\pi$ ) à chaque pseudo-période, à l'image d'une séquence SBLM de longueur 31.

Le produit  $B_S T_S$  du signal ainsi obtenu est toujours de l'ordre de 100 et on peut vérifier que la bande effective est du même ordre que celle d'un signal MLF de même produit  $B_S T_S$ .

La figure 11 donne la fonction d'ambiguïté obtenue. On reconnaît encore un peu la trace du « mur d'ambiguïté » dans le plan  $(\tau, \nu)$ . Globalement les secondaires sont de l'ordre de 20 % dans le plan : ce résultat est meilleur que celui obtenu avec le signal MLF ou avec un signal de Costas de même produit  $B_S T_S$  (pour lequel les secondaires sont de l'ordre de 40 %, cf. fig. 4) mais moins bon que celui obtenu avec le signal BPSK équivalent.

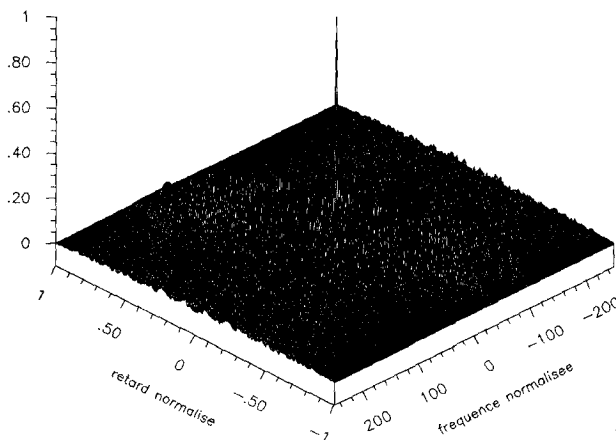


Fig. 11. — Module de la fonction d'ambiguïté. Signal « FM-PSK ».

#### 5.2. SIGNAUX FM-CODÉS

Une autre possibilité est de redistribuer, sur la largeur de la bande initiale du signal MLF, les différentes « fréquences » possibles. C'est la même idée qui a conduit au schéma de  $f_i(t)$  (schéma 1) pour les signaux de Costas. On propose ici de

redistribuer les fréquences non suivant une séquence de Costas, mais suivant une SBLM.

Pour avoir toujours le même ordre de grandeur du produit  $B_S T_S$ , on part d'un signal MLF de 63 pseudo-périodes (donc  $B_S T_S$  de l'ordre de 100 ou 127). On numérote les 63 pseudo-périodes et on les répartit temporellement suivant la suite temporelle des 63 états d'une SBLM de longueur 63. Il s'agit donc de l'accolement de morceaux de pseudo-périodes. La largeur de bande du signal obtenue est la même que celle du signal MLF initial. Seule la distribution a changé. Ceci est très proche des idées de Costas (pour le même produit  $B_S T_S = 100$ , Costas prendrait 10 morceaux de 10 fréquences différentes ; ici on répartit temporellement 63 pseudo-périodes).

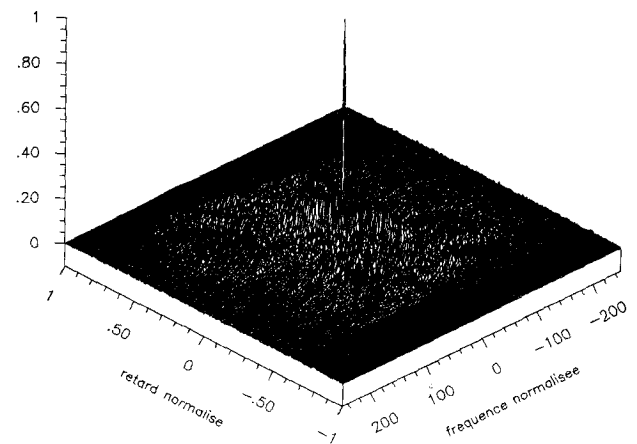


Fig. 12. — Module de la fonction d'ambiguïté. Signal « FM-codé ».

La figure 12 donne la fonction d'ambiguïté obtenue. Les secondaires sont mieux répartis dans tout le plan  $(\tau, \nu)$  que dans le cas du signal précédent FM-PSK. Ces secondaires sont de l'ordre de 15 % ce qui est quand même bien mieux que le résultat obtenu avec le signal de Costas équivalent mais reste toujours moins bon que le seul signal BPSK de produit  $B_S T_S$  égal à 127.

#### 5.3. SIGNAUX DE COSTAS MODIFIÉS ET SIGNAUX « SPÉCIAUX »

Une séquence de Costas ( $S_C$ ) a été ici périodisée, pondérée par une courbe de Gauss et modulée par une SBLM (modulation binaire de phase à chaque changement de fréquence).

Le résultat obtenu (fig. 13) est très intéressant, le piédestal étant d'un niveau très faible autour de l'origine : ceci est logique puisque le produit  $B_S T_S$  est passé de 127 à 1 270...

Dans [24] on s'intéresse également à des « pseudo-séquences de Costas » ; on donne en particulier en figure 14 l'exemple correspondant à une séquence obtenue de la façon suivante : on part de la séquence de Bulirsch  $S_B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 32\}$  qu'on réorganise suivant la séquence de Costas  $S_C = \{2; 4; 8; 5; 10; 9; 7; 3; 6; 1\}$ , obtenant ainsi la séquence  $\{2; 4; 16; 6; 32; 24; 12; 3; 8;$

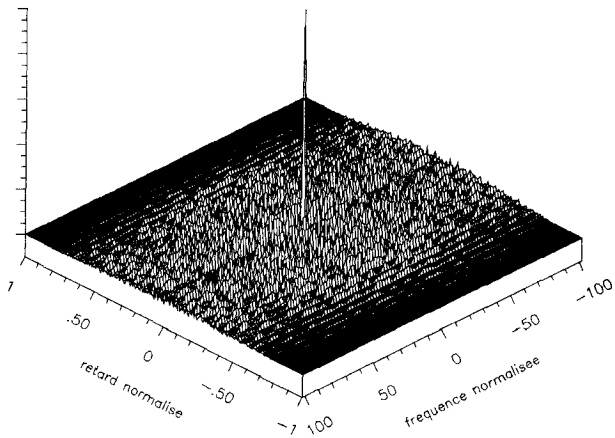


Fig. 13. — Module de la fonction d'ambiguïté. Séquence de Costas périodisée, pondérée, modulée par un signal BPSK.

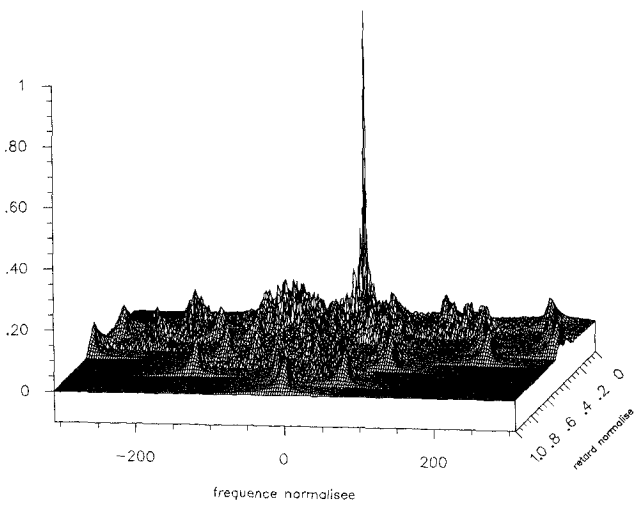


Fig. 14. — Module de la fonction d'ambiguïté. Séquence 2, 4, 16, 6, 32, 24, 12, 3, 8, 1.

1}. Le produit  $B_S T_S$  obtenu est de 300. Vis-à-vis de la séquence de Costas la zone près de l'origine est moins active.

## 6. Interambiguïté

Nous nous intéressons maintenant à l'interambiguïté entre signaux au sein d'une classe donnée. Les propriétés d'interambiguïté deviennent importantes lorsqu'on veut utiliser les signaux d'une classe comme mots d'un alphabet d'émission (communications), lorsqu'on veut changer de code émis en détection... Là encore on recherche naturellement une interambiguïté aussi faible que possible entre mots d'une même famille (« quasi-orthogonalité »).

### 6.1. INTERAMBIGUÏTÉ DES SIGNAUX DE COSTAS

Pour la famille de produit  $B_S T_S = 100$  ( $N = 10$ ), on a vu qu'il existait 2 160 séquences différentes. Le calcul théorique de ces interambiguïtés est a priori

très fastidieux et le calcul numérique des  $C_{2160}^2$  couples possibles presque impensable.

Il est clair que suivant le nombre de motifs de base identiques dans les deux séquences choisies, l'interambiguïté sera plus ou moins forte. On donne ci-après deux types d'exemples.

a) On choisit un couple de séquences de Costas très « proches » (elles ne diffèrent que par trois motifs sur dix) :  $S_1 = \{5, 10, 4, 1, 2, 6, 8, 3, 9, 7\}$  et  $S_2 = \{5, 10, 4, 1, 2, 6, 8, 7, 3, 9\}$ . Le calcul de l'interambiguïté normalisée (3) entre ces deux séquences est donné en figure 15.

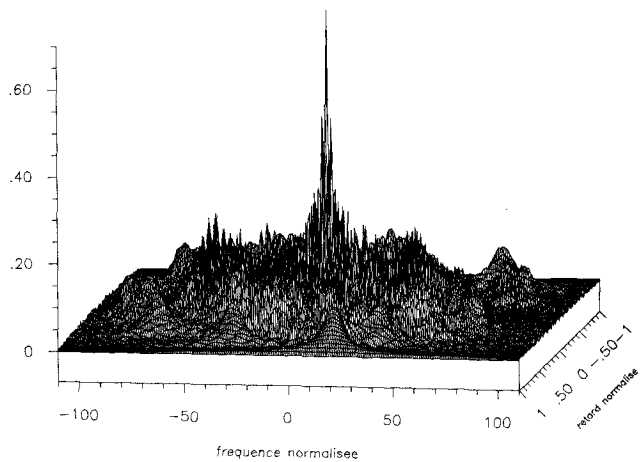


Fig. 15. — Module de la fonction d'interambiguïté. Séquences 5, 10, 4, 1, 2, 6, 8, 3, 9, 7 et 5, 10, 4, 1, 2, 6, 8, 7, 3, 9 (signaux de Costas).

Notons que le calcul normalisé effectué permet de comparer directement les valeurs obtenues pour l'interambiguïté aux valeurs des secondaires obtenus pour l'autoambiguïté. On note bien évidemment des valeurs fortes pour l'interambiguïté allant jusqu'à 65 %.

b) On choisit un couple « optimal » de séquences (elles diffèrent par huit éléments sur dix) :  $S_1 = \{6, 2, 5, 10, 8, 7, 9, 3, 4, 1\}$  et  $S_2 = \{8, 2, 1, 7, 9, 4, 5, 3, 6, 10\}$ . La figure 16 donne le résultat obtenu :

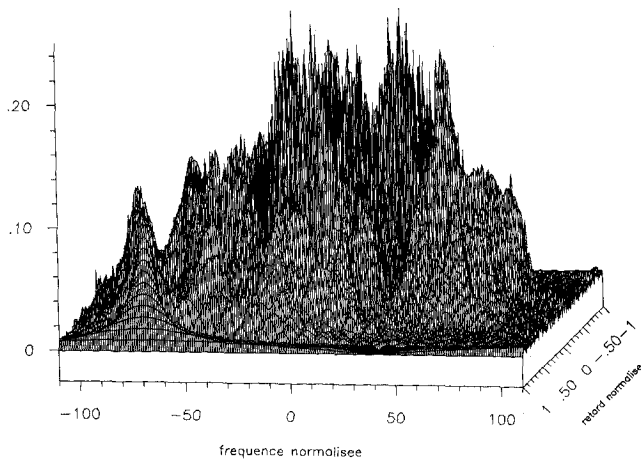


Fig. 16. — Module de la fonction d'interambiguïté. Séquences 6, 2, 5, 10, 8, 7, 9, 3, 4, 1 et 8, 2, 1, 7, 9, 4, 5, 3, 6, 10 (signaux de Costas).

fonction d'interambiguïté est plus uniforme que précédemment et le niveau maximal ne dépasse pas 25 %.

Signalons à ce propos que ces mauvaises performances en interambiguïté sont à l'origine de l'article de Bellegarda [3]; l'auteur trouvant par ailleurs que les propriétés d'autoambiguïté des signaux de Costas sont « bonnes », propose de construire de nouveaux signaux de type « Costas » qui auraient de meilleures performances en interambiguïté tout en acceptant une dégradation des propriétés d'autoambiguïté.

6.2. INTERAMBIGUÏTÉ DES SIGNAUX BPSK

Au sein de la famille des SBLM de produit bande  $\times$  durée 127, on peut s'intéresser à un couple quelconque : les propriétés d'interambiguïté sont les mêmes en moyenne pour toute la famille [17]; les valeurs moyennes attendues pour les interambiguïtés sont du même ordre que les secondaires des autoambiguïtés  $\left( \frac{1}{\sqrt{B_S T_S}} \right)$ .

La figure 17 donne un exemple de calcul d'interambiguïté pour un couple de séquences prises au hasard : on voit qu'on a de bons résultats puisque les amplitudes obtenues ne dépassent pas 20 %; elles sont par ailleurs assez uniformément réparties dans le plan  $(\tau, \nu)$ .

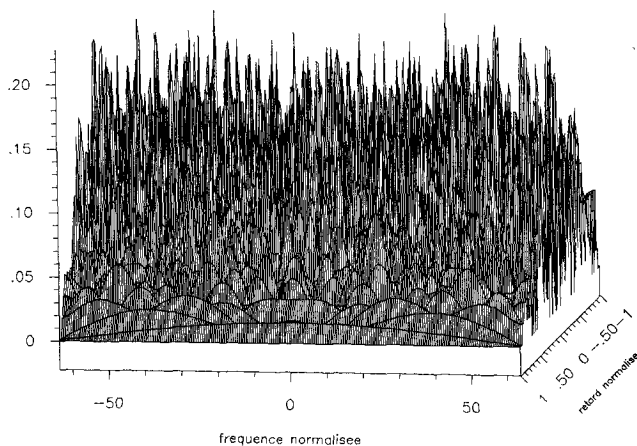


Fig. 17. — Module de la fonction d'interambiguïté. Interambiguïté entre deux signaux BPSK-127 différents.

7. Conclusion

Nous avons présenté essentiellement ici deux classes de signaux à grand produit bande  $\times$  durée; nous nous sommes intéressés à leurs performances en termes de résolution temps-fréquence (ambiguïté), et en termes d'orthogonalité (interambiguïté). Nous avons aussi proposé diverses variantes originales à partir de ces signaux, en mixant les codages de phase et de fréquence, toujours dans l'idée de faire en sorte que la loi de modulation soit la moins structurée possible dans le plan temps-fréquence. Ceci tend alors à diminuer et répartir les secondaires de la

fonction d'ambiguïté. Rappelons encore [17] certains essais où l'on prenait comme signal d'émission une réalisation d'un processus aléatoire. Les résultats obtenus sont du même type.

Globalement il ressort que les signaux de Costas, tout en étant nettement meilleurs que d'autres signaux classiques modulés en fréquence, ne sont quand même pas les plus performants, ni en termes d'autoambiguïté, ni en termes d'interambiguïté. Leur seul avantage, avec peut-être la facilité de modulation et la richesse de l'alphabet qu'ils peuvent constituer, est que l'on peut « prédire » à l'avance où se trouvent les secondaires dans le plan  $(\tau, \nu)$  à l'aide du tableau des différences. Cependant les secondaires près de l'origine restent importants.

Les signaux BPSK se révèlent faciles à engendrer, à démoduler, et ont des performances très bonnes, et en tout cas les meilleures à ce jour (à produit bande  $\times$  durée donné), aussi bien en termes d'autoambiguïté que d'interambiguïté. Ils permettent donc une analyse fine des structures temps-fréquence de cibles mobiles [21]. Si, en test numérique, les séquences SBLM sont très utilisées, les signaux BPSK ne le sont que très peu en radar et sonar actif et on ne peut qu'insister sur leurs propriétés remarquables pour favoriser leur utilisation dans tous les systèmes de détection active. En communication de messages, par contre, le nombre trop peu élevé de séquences SBLM de produit bande  $\times$  durée donné (18 pour  $B_S T_S = 127$ ) fait qu'on utilisera, dans le cas où on a besoin d'un alphabet très riche, plutôt des séquences de Gold par exemple [16].

Remerciements : Cette étude a été conduite avec le soutien de la D.C.N.

Manuscrit reçu le 4 septembre 1989.

ANNEXE

Calcul de la fonction d'ambiguïté d'un réseau de Costas pondéré

a) Rappel [9]; fonction d'ambiguïté d'un réseau de Costas non pondéré

En posant  $\tau = kT + \delta$ ;  $0 \leq \delta \leq T$ ;  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , Costas a obtenu la relation :

$$\chi^*(\tau, \nu) = \sum_{n=0}^{N-1-k} A_n + \sum_{n=0}^{N-2-k} B_n$$

où :

$$A_n = \frac{T - \delta \sin(\pi\beta(T - \delta))}{NT \pi\beta(T - \delta)} \times e^{j\pi[\beta(2kT + 2nT + T + \delta) - 2f_n\delta]}$$

avec :  $\beta = f_n - f_{n+k} + \nu$

et :

$$B_n = \frac{\delta \sin(\pi\gamma\delta)}{NT \pi\gamma\delta} e^{j\pi[\gamma(2kT + 2nT + 2T + \delta) - 2f_n\delta]}$$

avec :  $\gamma = f_n - f_{n+k+1} + \nu$ .

b) *Fonction d'ambiguïté d'un réseau de Costas pondéré*

La fonction d'ambiguïté est donnée par :

$$\chi^*(\tau, \nu) = \frac{1}{NT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^*(\sigma) \mu(\sigma - \tau) e^{j2\pi\nu\sigma} d\sigma.$$

Ainsi :

$$\chi^*(\tau, \nu) = \frac{1}{NT} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{N-1} q_m p_m^*(\sigma - mT) \times \sum_{n=0}^{N-1} q_n p_n(\sigma - \tau - nT) e^{j2\pi\nu\sigma} d\sigma.$$

Le produit des termes  $p_m^*(\cdot) p_n(\cdot)$  est non nul lorsque les deux intervalles définis par :

$$mT \leq \sigma \leq (m+1)T$$

$$\text{et } \delta + (k+n)T \leq \sigma \leq \delta + (k+n+1)T$$

ne sont pas disjoints.

On a donc 4 cas :

— 1<sup>er</sup> cas :

$$\delta + (k+n)T \geq (m+1)T \Rightarrow k+n \geq m+1$$

l'intégrale est alors nulle.

— 2<sup>e</sup> cas :

$$mT < \delta + (k+n)T < (m+1)T \Rightarrow k+n = m$$

l'intégrale est prise entre  $\delta + (k+n)T$  et  $(m+1)T = (k+n+1)T$ .

— 3<sup>e</sup> cas :

$$\delta + (k+n)T < mT < \delta + (k+n+1)T \Rightarrow k+n+1 = m$$

l'intégrale est prise entre  $mT = (k+n+1)T$  et  $\delta + (k+n+1)T$ .

— 4<sup>e</sup> cas :

$$mT \geq \delta + (k+n+1)T \Rightarrow k+n+1 < m$$

l'intégrale est alors nulle.

Il vient donc :

$$\chi^*(\tau, \nu) = \sum_{n=0}^{N-1-k} A'_n + \sum_{n=0}^{N-2-k} B'_n$$

où :

$$A'_n = \frac{1}{NT} q_{k+n} q_n \int_{(k+n)T+\delta}^{(k+n+1)T} e^{-j2\pi f_{k+n}(\sigma - kT - nT)} \times e^{j2\pi f_n(\sigma - kT - nT - \delta)} e^{j2\pi\nu\sigma} d\sigma.$$

Un calcul immédiat conduit à :  $A'_n = q_n q_{k+n} A_n$  où  $A_n$  est donné en a).

D'autre part :

$$B'_n = \frac{1}{NT} q_{k+n+1} q_n \int_{(k+n+1)T}^{(k+n+1)T+\delta} e^{-j2\pi f_{k+n+1}(\sigma - kT - nT - T) + j2\pi f_n(\sigma - kT - nT - \delta) + j2\pi\nu\sigma} d\sigma$$

De la même façon on obtient :  $B'_n = q_n q_{k+n+1} B_n$  où  $B_n$  est donné en a).

On obtient donc pour le réseau de Costas pondéré les mêmes formules que pour le réseau non pondéré en remplaçant  $A_n$  et  $B_n$  par  $A'_n$  et  $B'_n$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Y. ARQUÈS, *Décisions en traitement du signal*. Masson (CNET/ENST) 1979.
- [2] A. BERTHON, *Fonctions d'ambiguïté généralisées et synthèse de signaux d'ambiguïté donnée*. Proceedings Colloque GRETSI, Nice, juin 1987.
- [3] J. R. BELLEGARDA, *Time frequency properties of extended quadratic congruential Frequency Hop Signals*. Proceedings of ICASSP, Glasgow, May 1989.
- [4] G. J. A. BIRD, *Radar precision and resolution*. Pentech Press, London 1974.
- [5] T. G. BIRDSALL, R. M. HEITMEYER, K. METZGER, *Modulation by linear maximal shift register sequences : amplitude biphase and complement phase modulation*. Cooley Electronics Lab., T. Report 215, December 1971.
- [6] M. BOUTHÉON, *Génération de séquences binaires cycliques de longueur maximale*. Rap. CEPHAG n° 8/66.
- [7] W. CHANG, *A remark on the definition of Costas arrays*. Proceedings of the IEEE, vol. 75, April 1987.
- [8] C. E. COOK, M. BERNFELD, *Radar signals*. Academic Press, New York, 1967.
- [9] J. P. COSTAS, *A study of a class of detection waveforms having nearly ideal range-Doppler ambiguity properties*. Proceedings of the IEEE, vol. 72, August 1984.
- [10] F. DE COULON, *Théorie et traitement des signaux*. Traité d'électricité, d'électronique et d'électrotechnique, Dunod, 1984.
- [11] M. DUKEMAN, A. HAMMER, *Weighting effects on Costas array ambiguity function*. International Conference on Radar, Paris, April 1989.
- [12] P. FLANDRIN, *Time frequency and time scale*. IEEE, 4th ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling, p. 77, 80, Minneapolis, 1988.
- [13] A. FREEDMAN, N. LEVANON, *Staggered Costas signals*. IEEE Transactions on AES, vol. 22, n° 6, November 1986.
- [14] G. GARAMPON, G. BONNET, *Extension de la fonction d'ambiguïté à des signaux aléatoires*. Annales des télécommunications, mai-juin 1968.
- [15] S. W. GOLOMB and H. TAYLOR, *Construction and properties of Costas arrays*. Proceedings of the IEEE, vol. 72, September 1984.
- [16] G. HAKIZIMANA, *Codages adaptés aux communications avec trajets multiples*. Thèse de Docteur de l'INPG, 1987.
- [17] G. JOURDAIN-GARAMPON, *Considérations sur la fonction d'ambiguïté dans le cas de signaux aléatoires*. Étude et génération de certains de ces signaux, Thèse de Docteur Ingénieur, Grenoble, 1970.
- [18] G. JOURDAIN, *Espérance d'ambiguïté dans le cas où l'écho subit une compression de temps vis-à-vis de l'émission*. Annales des télécommunications, janvier-février 1971.
- [19] G. JOURDAIN, *Caractérisation d'un milieu de transmission aléatoire par un modèle de filtre aléatoire variable au cours du temps*. Annales des télécommunications, septembre-octobre 1973.
- [20] G. JOURDAIN, *Synthèse de signaux certains dont on connaît la fonction d'ambiguïté de type Woodward ou de type compression*. Annales des télécommunications, janvier-février 1977.

- [21] G. JOURDAIN, J. P. HENRIOUX, *Use of large WT BPSK signals in target delay Doppler measurements*. Article soumis à JASA.
- [22] J. MAX et coll., *Méthodes et techniques de Traitement du Signal et applications aux mesures physiques*. Masson, Paris, 1987 (2 volumes).
- [23] W. MECKLENBRAUKER, *A tutorial on non parametric bilinear time frequency signal representation*. Signal Processing, Les Houches, session XLV, p. 277, 336 North Holland, 1987.
- [24] J. MILLET, *Fonctions d'ambiguïté optimales*. Rapport CEPHAG n° 27/89.
- [25] A. H. NUTTAL, W. CHANG, E. B. LUNDE, *Performance of incoherent pulse compression of Costas signals*. Proceedings of NATO Advanced-Underwater Acoustic and Data Processing, July 1988.
- [26] R. PRICE, *Bounds on the volume and height distributions of the ambiguity function*. IEEE Transactions on Information Theory n° 11, 1965.
- [27] A. W. RIHACZEK, *Principles of high resolution radar*. McGraw Hill Book company, New York, 1969.
- [28] D. V. SARWATE, M. B. PURSLEY, *Cross-correlation properties of pseudo-random and related sequences*. Proceedings of the IEEE, vol. 68, n° 5, mai 1980.
- [29] A. SPATARU, *Théorie de la transmission de l'information*. Tome 1 : « Signaux et bruits » ; tome 2 : « Codes et décisions », Masson et cie, 1973.
- [30] D. A. SWICK, *An ambiguity function independent of assumptions about bandwidth and carrier frequency*. NRL Report 6471, USA, December 1968.
- [31] D. E. VAKMAN, *Sophisticated signals and the uncertainty principle in radar*. Springer-Verlag, 1968.
- [32] P. M. WOODWARD, *Probability and information theory with applications to radar*. Pergamon Press, Oxford, 1964 (2<sup>e</sup> édition).
- [33] J. L. ZUSSY, *Amélioration de la fonction d'ambiguïté en compression d'un signal à modulation binaire de phase (BPSK)*. Rapport M.S.T., Toulon, Cephag, 1986.