

# Transformation de Wigner-Ville discrète simplifiée :

## versions périodiques et apériodiques

Simplified discrete Wigner-Ville distribution :

periodic and aperiodic versions



### Yue Min ZHU

Laboratoire de Traitement du Signal et Ultrasons, URA CNRS 1216, Bât. 502, INSA, 20, Avenue Albert Einstein, 69621 VILLEURBANNE Cedex, Tél. 78.94.82.26.

Yue Min Zhu est né en 1960 à Wuhan, en Chine. Il a obtenu un diplôme d'ingénieur de l'Institut Polytechnique de Chine Centrale en 1982, un DEA (1984) et une thèse de Doctorat (1988) à l'INSA de Lyon. Depuis 1987, il est chercheur sous contrat à l'INSA de Lyon. Il s'intéresse aux problèmes d'analyse spectrale locale des signaux et des images et à l'imagerie radioscopique en temps-réel.



### Françoise PEYRIN

Laboratoire de Traitement du Signal et Ultrasons, URA CNRS 1216, Bât. 502, INSA, 20, Avenue Albert Einstein, 69621 VILLEURBANNE Cedex, Tél. 78.94.82.26.

Françoise Peyrin a obtenu une maîtrise de mathématiques de l'université Lyon I en 1977 et une thèse de 3<sup>e</sup> cycle en informatique à l'INSA de Lyon en 1982. De 1981 à 1987, elle a été assistante à l'INSA de Lyon. Depuis 1987, elle est chercheur INSERM au laboratoire de Traitement du Signal et Ultrasons de l'INSA de Lyon (URA CNRS 1216). Elle s'intéresse aux problèmes d'imagerie médicale tridimensionnelle et à l'analyse spectrale de signaux et des images numériques.



### Robert GOUTTE

Laboratoire de Traitement du Signal et Ultrasons, URA CNRS 1216, Bât. 502, INSA, 20, Avenue Albert Einstein, 69621 VILLEURBANNE Cedex, Tél. 78.94.82.26.

Robert Goutte est né en 1932 à Lyon. Après des études supérieures à l'université de Lyon, il soutient sa thèse Docteur d'Etat en Sciences Physiques en 1959. Il est nommé Maître de Conférences à l'INSA de Lyon en 1962, puis Professeur en 1969. Il dirige actuellement dans cet institut le laboratoire de Traitement du Signal et Ultrasons, associé au CNRS (URA 1216) et affilié à l'INSERM. Son domaine d'activité concerne le traitement numérique du signal et l'imagerie numérique.

## RÉSUMÉ

Plusieurs versions discrètes de la transformation de Wigner-Ville (TWV) continue ont été proposées dans la littérature. Dans cet article, nous proposons une notion de TWV discrète simplifiée (TWVDS). Dans ce contexte, deux types de TWVDS, périodique et apériodique, sont étudiés. La comparaison de leurs caractéristiques et les discussions sur leurs aspects de calcul en pratique permettent d'élucider certaines notions liées aux effets de discrétisation temporelle et fréquentielle du signal sur la TWV continue, facilitant ainsi un choix correct des diverses TWV discrètes possibles.

**MOTS-CLÉS :** Représentation temps-fréquence, transformation de Wigner-Ville discrète, calcul numérique.

## SUMMARY

Several discrete versions of the continuous Wigner-Ville distribution (WVD) have been proposed in the literature. In this paper, we propose a notion of simplified discrete WVD (SDWVD). In this context, two types of SDWVD are investigated: periodic and aperiodic SDWVDs. The comparison of their characteristics and the discussions on their practical computational aspects allow to clarify some notions related to the time and frequency signal discretization effects on the continuous WVD, facilitating thus a correct choice among diverse possible discrete WVDs.

**KEY WORDS:** Time-frequency representation, discrete Wigner-Ville distribution, discrete implementation.

## 1. Introduction

La transformation de Wigner-Ville (TWV) a été largement étudiée ces dix dernières années par un grand nombre de chercheurs [1] à [14]. Il est maintenant généralement reconnu que c'est un outil fondamental et puissant pour l'analyse des signaux non stationnaires. Le succès de son application dans des domaines de plus en plus répandus est en grande raison dû au fait que cette transformation peut être évaluée numériquement à l'aide de l'algorithme FFT bien connu.

La recherche d'algorithmes de calcul numérique rapide de la TWV ainsi que leur implantation efficace continue à présenter des intérêts pratiques. Mais pour l'interprétation des résultats obtenus grâce à cet outil, il est important que les caractéristiques de la TWV discrète soient parfaitement saisies. Bien que le problème de discrétisation de la TWV ait été abondamment discuté par Claassen, Mecklenbrauker [3], [16] et Chan [15], les définitions qu'ils ont proposées dans le but de conserver toutes les propriétés possibles de la TWV continue, tout en évitant le phénomène de recouvrement, ne semblent pas immédiatement utilisables pour un traitement numérique concret. En effet, leurs formules et discussions ne s'appliquent que dans le cas théorique où la TWV est discrète seulement en temps. Or, pour une implantation concrète, la TWV doit se présenter sous une forme discrète à la fois en temps et en fréquence. La première discussion sur la discrétisation en temps et fréquence de la TWV a été abordée par Brenner [17]. Un développement théorique plus complet [18] a permis de proposer une définition unifiée d'une TWV discrète en temps et fréquence. L'étude sur la discrétisation à la fois en temps et en fréquence de la TWV continue, a soulevé de nombreux nouveaux aspects relatifs au calcul, à l'implantation et à l'interprétation de la TWV discrète. Par ailleurs elle a montré par exemple que chercher à obtenir la TWV discrète à partir des formules discrètes en temps, en remplaçant simplement la variable continue de fréquence par une variable discrète est une opération aveugle pouvant conduire à de fausses interprétations du résultat, comme on pourra le constater dans les discussions ultérieures. Le but de cet article est d'essayer d'élucider ces divers points en proposant une notion de TWV discrète simplifiée (TWVDS), en révélant l'existence de deux types de TWVDS périodique et

apériodique et en comparant leurs caractéristiques respectives.

Dans la section 2, nous faisons d'abord quelques remarques sur la TWV discrète dite générale. Ensuite, dans la section 3, nous introduisons la notion de TWVDS simplifiée (TWVDS). Une relativement longue démonstration théorique sur les TWVDS périodiques (en particulier sur quelques versions représentatives) est présentée dans la section 4 afin de mieux souligner la notion de TWVDS périodique. Cette nouvelle notion est confrontée, dans la section 5, avec celle de TWVDS aperiodique généralement utilisée en pratique par la plupart des utilisateurs. Les avantages de ces deux types de TWVDS, leurs inconvénients respectifs, et leurs principes de calcul numérique sont également discutés. Enfin, dans la section 6, les diverses TWVDS sont illustrées par des exemples. Nous n'envisageons pas dans cet article la comparaison avec des versions lissées de la TWV, car la finalité est essentiellement la réduction des termes d'interférences dues aux signaux multicomposantes, et ces variantes n'apportent rien sur le problème général de la discrétisation de la TWV.

## 2. TWVD générale

La TWV d'un signal monodimensionnel supposé certain et d'énergie finie étant une fonction continue de 2 variables, le temps et la fréquence, la discrétisation doit agir sur ces deux variables  $t$  et  $\nu$ . D'autre part, comme il n'y a a priori aucune raison de privilégier l'une de ces deux variables dans la discrétisation, une façon logique d'obtenir la TWV discrète (TWVD) consiste à étudier les effets de cette discrétisation dans le domaine à la fois temporel et fréquentiel. Ceci a conduit à proposer la définition de TWVD suivante [18]:

$$(1) \quad W(n, k) = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m f_{n-m}^* \exp\left(-j \frac{\pi k}{N} (2m - n)\right)$$

ou de façon équivalente:

$$(2) \quad W(n, k) = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m F_{k-m}^* \exp\left(j \frac{\pi n}{N} (2m - k)\right)$$

avec  $n, k = 0, \dots, 2N - 1$  et où  $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$  est le signal temporel discret et  $F_0, F_1, \dots, F_{N-1}$  sa transformée de Fourier discrète (TFD).

Comparée avec d'autres définitions de la TWVD précédemment proposées, cette formulation exprimée directement en termes des échantillons du signal et de sa TFD, est reliée de façon plus naturelle à la TWV continue dans laquelle le temps et la fréquence jouent un rôle symétrique. Elle présente la caractéristique de préserver les propriétés de la TWV continue même si elle contient des termes de recouvrement, et peut être considérée comme une TWVD générale.

Les relations (1) et (2) montrent que cette TWVD générale  $W(n, k)$  est périodique de période  $2N$  aussi bien dans la direction de temps que dans la direction des fréquences, et qu'elle possède les caractéristiques suivantes dans une période :

$$(3) \quad \begin{aligned} W(n + N, k) &= (-1)^k W(n, k) \\ W(n, k + N) &= (-1)^n W(n, k) \\ W(n + N, k + N) &= (-1)^{n+k+N} W(n, k). \end{aligned}$$

Ainsi, pour un signal discret de  $N$  échantillons, la TWVD générale est une matrice de taille  $2N \times 2N$  et non de taille de  $N \times N$ , ce qui apparaît assez inattendu. A titre d'illustration, nous représentons, sur la figure 1, la TWVD générale du signal analytique associé à un signal réel modulé linéairement en fréquence. Le signal réel a été échantillonné sur 64 points à la fréquence de 64 Hz, et son signal analytique discret sur 64 points a été complété par 64 zéros. La TWVD générale de taille  $256 \times 256$  qui fait apparaître quatre composantes distinctes dans le plan temps-fréquence peut s'interpréter de la façon suivante : le premier quadrant (en bas à gauche) correspond à la loi de modulation idéale du signal alors que les trois autres quadrants sont dus à la périodisation (au signe près) de cette loi. Ces

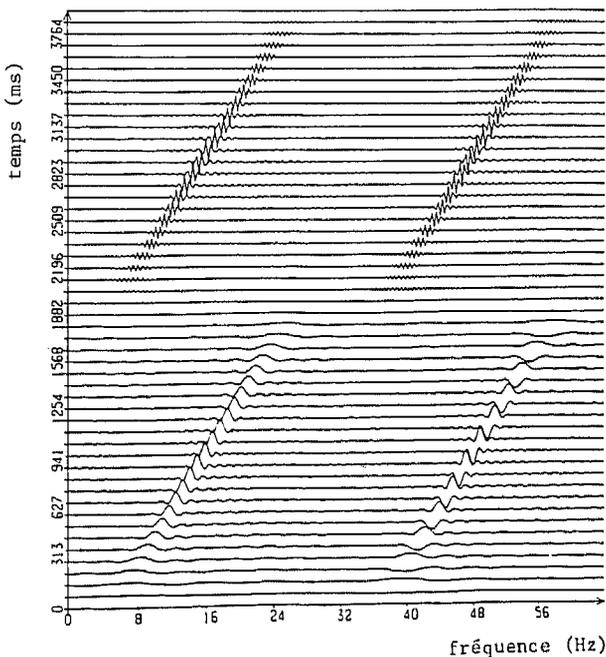


Fig. 1. — TWVD générale du signal analytique associé à un signal réel modulé linéairement en fréquence.

derniers sont la conséquence directe de la discrétisation dans le plan temps-fréquence, mais dans le cas présent n'introduisent pas de recouvrements : toute l'information concernant la loi de modulation du signal se retrouvant sans détérioration dans le premier quadrant. On peut montrer qu'à partir de cette TWVD générale, tous les échantillons originaux (zéro ou non zéro) du signal, de son spectre, de sa puissance instantanée et de sa densité spectrale d'énergie peuvent être retrouvés. Cette propriété spécifique n'est pas satisfaite avec les autres TWV discrètes précédemment proposées [15] à [17].

En considérant les relations (1) et (2), il faut bien noter que la TWV discrète implique l'échantillonnage et la périodisation de la TWV du signal (ou de son spectre) continu, l'ignorer peut conduire à des erreurs graves dans l'interprétation du résultat obtenu. En effet, la  $W(n, k)$  obtenue à partir d'un signal discret ou de sa TFD ne correspond pas forcément à une version simplement échantillonnée de la TWV continue. Ceci peut être illustré par la relation entre la TWVD et la TWV continue suivante :

$$(4) \quad W(n, k) = \frac{1}{4N\Delta t} \sum_{n'} \sum_{k'} (-1)^{nk'+kn'+Nn'k'} W_f \left( \frac{(n-n'N)\Delta t}{2}, \frac{k-k'N}{2N\Delta t} \right)$$

où  $\Delta t$  représente le pas d'échantillonnage du signal temporel.

La relation (4) montre que la TWVD est en général une version repliée, ou périodiquement répétée (aussi bien en temps qu'en fréquence) de la TWV continue. Donc, pour obtenir une TWVD ne contenant pas de recouvrements, le signal et son spectre doivent être nuls au moins pour la moitié des points, c'est-à-dire que les deux hypothèses suivantes doivent être vérifiées :

$$(5) \quad \exists n_0 : f_{n+n_0} = 0 \text{ pour } n = N/2, \dots, N-1$$

et

$$(6) \quad \exists k_0 : F_{k+k_0} = 0 \text{ pour } k = N/2, \dots, N-1.$$

Si la TWVD générale peut être considérée comme un modèle parfait sur le plan théorique, son utilisation en pratique est cependant limitée. Ceci est principalement dû à la complexité de son interprétation visuelle comme on peut le constater dans la figure 1. De plus, dans les cas d'applications, nous sommes souvent intéressés par la faculté d'une telle représentation à traduire la structure temps-fréquence du signal. Toutes ces raisons nous conduisent à introduire des versions simplifiées de la TWVD.

### 3. Notion de TWVD simplifiée

Comme nous l'avons indiqué plus haut, la TWVD générale a été déduite en étudiant l'effet de discrétisation à la fois temporelle et fréquentielle du signal sur la TWV. La discrétisation en temps du signal (resp. en fréquence du spectre) introduit une discrét-

tisation dans le domaine temporel (resp. fréquentiel) ainsi qu'une périodisation dans le domaine fréquentiel (resp. temporel) de la TWV. Ainsi, la double discrétisation en temps et en fréquence du signal donne naissance à une TWV à la fois discrétisée et périodisée dans les deux domaines, ce qui permet de représenter la TWV continue avec un nombre fini d'échantillons.

La relation (4) montre aussi le fait important suivant : la TWV a été échantillonnée en temps et fréquence à un pas d'échantillonnage deux fois plus fin que le signal et son spectre. En d'autres termes, la TWV a été suréchantillonnée (par rapport à la notion d'échantillonnage définie pour le signal) en temps et en fréquence, impliquant que la TWV présente des valeurs non seulement aux points d'échantillonnage du signal ( $\Delta t$ ) et de son spectre ( $1/N \Delta t$ ) mais aussi à leurs demi-points d'échantillonnage ( $\Delta t/2$  et  $1/2 N \Delta t$ ). Dans la TWVD générale, les valeurs paires de l'indice temporel  $n$  correspondent donc aux points d'échantillonnage (donc multiples entiers de  $\Delta t$ ) du signal temporel alors que les valeurs impaires correspondent aux demi-points d'échantillonnage. Il en est de même pour l'interprétation de l'indice fréquentiel  $k$ . Nous allons démontrer, dans ce qui suit, qu'il est en fait possible de travailler seulement sur un sous-ensemble de ces indices pairs ou impairs ou encore sur une de leurs combinaisons. On obtient dans ces cas ce que nous appelons une TWVD simplifiée (TWVDS).

Afin de vérifier la validité des TWVDS en tant que représentation temps-fréquence d'un signal discret, nous examinerons de façon très précise les trois aspects les plus fondamentaux suivants d'une TWVD : la faculté de traduire la structure temps-fréquence du signal, la caractéristique énergétique et la propriété de réversibilité. Notons également que les autres propriétés des TWVDS peuvent, soit être aisément obtenues à partir de leur formule comme par exemple le caractère réel, la translation, la modulation, etc, soit être directement déduites de ces propriétés comme par exemple le moment local (en temps ou en fréquence) normalisé d'ordre un de la TWV. Les diverses TWVDS possibles étant nombreuses, afin de ne pas alourdir la présentation, les examens en détail porteront seulement sur trois versions les plus représentatives d'entre elles, et pour les autres versions nous nous contenterons de donner directement les résultats.

Pour faciliter la comparaison qui suit, nous réécrivons les propriétés énergétiques et de réversibilité de la TWVD générale comme suit [18] :

$$\begin{aligned}
 P1 : \sum_{k=0}^{2N-1} W(n, k) &= \begin{cases} |f_{n/2}|^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \\
 &\text{(puissance instantanée)} \\
 P2 : \sum_{n=0}^{2N-1} W(n, k) &= \begin{cases} |F_{k/2}|^2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \\
 &\text{(densité spectrale d'énergie)} \\
 P3 : \sum_{k=0}^{2N-1} W(n, k) \exp\left(j \frac{\pi nk}{N}\right) &= f_n f_0^* \\
 &\text{(réversibilité vis-à-vis du signal)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P4 : \sum_{n=0}^{2N-1} W(n, k) \exp\left(-j \frac{\pi nk}{N}\right) &= F_k F_0^* \\
 &\text{(réversibilité vis-à-vis du spectre)}
 \end{aligned}$$

Soulignons que les propriétés ci-dessus restent vraies même si la TWVD  $W(n, k)$  contient des termes de recouvrement.

#### 4. TWVDS périodique

Dans cette section, nous discutons les TWVDS dites périodiques. Par cette dénomination, nous entendons le fait que les TWVDS discutées ici sont périodiques aussi bien en temps qu'en fréquence. Nous examinerons plus particulièrement trois TWVDS et leurs propriétés correspondant à celles P1-P4 de la TWVD générale.

##### 4.1. LA TWVDS $W(2p, 2q)$

Examinons d'abord ce que l'on obtient lorsque l'on considère seulement les indices de temps et de fréquence pairs. Prenant  $n = 2p$ , et  $k = 2q$  dans les relations (1) et (2) on obtient une TWVDS  $W(2p, 2q)$  définie par :

$$\begin{aligned}
 (7a) \quad W(2p, 2q) &= \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} f_{p+m} f_{p-m}^* \exp\left(-j \frac{4\pi qm}{N}\right) \\
 (7b) \quad &= \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} F_{q+m} F_{q-m}^* \exp\left(j \frac{4\pi pm}{N}\right).
 \end{aligned}$$

Les relations ci-dessus montrent que la TWVDS  $W(2p, 2q)$  est une TWVD périodique de période  $N/2$  en temps et en fréquence comme le montre la figure 2, où  $W$  représente l'ensemble de valeurs  $W(2p, 2q)$  pour  $p, q = 0, \dots, N/2 - 1$ . Si le signal a été échantillonné à la fréquence de Shannon, les valeurs de  $W(2p, 2q)$  sont déterminées par la relation suivante (pour  $N$  pair) :

$$\begin{aligned}
 (8) \quad W(2p, 2q) &= \frac{1}{4N\Delta t} \left[ W_f\left(p\Delta t, \frac{q}{N\Delta t}\right) + \right. \\
 &W_f\left(p\Delta t, \frac{2q+N}{2N\Delta t}\right) + W_f\left(\frac{(2p+N)\Delta t}{2}, \frac{q}{N\Delta t}\right) \\
 &\left. + W_f\left(\frac{(2p+N)\Delta t}{2}, \frac{2q+N}{2N\Delta t}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Donc, dans un cas général où le signal est échantillonné à la fréquence habituelle de Shannon, sa TWVDS  $W(2p, 2q)$  contient des termes de recouvrement. En cas d'absence de recouvrements, la  $W(2p, 2q)$  fournit les échantillons de la TWV continue suivants :

$$(9) \quad \left\{ \frac{1}{4N\Delta t} W_f\left(p\Delta t, \frac{q}{N\Delta t}\right) / p, q = 0, \dots, N/2 - 1 \right\}$$

indiquant ainsi que la TWVDS  $W(2p, 2q)$  permet de décrire la structure temps-fréquence du signal,

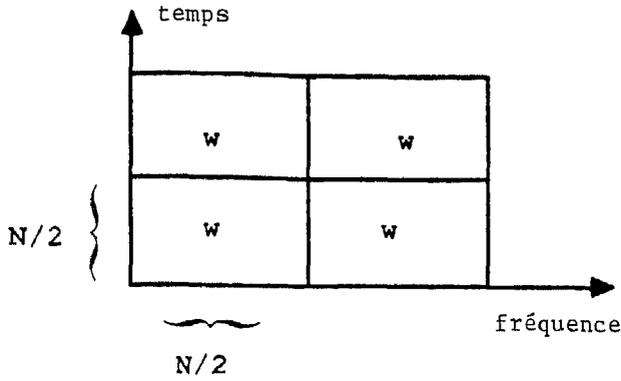


Fig. 2. — Caractéristique périodique de la TWVDS  $W(2p, 2q)$  dans le plan temps-fréquence.

avec une définition temps-fréquence de  $(\Delta t, \frac{1}{N \Delta t})$ .

Notons qu'à cause de la propriété de périodicité  $N/2$  de la TWVDS, il suffit dans la pratique de calculer la TWVDS  $W(2p, 2q)$  pour  $p, q = 0, \dots, N/2 - 1$ .

On examine maintenant ce que deviennent les propriétés P1 et P2 de la TWVD générale dans le cas de la TWVDS  $W(2p, 2q)$ .

En sommant la  $W(2p, 2q)$  (relation (7a)) sur l'indice fréquentiel  $q$ , on a :

$$(10) \quad \sum_{q=0}^{N/2-1} W(2p, 2q) = \frac{1}{2N} \sum_{q=0}^{N/2-1} \sum_{m=0}^{N-1} f_{p+m} f_{p-m}^* \exp\left(-j \frac{4\pi q m}{N}\right)$$

ce qui peut se réécrire en coupant la sommation interne en deux parties :

$$\begin{aligned} & \sum_{q=0}^{N/2-1} W(2p, 2q) \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{q=0}^{N/2-1} \left[ \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{p+m} f_{p-m}^* \exp\left(-j \frac{4\pi q m}{N}\right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m=N/2}^{N-1} f_{p+m} f_{p-m}^* \exp\left(-j \frac{4\pi q m}{N}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{q=0}^{N/2-1} \left[ \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{p+m} f_{p-m}^* \exp\left(-j \frac{4\pi q m}{N}\right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{p+m+N/2} f_{p-m-N/2}^* \exp\left(-j \frac{4\pi q m}{N}\right) \right] \end{aligned}$$

d'où la propriété :

$$PA1 : \quad \sum_{q=0}^{N/2-1} W(2p, 2q) = \frac{1}{4} (|f_p|^2 + |f_{p+N/2}|^2) \quad \text{pour } p = 0, \dots, N/2 - 1.$$

De façon similaire, la sommation de  $W(2p, 2q)$  sur

l'indice temporel  $p$  donne :

$$PA2 : \quad \sum_{p=0}^{N/2-1} W(2p, 2q) = \frac{1}{4} (|F_q|^2 + |F_{q+N/2}|^2) \quad \text{pour } q = 0, \dots, N/2 - 1.$$

Ces propriétés montrent que contrairement au cas de la TWVD générale, la sommation de la TWVDS  $W(2p, 2q)$  sur  $q$  (ou  $p$ ) ne donne pas en général la puissance instantanée (ou la densité spectrale d'énergie) du signal, mais une version repliée de celle-ci. En plus, on constate que seulement la moitié de la puissance instantanée et de la densité spectrale d'énergie peuvent être retrouvées à partir de la TWVDS  $W(2p, 2q)$ .

Nous étudions maintenant la réversibilité de la TWVDS  $W(2p, 2q)$ . Pour cela, on multiplie d'abord la droite et la gauche de l'équation (7a) par le même terme  $\exp(j \frac{4\pi q m}{N})$ , et on somme ensuite les deux côtés de l'équation ainsi pondérée sur l'indice fréquentiel, ce qui donne la propriété de réversibilité PA3 de la  $W(2p, 2q)$  correspondant à la propriété P3 de la  $W(n, k)$  :

$$PA3 : \quad \sum_{q=0}^{N/2-1} W(2p, 2q) \exp\left(j \frac{4\pi q m}{N}\right) = \frac{1}{4} (f_{p+m} f_{p-m}^* + f_{p+m+N/2} f_{p-m+N/2}^*)$$

En posant respectivement  $m = p$  et  $m = p - 1$ , on peut accéder respectivement aux échantillons d'indices pair et impair d'un signal temporel. Mais ces échantillons obtenus ne représentent pas forcément ceux du signal, car, comme la propriété ci-dessus le montre, la  $W(2p, 2q)$  ne conduit pas en général directement au signal discret original, mais à des versions repliées de celui-ci. Lorsque le signal s'annule dans un intervalle égal à la moitié de sa période de répétition, le terme de recouvrement  $\frac{1}{4} f_{p+m+N/2} f_{p-m+N/2}^*$  devient nul.

De façon similaire, la réversibilité de la  $W(2p, 2q)$  vis-à-vis du spectre  $F_k$  peut s'exprimer :

$$PA4 : \quad \sum_{p=0}^{N/2-1} W(2p, 2q) \exp\left(-j \frac{4\pi p m}{N}\right) = \frac{1}{4} (F_{q+m} F_{q-m}^* + F_{q+m+N/2} F_{q-m+N/2}^*)$$

Ainsi, tous les échantillons du spectre du signal peuvent être obtenus en posant respectivement  $m = q$  et  $m = q - 1$ . Comme dans le cas précédent, la propriété PA4 montre que la  $W(2p, 2q)$  ne permet pas en général de retrouver directement le spectre du signal, mais conduit seulement à des versions repliées de ceux-ci, à moins que le spectre s'annule dans un intervalle égal à la moitié de sa période de répétition (dans ce cas, le terme de recouvrement  $\frac{1}{4} (F_{q+m+N/2} F_{q-m+N/2}^*)$  s'annule).

Soulignons que dans toutes les propriétés discutées ci-dessus, si le signal et son spectre sont négligeables

(inférieur à  $\epsilon$ ) dans un intervalle égal à la moitié de leur période de répétition (i.e. si les hypothèses (5) et (6) sont approximativement satisfaites), les termes de recouvrement dans les relations PA3 et PA4 deviennent également négligeables (inférieur à  $\epsilon^2$ ) de sorte que l'on peut retrouver par approximation tous les échantillons (zéro et non zéro) du signal, de son spectre, de sa puissance instantanée et de sa densité spectrale d'énergie. On en conclut ainsi que dans ce cas, la TWVD  $W(2p, 2q)$  obtenue en travaillant sur les indices pairs de temps et de fréquence de la TWVD générale est une version valide pour représenter un signal discret dans le plan temps-fréquence.

4.2. La TWVDS  $W(2p + 1, 2q + 1)$

En prenant un autre cas extrême où on ne considère seulement que les indices de temps et de fréquence impairs dans la TWVD générale, on obtient la TWVDS  $W(2p + 1, 2q + 1)$  définie par :

$$(11a) \quad W(2p + 1, 2q + 1) = \frac{1}{2N} \exp\left(-j \frac{\pi(2q + 1)}{N}\right) \sum_{m=0}^{N-1} f_{p+m} f_{p+1-m}^* \times \exp\left(-j \frac{2\pi m}{N}\right) \exp\left(-j \frac{4\pi qm}{N}\right)$$

$$(11b) \quad = \frac{1}{2N} \exp\left(-j \frac{\pi(2p + 1)}{N}\right) \sum_{m=0}^{N-1} F_{q+m} F_{q+1-m}^* \times \exp\left(j \frac{2\pi m}{N}\right) \exp\left(j \frac{4\pi pm}{N}\right)$$

On peut facilement constater, d'après les relations ci-dessus, que la TWVDS  $W(2p + 1, 2q + 1)$  est une TWVD périodique de période  $N$  en temps et en fréquence. Mais, comparée avec la TWVDS  $W(2p, 2q)$ , la  $W(2p + 1, 2q + 1)$  présente une certaine complexité dans une période, comme le montre la figure 3, où  $W$  représente l'ensemble des valeurs  $W(2p + 1, 2q + 1)$  pour  $p, q = 0, \dots, N/2 - 1$ . Dans le cas général, la  $W(2p + 1, 2q + 1)$  est égale à la somme de quatre composantes :

$$(12) \quad W(2p + 1, 2q + 1) = \frac{1}{4N\Delta t} \sum_{n'=0}^1 \sum_{k'=0}^1 W_f\left(\left(2p + 1 + n'N\right) \frac{\Delta t}{2}, \left(2q + 1 + k'N\right) \frac{1}{2N\Delta t}\right)$$

En l'absence de recouvrements, les valeurs de  $W(2p + 1, 2q + 1)$  sont données par :

$$(13) \quad \left\{ \frac{1}{4N\Delta t} W_f\left(\frac{2p + 1}{2} \Delta t, \frac{2q + 1}{2N\Delta t}\right) \right\}_{p, q = 0, \dots, N/2 - 1}$$

ce qui signifie que la TWVDS  $W(2p + 1, 2q + 1)$  peut aussi être utilisée pour analyser la caractéristique temps-fréquence du signal, avec la même définition temps-fréquence que la TWVDS  $W(2p, 2q)$ . Notons également qu'à cause de la périodicité

temps-fréquence de la TWVDS  $W(2p + 1, 2q + 1)$ , il suffit de la calculer pour  $p, q = 0, \dots, N - 1$ .

De la même façon que précédemment, on peut démontrer que les propriétés PB1 et PB2 de la TWVDS  $W(2p + 1, 2q + 1)$  correspondant respectivement aux propriétés P1 et P2 de la  $W(n, k)$  sont données par :

$$PB1 : \sum_{q=0}^{N-1} W(2p + 1, 2q + 1) = 0$$

$$PB2 : \sum_{p=0}^{N-1} W(2p + 1, 2q + 1) = 0$$

Ces propriétés sont très claires sur la figure 3, où on peut facilement constater que si la  $W(2p + 1, 2q + 1)$  est sommée sur l'axe de fréquences (ou de temps) pour chaque instant (ou fréquence) fixé, la puissance instantanée (ou densité spectrale) ainsi obtenue s'annule. Ces propriétés montrent que les demi-points temporels et fréquentiels n'ont pas de contribution à l'énergie du signal. Ceci donne une interprétation du sens physique de ces demi-points.

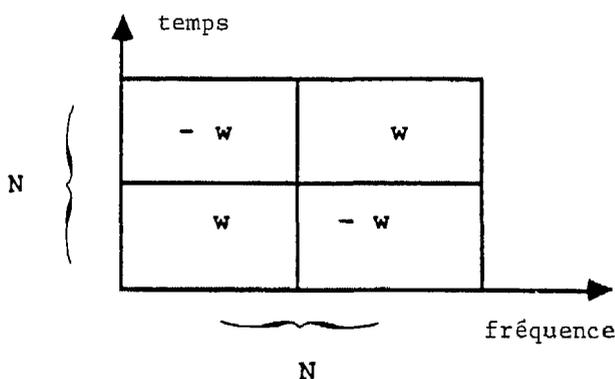


Fig. 3. — Caractéristique périodique de la TWVDS  $W(2p + 1, 2q + 1)$  dans le plan temps-fréquence.

En suivant la même démarche que pour les propriétés PA3 et PA4, on peut obtenir les relations de réversibilité suivantes pour la TWVDS  $W(2p + 1, 2q + 1)$  :

$$PB3 : \sum_{q=0}^{N-1} W(2p + 1, 2q + 1) \times \exp\left(j \frac{\pi}{N} (2q + 1)(2m - 1)\right) = \frac{1}{2} (f_{p+m} f_{p+1-m}^* - f_{p+m+N/2} f_{p+1-m+N/2}^*)$$

et

$$PB4 : \sum_{p=0}^{N-1} W(2p + 1, 2q + 1) \times \exp\left(j \frac{\pi}{N} (2p + 1)(2m - 1)\right) = \frac{1}{2} (F_{q+m} F_{q+1-m}^* - F_{q+m+N/2} F_{q+1-m+N/2}^*)$$

Ainsi, pour retrouver tous les points du signal et de son spectre, il suffit de poser respectivement  $m = p, p + 1$  et  $m = q, q + 1$ .

Les propriétés PB3 et PB4 montrent que la TWVDS  $W(2p + 1, 2q + 1)$ , définie sur les demi-points d'échantillons, permet également, comme dans le cas de la TWVDS  $W(2p, 2q)$ , de retrouver le signal et son spectre, à condition bien entendu que  $f_n$  et  $F_k$  soient nuls dans la moitié de leur période de répétition.

4.3. LA TWVDS  $W(2p, k)$

Prenons la TWVDS  $W(2p, k)$  comme dernier exemple détaillé. Elle est obtenue en travaillant sur les indices de temps pairs et tous les indices de fréquence (pairs et impairs) de la TWVD générale :

$$(14a) \quad W(2p, k) = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} f_{p+m} f_{p-m}^* \exp\left(-j \frac{2\pi km}{N}\right)$$

$$(14b) \quad = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m F_{k-m}^* \exp\left(j \frac{2\pi p}{N} (2m - k)\right)$$

Nous pouvons montrer, comme dans les cas précédents, que la TWVDS  $W(2p, k)$  est périodique de période  $N$  en temps et en fréquence comme le montre la figure 4, sur laquelle  $W$  est, dans un cas général, égale à la somme de quatre composantes, et représente, en l'absence de recouvrements, l'ensemble de valeurs de  $W(2p, k)$  :

$$(15) \quad \left\{ \frac{1}{4N\Delta t} W_f\left(p\Delta t, \frac{k}{2N\Delta t}\right) \middle| p = 0, \dots, N/2 - 1, k = 0, \dots, N - 1 \right\}.$$

La relation (15) montre que la définition d'analyse temps-fréquence dans le cas de TWVDS  $W(2p, k)$  est de  $\left(\Delta t, \frac{1}{2N\Delta t}\right)$ , c'est-à-dire deux fois plus fine dans la direction de fréquence.

Pour la même raison que précédemment, la TWVDS  $W(2p, k)$  est calculée seulement pour  $p, k = 0, \dots, N - 1$ . Notons que cette TWVDS peut être très facilement obtenue en prenant simplement une TFD de taille  $N$  du signal-produit  $\{f_{p+m} f_{p-m}^*/m = 0, \dots, N - 1\}$ .

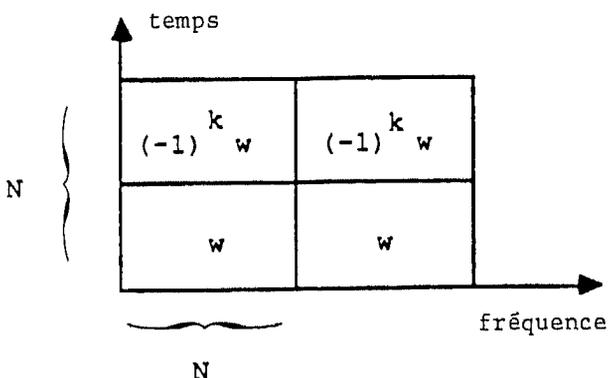


Fig. 4. — Caractéristique périodique de la TWVDS  $W(2p, k)$  dans le plan temps-fréquence.

On examine maintenant les propriétés PC1 et PC2 de la TWVDS  $W(2p, k)$  correspondant aux propriétés P1 et P2 de la  $W(n, k)$ . En observant la figure 4, on constate que le problème peut être traité en considérant séparément les valeurs de  $k$  paires et impaires.

Ainsi, pour la sommation de  $W(2p, k)$  sur l'indice  $k$ , on a :

$$(16) \quad \sum_{k=0}^{N-1} W(2p, k) = \sum_{q=0}^{N/2-1} W(2p, 2q) + \sum_{q=0}^{N/2-1} W(2p, 2q + 1).$$

Le premier terme de la droite de l'équation (16) est donné par la propriété PA1. On peut montrer que le deuxième terme est donné par :

$$(17) \quad \sum_{q=0}^{N/2-1} W(2p, 2q + 1) = \frac{1}{4} (|f_p|^2 - |f_{p+N/2}|^2).$$

Ainsi, chaque terme (propriété PA1 et relation (17)) de la somme contient une même composante de recouvrement qui dans un cas s'ajoute et dans l'autre se retranche, et par conséquent elle est éliminée par sommation, ce qui donne la propriété suivante :

$$PC1 : \quad \sum_{k=0}^{N-1} W(2p, k) = \frac{1}{2} |f_p|^2 \quad \text{pour } p = 0, \dots, N - 1.$$

La propriété ci-dessus montre que la TWVDS  $W(2p, k)$  vérifie toujours la propriété P1, qu'elle contienne ou non des termes de recouvrement.

De même, si l'on somme  $W(2p, k)$  sur l'indice  $p$ , on constate aisément que pour  $k$  impair, la sommation donne une valeur nulle. Et pour  $k$  pair, en posant  $k = 2q$ , on obtient :

$$(18) \quad \sum_{p=0}^{N-1} W(2p, 2q) = \frac{1}{2} (|F_q|^2 + |F_{q+N/2}|^2).$$

La propriété PC2 de la  $W(2p, k)$  est alors donnée par :

$$PC2 : \quad \sum_{p=0}^{N-1} W(2p, k) = \begin{cases} \frac{1}{2} (|F_{k/2}|^2 + |F_{(k+N)/2}|^2) & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

pour  $k = 0, \dots, N - 1$ .

Les propriétés PC1 et PC2 montrent les points suivants :

— Qu'il y ait ou non recouvrement dans la TWVDS  $W(2p, k)$ , on peut toujours retrouver la puissance instantanée  $|f_n|^2$  du signal à partir des valeurs de  $W(2p, k)$ .

— Dans le cas général, la TWVDS  $W(2p, k)$  ne permet pas de retrouver exactement la densité

spectrale d'énergie  $|F_k|^2$  du signal, mais une version repliée de celle-ci. Le fait que le résultat de sommation de la  $W(2p, k)$  soit nul pour les indices  $k$  impairs semble naturel, et montre que les points temps-fréquence définis sur les demi-points d'échantillons du spectre n'ont pas de contribution à la densité spectrale d'énergie du signal.

— Dans le cas où le signal temporel a été suréchantillonné (l'hypothèse (6) est satisfaite), on peut retrouver tous les  $N$  points de la puissance instantanée et les  $N/2$  points utiles de la densité spectrale d'énergie du signal.

Les propriétés de réversibilité analogues aux propriétés PA3 et PA4 peuvent aussi être déduites de la même manière. Elles sont données par :

PC3 :

$$\sum_{k=0}^{N-1} W(2p, k) \exp\left(j \frac{2\pi mk}{N}\right) = \frac{1}{2} f_{p+m} f_{p-m}^*$$

et

$$\begin{aligned} \text{PC4 : } \sum_{p=0}^{N-1} W(2p, k) \exp\left(-j \frac{2\pi p}{N} (2m - k)\right) \\ = \frac{1}{2} (F_m F_{k-m}^* + F_{m+N/2} F_{k-m+N/2}^*) \end{aligned}$$

pour  $m = 0, \dots, N - 1$ .

En posant respectivement  $m = p, p + 1$  et  $m = k$ , on peut accéder respectivement aux échantillons du signal et de son spectre.

Les propriétés PC3 et PC4 montrent que dans un cas général, à partir de la TWVDS  $W(2p, k)$ , on peut

toujours retrouver tous les points du signal, mais que par contre, le spectre ne peut être retrouvé que lorsque le signal temporel correspondant a été suréchantillonné (l'hypothèse (6) est satisfaite).

#### 4.4. RÉSUMÉ

Dans les trois sous-sections précédentes, nous avons détaillé trois types de TWVDS, et étudié leurs propriétés et leurs différences vis-à-vis de la TWVD générale. Notons que d'autres TWVDS possibles peuvent également être déduites de la TWVD générale, et que leurs propriétés correspondantes peuvent être obtenues.

Dans le tableau 1, nous résumons toutes les TWVDS possibles en donnant simplement leurs propriétés de périodicité et de caractéristiques énergétiques.

A partir des discussions ci-dessus, nous pouvons souligner les quelques points essentiels suivants :

— Les TWVDS sont plus simples que la TWVD générale (rappelons que la TWVD générale est suréchantillonnée dans le plan temps-fréquence). Mais en contrepartie, certaines propriétés vérifiées par la TWVD générale peuvent être perdues dans les TWVDS. Toutefois, en l'absence de recouvrements, les TWVDS contiennent toutes les informations suffisantes pour représenter la TWV continue.

— Toutes les TWVDS ont la faculté de traduire la caractéristique temps-fréquence du signal. Mais, elles n'ont cependant pas les mêmes propriétés.

— Les TWVDS à indices de temps pairs ou/et indices de fréquence pairs sont plus intéressantes que les autres TWVDS dans la pratique, puisque les

Tableau 1. — Récapitulatif des propriétés énergétiques de la TWVD générale et de ses diverses TWVDS périodiques.

TWVD	Périodicité	P1 : $1/4 \sum_{k \text{ ou } q} W(\dots)$	P2 : $1/4 \sum_{n \text{ ou } p} W(\dots)$
$W(n, k)$	$2N \times 2N$	$\begin{cases} 4 f_{n/2} ^2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$	$\begin{cases} 4 F_{k/2} ^2 & \text{si } k \text{ pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$
$W(2p, k)$	$N \times N$	$2 f_p ^2$	$\begin{cases} 2( F_{k/2} ^2 +  F_{k/2+N/2} ^2) & \text{si } k \text{ pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$
$W(2p, 2q)$	$N/2 \times N/2$	$ f_p ^2 +  f_{p+N/2} ^2$	$ F_q ^2 +  F_{q+N/2} ^2$
$W(2p, 2q+1)$	$N \times N/2$	$ f_p ^2 -  f_{p+N/2} ^2$	0
$W(2p+1, k)$	$N \times 2N$	0	$\begin{cases} 2( F_{k/2} ^2 +  F_{k/2+N/2} ^2) & \text{si } k \text{ pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$
$W(2p+1, 2q)$	$N/2 \times N$	0	$ F_q ^2 -  F_{q+N/2} ^2$
$W(2p+1, 2q+1)$	$N \times N$	0	0
$W(n, 2q)$	$N \times N$	$\begin{cases} 2( f_{n/2} ^2 +  f_{n/2+N/2} ^2) & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$	$2 F_q ^2$
$W(n, 2q+1)$	$2N \times N$	$\begin{cases} 2( f_{n/2} ^2 +  f_{n/2+N/2} ^2) & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$	0

indices pairs sont naturellement reliés aux échantillons du signal ou de son spectre. En particulier, les TWVDS  $W(2p, k)$  et  $W(2p, 2q)$  présentent beaucoup d'avantages aussi bien dans l'aspect de leurs propriétés que dans leur simplicité de calcul relative.

### 5. TWVDS apériodique et comparaison avec la TWVDS périodique

Dans la section 4, nous avons défini un ensemble de TWVDS. Une caractéristique particulièrement importante et commune à toutes ces versions simplifiées est qu'elles possèdent toutes la propriété de périodicité temps-fréquence. Or, il semble que cette propriété théorique n'est pas toujours vérifiée par les TWV discrètes calculées dans la pratique. En fait, le fait de travailler sur un sous-ensemble des indices de temps et de fréquence ne conduit pas forcément à des TWVDS vérifiant toutes les propriétés décrites plus haut. En effet, le calcul numérique de la TWVD faisant intervenir les opérations de retournement du signal (ou spectre), conjugaison, multiplication et TFD, suivant la manière dont ces opérations sont réalisées (périodisation du signal ou de son produit, limitation ou non du signal ou du produit et prolongation par des zéros, choix de la taille de TFD, etc.), on obtient différentes versions de la TWVDS, qui ne possèdent pas exactement les mêmes propriétés, et qui peuvent surtout très bien ne pas vérifier la propriété de périodicité temps-fréquence. Ces remarques nous conduisent à distinguer, des TWVDS discutées plus haut, un autre type de TWVDS dit apériodique, que nous présentons ci-dessous.

Etant donné un signal discret  $f(n)$  de  $N$  échantillons ( $N$  est supposé égal à une puissance de 2, une manière très commode de calculer sa TWVD en pratique est la suivante :

- Retourner  $f(n')$  pour obtenir  $f(-n')$ .
- Décaler à la fois, en sens inverse, le signal et sa version retournée (et conjuguée) pour obtenir  $f(n+n')$  et  $f^*(n-n')$  où  $n$  représente l'indice de décalage.
- Multiplier  $f(n+n')$  et  $f^*(n-n')$ .
- Borner le produit (centré à l'origine) par des zéros.
- Prendre la TFD du produit borné par des zéros en utilisant un algorithme FFT.
- Répéter les opérations b)-e) pour  $n = 0$  jusqu'à  $N - 1$ .

Dans cette démarche, le nombre de zéros ajoutés varie en fait en fonction de la taille du produit qui atteint une valeur maximale de  $(N - 1)$  lorsque l'indice de décalage est égal à  $N/2 - 1$  ou  $N/2$ . D'autre part, le choix du nombre de zéros à ajouter ainsi que la taille de la TFD à prendre peuvent être arbitraires. Tous ces aspects peuvent être illustrés dans la figure 5, où nous avons montré le principe de calcul général pour les TWVDS apériodiques. Ici, on a supposé qu'en dehors de l'intervalle  $[0, N - 1]$ , le signal est nul partout, ou en d'autres termes quand on calcule une TWVDS apériodique, on borne

implicitement le signal avec un nombre de zéros infini. Il est évident dans ce cas que la TWVDS ainsi obtenue ne possède plus la propriété de périodicité dans la direction de temps. C'est pourquoi nous appelons une telle TWV discrète TWVDS apériodique, puisqu'elle n'est plus une fonction périodique dans le plan temps-fréquence.

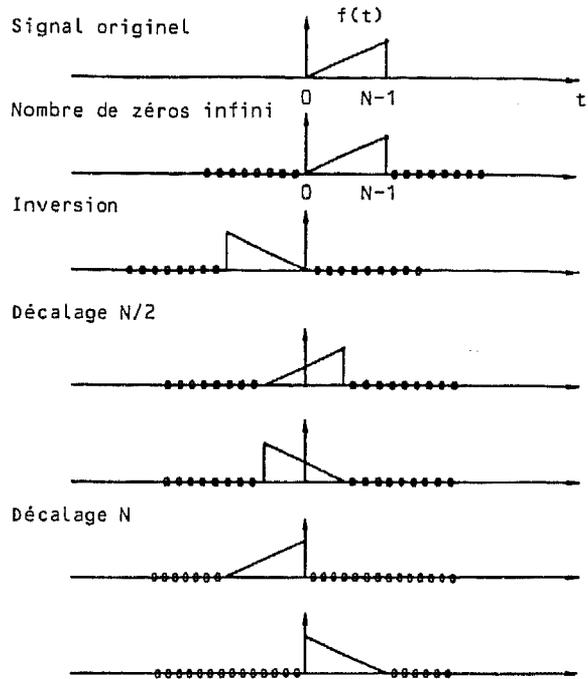


Fig. 5. — Principe de calcul des TWVDS apériodiques.

A titre d'exemple, pour un signal discret de  $N$  points, sa TWVD apériodique correspondant à la version simplifiée  $W(2p, k)$  est définie par :

$$(19) \quad W(2p, k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M/2-1} f'_{p+m} f'^*_{p-m} \exp\left(-j \frac{4\pi km}{M}\right)$$

où  $f'$  est un signal discret de  $M$  points défini par :

$$f'_n = \begin{cases} f_n & \text{pour } n = 0 \dots M/2 - 1 \\ 0 & \text{pour } n = M/2 \dots M - 1 \end{cases}$$

avec  $M = 2N$ .

Ici, définir le nouveau signal en bornant le signal originel par des zéros revient en fait à réaliser l'étape d) dans la démarche ci-dessus. Ainsi, le calcul de la TWVDS  $W(2p, k)$  apériodique peut être simplement réalisé de la manière suivante : retourner, décaler et conjuguer d'abord le signal  $f'$ , le multiplier ensuite avec sa version originale  $f'$  simplement dans l'intervalle centré à l'origine de longueur  $N$ , et prendre enfin la TFD (de taille  $N$  points) du produit ainsi obtenu.

D'un point de vue théorique, calculer la TWVDS apériodique revient à évaluer une TWV discrète sans tenir compte explicitement de l'effet de discrétisation fréquentielle du signal sur la TWV. Une telle considération a pour conséquence que la relation

entre la TWVD aperiodique et la TWV continue est donnée par :

$$(20) \quad W(n, k) = \frac{1}{4N\Delta t} \sum_{k'} (-1)^{nk'} W_f\left(\frac{n\Delta t}{2}, \frac{k-k'N}{2N\Delta t}\right)$$

au lieu de la relation (4).

La relation ci-dessus montre que le repliement dans la TWVD aperiodique ne peut se produire que dans la direction de la fréquence. En d'autres termes, pour obtenir une TWVD aperiodique ne contenant pas de termes de recouvrement, il suffit de satisfaire la condition (6).

Il est bien connu que la notion de TFD implique le fait que le signal et son spectre sont tous deux des suites d'échantillons périodiques ayant le même nombre d'échantillons  $N$ , dans chacune de leurs périodes. Ceci est une condition de départ dans l'obtention de la TWVD générale ainsi que des TWVDS périodiques, et elle n'a effectivement pas été suivie dans le procédé de calcul des TWVDS aperiodiques. Le principe de calcul des TWVDS périodiques est schématisé dans la figure 6. Soulignons que le signal est borné ici par  $N$  et seulement  $N$  zéros, et que sa taille est égale à celle de TFD.

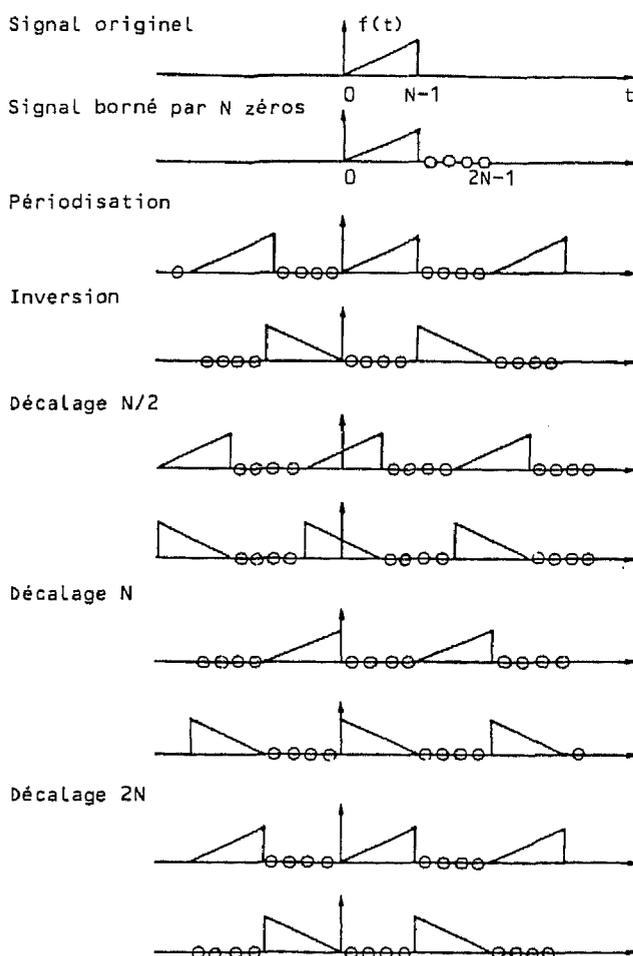


Fig. 6. — Principe de calcul des TWVDS périodiques.

Bien qu'une TWVDS aperiodique soit définie sur le même sous-ensemble des indices de temps et de fréquence que la TWVDS périodique correspondante, elle ne présente pas exactement les mêmes propriétés. En effet, la plupart des propriétés déduites du cas de TWVDS périodique sont maintenant plus ou moins altérées. A titre d'exemple indicatif, pour la TWVDS  $W(2p, k)$  aperiodique définie ci-dessus, qui possède également les propriétés énergétiques et de réversibilité, la densité spectrale d'énergie obtenue à partir de cette version aperiodique n'est plus nulle pour les indices de fréquence impairs, et les échantillons temporels retrouvés dont les indices sont égaux ou supérieurs à  $N/2$  ont des valeurs nulles. Ceci est différent du cas de la TWVDS  $W(2p, k)$  périodique.

Dans la pratique, pour obtenir une TWVDS correcte, périodique ou aperiodique, il est indispensable d'éviter le phénomène de recouvrement. Dans le cas de TWVDS aperiodique, le phénomène de recouvrement, qui se produit, par essence, uniquement dans la direction de la fréquence, peut être aisément évité soit en suréchantillonnant le signal continu, soit en utilisant le signal analytique associé au signal réel, soit en faisant une interpolation du signal numérique de départ. Par contre, dans le cas d'une TWVDS périodique, le recouvrement pouvant se produire aussi bien dans la direction du temps que dans la direction de la fréquence, le problème est plus compliqué. En effet, si le signal n'est pas analytique ou n'a pas été suréchantillonné par un facteur au moins égal à 2, la TWVDS périodique souffrira du recouvrement fréquentiel. Par dualité, si le signal analytique ou suffisamment suréchantillonné n'est pas nul sur un intervalle couvrant au moins la moitié de sa période de répétition, elle contiendra des recouvrements temporels. Donc, pour obtenir une TWVDS périodique ne contenant pas de recouvrements, les deux hypothèses (5) et (6) devraient être satisfaites. Bien que théoriquement incompatibles, ces deux conditions peuvent être approchées en pratique par les moyens suivants :

— La partie utile du signal sur  $N/2$  points est analytique ou suréchantillonnée par un facteur au moins égal à 2.

— Le signal analytique ou suréchantillonné est borné par des zéros de telle façon que le signal borné et périodisé présente des zéros dans un intervalle couvrant au moins la moitié de sa période de répétition.

Bien que les TWVDS aperiodiques et périodiques n'aient pas les mêmes caractéristiques, elles donnent des résultats équivalents du point de vue de la traduction de la structure temps-fréquence du signal. Sur le plan théorique, la TWVDS périodique est préférable, car elle correspond bien à des notions couramment rencontrées en traitement numérique du signal, et préserve de plus toutes les propriétés théoriques décrites par exemple dans la section 4. Mais sa manipulation en pratique semble plus compliquée (difficulté de satisfaire simultanément les conditions (5) et (6)). Sur le plan pratique, la TWVD aperiodique apparaît plus intéressante, car, d'une part, elle permet d'éviter les problèmes de

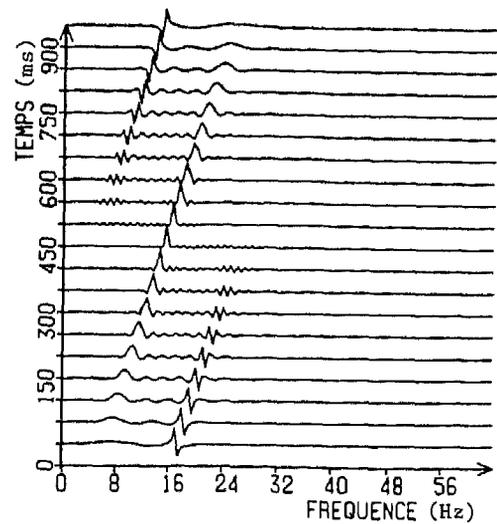
recouvrement temporel (ou en d'autres termes on n'a qu'à satisfaire la condition (6)) et d'autre part son interprétation visuelle est plus aisée, comme l'illustrent les exemples de la section suivante. Mais l'interprétation de certaines de ses propriétés théoriques semble difficile, par exemple la contribution non nulle des demi-points d'échantillons à l'énergie du signal dans la représentation  $W(2p, k)$  apériodique est délicate à interpréter. Signalons toutefois que dans la pratique, on est souvent conduit à utiliser explicitement des TWVDS apériodiques. Cette situation paradoxale (car, en principe, on devrait chercher à adopter les TWVDS périodiques qui satisfont au maximum les propriétés théoriques de la TWV discrète) est probablement liée à la commodité de calcul des TWVDS apériodiques, comme on peut le constater sur les figures 5 et 6.

### 6. Exemples illustrés

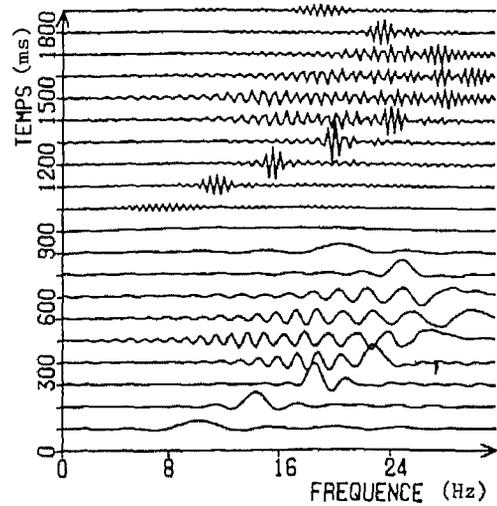
Dans ce qui précède, les aspects théoriques des TWV discrètes simplifiées ont été discutés. Dans cette section, nous donnons quelques exemples de simulations pour illustrer et comparer leurs caractéristiques essentielles.

Les TWVDS périodiques et apériodiques constituent un ensemble de TWV discrètes applicables en pratique. Leur choix peut être très souple en fonction des besoins pratiques. Par exemple, dans le cas où l'on désire représenter la TWV et le spectrogramme au même format de visualisation en vue de leur comparaison, on peut adopter la TWVDS apériodique  $W(2p, 2q)$  ayant comme taille  $N \times N/2$ . Car, comme on le sait, le spectrogramme d'un signal réel (ou analytique) de  $N$  points est toujours visualisé sous forme d'une image temps-fréquence de taille  $N \times N/2$  en raison de sa propriété de symétrie par rapport à la variable de fréquence (ou de l'absence des fréquences négatives de son spectre). Dans un autre cas, si l'on veut avoir une image temps-fréquence de taille  $N/2 \times N/2$ , on peut utiliser la TWVDS périodique  $W(2p, 2q)$ .

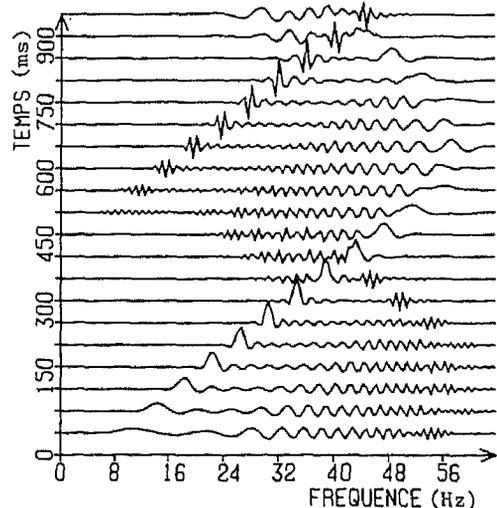
Dans la figure 7, nous avons calculé, suivant la procédure de calcul illustrée dans la figure 6, trois TWVDS périodiques (version  $W(2p, k)$ ) du même type de signal (signal modulé linéairement en fréquence). Dans la figure 7 a, le signal réel a été échantillonné sur 128 points à la fréquence de Shannon (128 Hz). Son signal analytique associé sur 128 points n'ayant pas été borné de zéros, sa TWVDS  $W(2p, k)$  comporte des termes de recouvrement temporel qui se traduisent par la présence des deux segments de crêtes se formant autour de la crête principale informationnelle (dans la bande de fréquences 4 à 24 Hz). Dans la figure 7 b, on utilise le même signal que dans la figure 7 a, mais après l'avoir sous-échantillonné en prenant un point sur deux. Le signal analytique correspondant a été ensuite borné de 64 zéros. La représentation  $W(2p, k)$  périodique ainsi obtenue ne présente plus de recouvrement temporel mais contient des recouvrements fréquentiels. La présence simultanée de termes de recouvrements temporel et fréquentiel dans la  $W(2p, k)$  est illustrée dans la figure 7 c,



a)



b)



c)

Fig. 7. — Illustration des phénomènes de recouvrement dans la TWVDS  $W(2p, k)$  périodique du signal analytique associé à un signal réel modulé linéairement en fréquence. a) Recouvrement temporel. b) Recouvrement fréquentiel et c) Recouvrements à la fois temporel et fréquentiel.

dans laquelle signal réel a été sous-échantillonné sur 128 points à la fréquence de 128 Hz, et son signal analytique associé sur 128 points n'a pas été borné de zéros. Dans ces trois cas, la loi de modulation du signal, représentée par une droite de crête sur le plan temps-fréquence, est complètement déformée par les phénomènes de recouvrement temporel ou/et fréquentiel.

La figure 8 représente la TWVDS (la même version  $W(2p, k)$ ) apériodique du signal réel échantillonné sur 128 points à la fréquence de Shannon (128 Hz), dans laquelle on observe, outre les termes d'interaction entre les fréquences positives et négatives qui se traduisent par la présence des « moirés » autour de la fréquence zéro, deux segments courts situés en haut, aux deux extrémités de l'axe de fréquence, qui représentent les termes de recouvrement fréquentiel. Dans ce cas comme dans le cas précédent, la loi de modulation du signal ne peut pas être déterminée d'une manière précise.

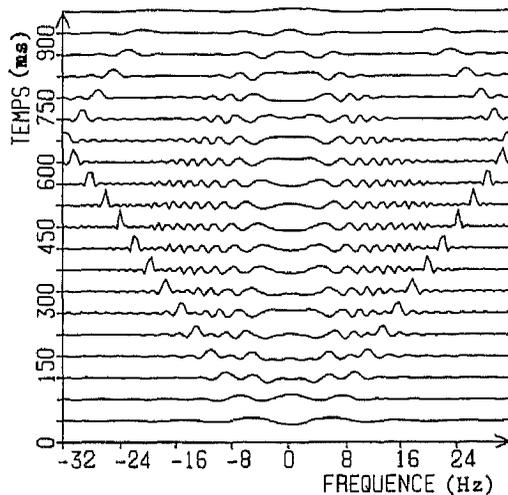
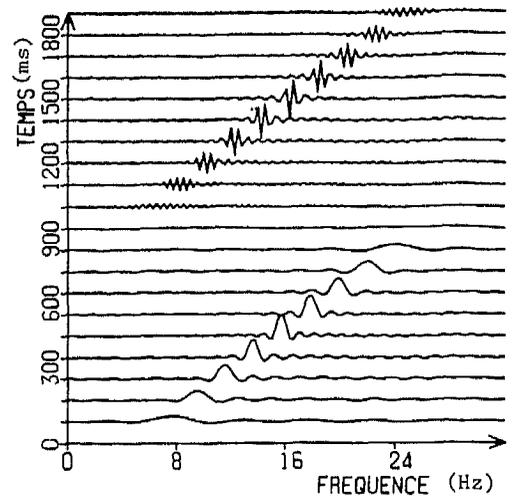
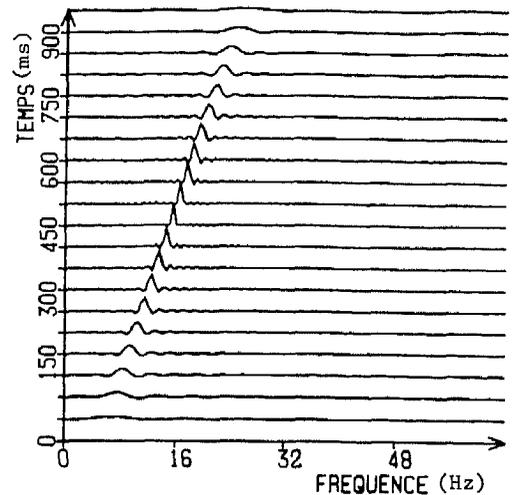


Fig. 8. — Illustration du phénomène de recouvrement fréquentiel dans la TWVDS  $W(2p, k)$  apériodique d'un signal réel modulé linéairement en fréquence.

Toujours pour le même type de signal, ses différentes TWVDS périodiques et apériodiques ne contenant pas de composantes de recouvrement sont respectivement représentées dans la figure 9 et la figure 10. Notons que le même signal réel a été échantillonné respectivement sur 64 points (ceci correspond à un échantillonnage de Shannon) et 128 points, dans le cas des versions périodiques  $W(2p, k)$  et  $W(2p, 2q)$ , et sur 128 points et 256 points, dans le cas des versions apériodiques  $W(2p, k)$  et  $W(2p, 2q)$ , en vue de satisfaire la condition (6), les différentes représentations comportant toutes 128 points sur l'axe des fréquences. Soulignons d'autre part que dans le cas des TWVDS périodiques, le signal analytique sur 64 points ou 128 points (selon la version  $W(2p, k)$  ou  $W(2p, 2q)$ ) a été borné par 64 points ou 128 points, afin de satisfaire la relation (5). Étant données les conditions de calcul, ces différentes représentations ne comportent pas de termes de recouvrements. A première vue, la version  $W(2p, k)$  périodique est très différente des



a)  $W(2p, k)$



b)  $W(2p, 2q)$

Fig. 9. — Différentes TWVDS périodiques du signal analytique associé à un signal réel modulé linéairement en fréquence.

autres versions en présentant deux segments de crête parallèles qui sont limités dans la même bande de fréquence. Notons cependant que l'information de structure temps-fréquence du signal se trouve seulement dans le segment inférieur, la présence du segment supérieur contribuant surtout à la préservation des propriétés théoriques de la TWV telles que la puissance instantanée, la densité spectrale, etc. En revanche, les trois autres versions ont le même aspect, et leurs crêtes uniques sont limitées dans le même domaine temps-fréquence. Ceci implique également l'autre fait important suivant : étant donnée une image temps-fréquence représentant la TWVD d'un signal discret, on serait incapable de dire de quelle version discrète de la TWV il s'agit. Pourtant, différentes TWVDS ont des propriétés différentes. Mais, en tout cas, ces diverses TWVDS, qu'elles soient périodiques ou apériodiques, ont toutes traduit correctement la loi de modulation du signal, et donnent des résultats équivalents.

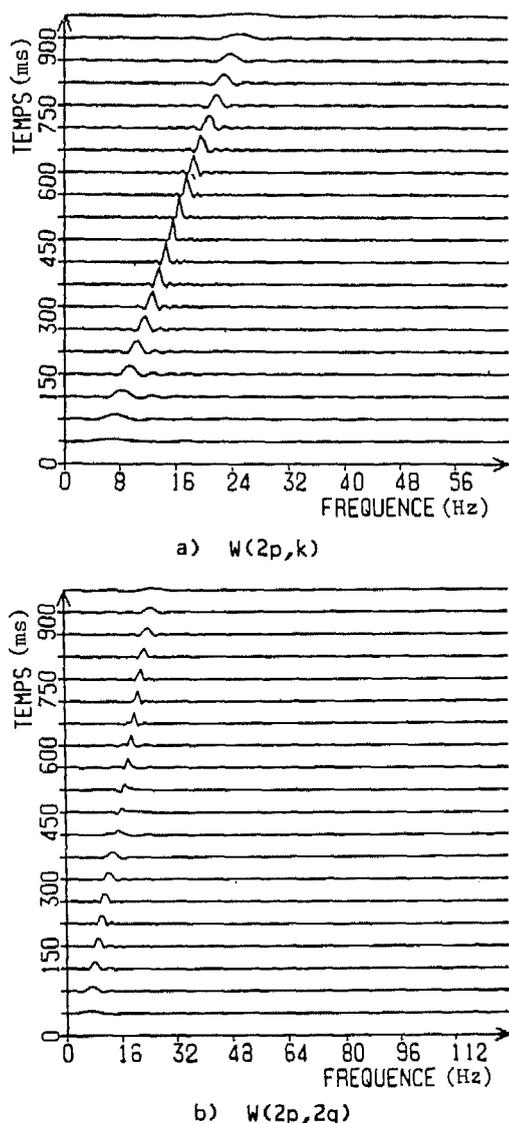


Fig. 10. — Différentes TWVDS a périodiques du signal analytique associé à un signal réel modulé linéairement en fréquence.

## 7. Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une classe de TWV discrètes simplifiées dont les propriétés fondamentales ont été étudiées et définies. Dans ce cadre, la distinction entre les versions périodiques et a périodiques a été clairement exposée, montrant ainsi d'une part les diverses possibilités pour obtenir une TWVD et facilitant d'autre part pour l'utilisateur le choix entre la conservation de propriétés théoriques (TWVDS périodique) et l'intérêt de la manipulation pratique (TWVDS a périodique). Ces discussions fournissent une interprétation claire de l'effet de discrétisation temporelle et fréquentielle du signal sur la TWV continue, et permettent de mieux comprendre le comportement de la TWV discrète dans le plan temps-fréquence. Les versions a périodiques ont l'avantage d'éviter les problèmes de recouvrement temporel, ce qui présente un intérêt certain pour les applications courantes. Le comportement comparatif de ces différentes versions simplifiées de la TWV discrète en présence de signaux multicompo-

santes et la réduction des termes d'interférences correspondants sortent du cadre de cet article, et doivent être traités ultérieurement.

Manuscrit reçu le 18 décembre 1989.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. ESCUDIÉ, Représentation en temps et fréquence des signaux d'énergie finie : analyse et observation des signaux, *Ann. Télécomm.*, 1979, 34 (3-4), pp. 101-111.
- [2] P. FLANDRIN et B. ESCUDIÉ, Time and Frequency representation of finite energy signals : a physical property as a result of an Hilbertian condition, *Signal Pro.*, 1980, 2, 2, pp. 93-100.
- [3] T. A. C. M. CLAASEN et W. F. G. MECKLENBRAUKER, The Wigner distribution. A tool for time-frequency signal analysis, *Philips J. Res.*, 1980, Vol. 35, pp. 217-250, pp. 276-300, pp. 372-383.
- [4] B. BOUACHACHE, Représentation temps-fréquence. Application à la mesure de l'absorption du sous-sol. Thèse D.I., INPG, Grenoble, 1982.
- [5] C. P. JANSE, A. J. M. KAISER, Time-frequency distributions of loudspeakers : the application of the Wigner distribution, *J. Audio. Eng. Soc.*, 1983, 31, 4, pp. 198-223.
- [6] P. FLANDRIN, Some feature of time-frequency representations of multicomponent signals, *Proc. ICASSP-84*, San Diego, USA, 1984, pp. 41B4.1-B4.4.
- [7] P. FLANDRIN et B. ESCUDIÉ, An interpretation of the pseudo-Wigner-Ville distribution, *Signal Pro.*, 1984, 6, 1, pp. 27-36.
- [8] T. A. C. M. CLAASEN et W. F. G. MECKLENBRAUKER, On the time-frequency distribution of energy distributions : can they look sharper than Heisenberg ? *Proc., ICASSP*, San Diego, 1984, pp. 41B7.1-41B7.4.
- [9] A. J. E. M. JANSSEN et T. A. C. M. CLAASEN, On positivity of time-frequency distributions, *IEEE Trans. ASSP, USA*, 1985, 33, pp. 1029-1032.
- [10] P. FLANDRIN et B. ESCUDIÉ, Analyse temps-fréquence par transformation de Wigner-Ville, *Traitement du signal*, 1985, 2, 2, pp. 144-151.
- [11] W. MARTIN et P. FLANDRIN, Wigner-Ville spectral analysis of nonstationary processes, *IEEE, ASSP, USA*, 1985, ASSP-33, 5, pp. 1461-1470.
- [12] W. MARTIN et P. FLANDRIN, Detection of changes of signal structure by using the Wigner-Ville spectrum, *Signal pro.*, 1985, 8, 2, pp. 215-233.
- [13] P. FLANDRIN, Représentation temps-fréquence des signaux non stationnaires, Thèse Doct.-état, INPG, Grenoble, 1987.
- [14] Y. M. ZHU, F. PEYRIN et R. GOUTTE, Transformation de Wigner-Ville : description d'un nouvel outil de traitement du signal et des images, *Ann. Télécom.*, 1987, vol. 42, n° 3-4, pp. 105-118.
- [15] D. S. CHAN, A non-aliased discrete-time Wigner distribution for time-frequency signal analysis, *Proc. ICASSP*, Paris, 1982, pp. 1325-1328.
- [16] T. A. C. M. CLAASEN et W. F. G. MECKLENBRAUKER, The aliasing problem in discrete time Wigner distribution, *IEEE Trans. ASSP*, 1983, ASSP-31, 5, pp. 1067-1072.
- [17] K. H. BRENNER, A discrete version of the Wigner-distribution function, *Proc. EUSIPCO*, Erlangen, West Germany : Elsevier Science, 1983, 36.3, pp. 307-310.
- [18] F. PEYRIN, R. PROST, A unified definition for the discrete-time, discrete frequency and discrete time-frequency Wigner distribution, *IEEE Trans.*, ASSP, 1986, ASSP-34, 4, pp. 858-867.