

# Nouvelle approche du zoom à démodulation complexe :

## Loupe par Filtrage Fréquentiel

New approach of complex demodulation zoom :

### Frequency Filtering Zoom



#### ZARADER Jean-Luc

Laboratoire de Robotique de Paris de l'Université P. M. Curie. UA CNRS 1305, Tour 66, 4 place Jussieu, 75252 PARIS Cedex 05.

Attaché temporaire d'enseignement et de recherche à l'Université P. M. Curie depuis 1986. Membre du Greco TDSI. Il obtient le titre de Docteur de l'Université Paris 6 en 1988. Ses travaux concernent l'analyse spectrale et le traitement adaptatif du signal.



#### GARNIER Michel

Service d'Aéronomie CNRS, Université P. M. Curie, Tour 15, 4 place Jussieu, 75252 PARIS Cedex 05.

Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure. Agrégé de Physique (1960). Docteur ès sciences (1967). Professeur d'Electronique et de Traitement du Signal à l'Université P. M. Curie (Paris 6). Domaine de recherche : Géophysique externe, Propagation radioélectrique, Traitement du signal. Président de l'Université Pierre et Marie Curie.



#### NICOLLET Michel

Service d'Aéronomie CNRS, Université P. M. Curie, Tour 15, 4 place Jussieu, 75252 PARIS Cedex 05.

Maître de conférence à l'Université P. M. Curie. Docteur ès sciences en 1979. Il a travaillé, de 1971 à 1981, à l'étude de l'environnement terrestre par sondage électromagnétique. Depuis 1981 ses domaines d'intérêt sont le traitement du signal et l'analyse numérique.

## RÉSUMÉ

La séparation de composantes spectrales proches ou l'évaluation précise d'une ou plusieurs fréquences d'un signal sont des problèmes classiques en traitement du signal. Nous présentons dans cet article une nouvelle technique d'accroissement de la résolution fréquentielle appelée loupe par filtrage fréquentiel (LFF). Cette méthode présente l'avantage, par rapport aux zoom existants, de restituer les spectres d'amplitude et de phase du signal traité. D'autre part cette loupe a été conçue de façon à permettre, par logiciel, un traitement en temps réel de signaux basse fréquence.

**MOTS-CLÉS :** Analyse spectrale, zoom spectral, TFD, filtrage fréquentiel.

## ABSTRACT

The spectral component discrimination or the estimation of one or more signal frequencies are classical problems in signal processing. In this paper, we study a new technic to increase the frequency resolution called frequency filtering zoom (LFF). This method is complementary of existing methods since it allows to save the spectrum amplitude and phase of the signal. On the other hand, a software real time analysis of signal is possible by this zoom.

**KEY WORDS:** Spectral analysis, spectral zoom, DFT, frequency filtering.

## 1. Introduction

Outil puissant d'analyse spectrale, la Transformée de Fourier Discrète (TFD) est utilisée dans un grand nombre de domaines scientifiques (géophysique, acoustique, ...). Le spectre périodique, calculé à partir du signal défini sur  $A$  points, ou canaux, acquis durant un temps  $T$  et échantillonné à une fréquence  $F_e$ , est restitué sur  $A$  points (fig. 1). Le pas en fréquence  $\Delta f_A$  est donné par :

$$\Delta f_A = \frac{1}{T} = \frac{1}{AT_e} = \frac{F_e}{A}$$

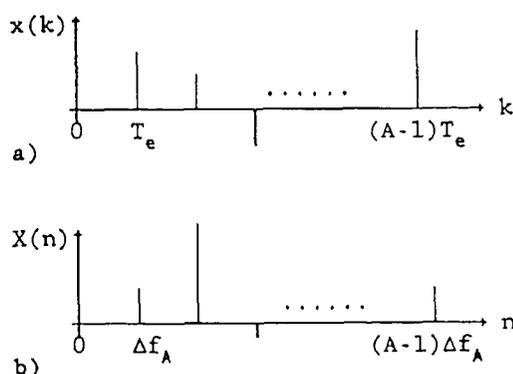


Fig. 1. — a) Signal  $x(k)$ . b) Transformée de Fourier Discrète  $X(n)$ .

Cependant, il faut disposer pour certaines applications, où  $F_e$  est limitée par la relation de Shannon et  $A$  par la puissance du calculateur, d'une résolution plus fine. L'opération qui consiste à accroître cette résolution est communément appelée zoom ou loupe spectrale. Ces loupes sont divisées en deux catégories. Les loupes non sélectives qui augmentent la résolution sur toute la bande  $[0, F_e]$  et les loupes sélectives qui restituent les fréquences comprises dans la bande  $[f_i, f_i + B_p]$ , où  $f_i$  est la fréquence origine de la loupe et  $B_p$  la largeur de la loupe. Nous poserons :

$$(1) \quad \begin{cases} f_i = S \Delta f_A = S/AT_e \\ B_p = B \Delta f_A = B/AT_e \end{cases}$$

où  $S$  représente l'indice du canal origine de la loupe et  $B$  le nombre de canaux contenus dans la bande passante.

Après un bref exposé des méthodes utilisées dans la mise au point des loupes non sélectives, nous présenterons les loupes spectrales sélectives, pour lesquelles la contrainte essentielle est de ne pouvoir effectuer une TFD sur plus de  $A$  points. C'est dans ce cadre que nous introduirons la Loupe par Filtrage Fréquentiel (LFF) que nous avons développée. Outre sa capacité à rejeter efficacement les fréquences hors-bande le zoom LFF a la particularité de conserver l'information liée à la phase du signal. On pourra ainsi exploiter le spectre de puissance mais aussi le spectre de phase.

## 2. Loupes non sélectives

## 2.1. MODÈLE DE SHAW

Introduite pour la première fois en 1970 par E. Shaw [1] et reprise par W. R. Gilchrist [2], la loupe par Transformation de Fourier Rapide (TFR), appelée « zoom transform », tient dans la décomposition d'une suite de  $D$  points, notée  $x(k)$ , en  $C$  sous-suites de  $A$  points, notées  $x_i(m)$  où  $i$ , compris entre 0 et  $C-1$ , est l'indice de sous-suite et  $m$ , compris entre 0 et  $A-1$ , est l'indice d'un échantillon dans chacune des sous-suites (fig. 2).

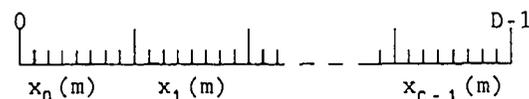


Fig. 2. — Suite  $x(k)$  décomposée en  $C$  sous-suites de  $A$  points.

Soit  $\Delta f_D$  la résolution désirée et  $\Delta f_A$  la résolution initiale on a :

$$(2) \quad \frac{\Delta f_A}{\Delta f_D} = \frac{1/AT_e}{1/DT_e} = \frac{D}{A} = C$$

$D$  et  $A$  sont généralement des puissances de deux.  $C$  est appelé facteur de loupe. Soit  $X(n)$  la TFD de la suite  $x(k)$  :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{D-1} x(k) W_D^{-nk} \text{ avec } W_D = \exp(2 \pi j / D)$$

Posons  $k = iA + m$  afin de parcourir tous les échantillons de la suite de  $D$  points. De même, dans

l'espace des fréquences, on peut décomposer la suite  $X(n)$  en posant  $n = rC + t$  avec  $r$  et  $t$  appartenant respectivement aux intervalles  $[0, A - 1]$  et  $[0, C - 1]$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} x(k) &= x(iA + m) = x_i(m) \\ X(n) &= X(rC + t) \end{aligned}$$

d'où :

$$X(rC + t) = \sum_{i=0}^{C-1} \sum_{m=0}^{A-1} x_i(m) W_C^{-it} W_A^{-rm} W_D^{-tm}.$$

L'approximation de Shaw consiste à éliminer le « twiddle factor », c'est-à-dire le terme  $W_D^{-tm}$ , en posant :

$$W_D^{-tm} = \exp(-2\pi jtm/D) = 1.$$

On notera que cette approximation, valable essentiellement en bords de bande ( $tm \approx 0$  ou  $tm \approx D$ ), ne permet de restituer correctement que les fréquences proches de 0 ou  $F_e$ .

Le spectre estimé, noté  $\hat{X}(rC + t)$  devient :

$$(3) \quad \hat{X}(rC + t) = \sum_{m=0}^{A-1} \left[ \sum_{i=0}^{C-1} x_i(m) W_C^{-it} \right] W_A^{-rm}$$

en posant :

$$Y_m(t) = \sum_{i=0}^{C-1} x_i(m) W_C^{-it} = \text{TFD}_C \{x_i(m)\}$$

on trouve :

$$\hat{X}(rC + t) = \sum_{m=0}^{A-1} Y_m(t) W_A^{-rm} = \text{TFD}_A \{Y_m(t)\}.$$

On a ainsi ramener le calcul d'une TFD sur  $D$  points au calcul de  $A$  transformées sur  $C$  points suivi de  $C$  transformées sur  $A$  points, soit  $5D \log_2(D)$  opérations.

Pour diminuer l'erreur introduite par l'approximation sur le « twiddle factor », P. C. Yip [3] a étudié la réponse de la loupe à une excitation sinusoïdale et en a déduit les corrections  $\Delta\varphi$  et  $\Delta a$  à apporter aux termes de phase et d'amplitude :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \pi t(A-1)/D \\ \Delta a &= A \frac{\sin(\pi t/D)}{\sin(\pi t/C)}. \end{aligned}$$

On notera cependant que le traitement ne peut commencer qu'après avoir acquis la totalité des  $D$  échantillons. Cette condition interdit tout traitement en temps réel des signaux.

## 2.2. LOUPE DE THRANE

N. Thrane [4] a proposé en 1980 une décomposition du spectre  $X(n)$  comparable à celle de Shaw. Le signal est partagé en  $C$  blocs de  $A$  points. Chaque bloc est constitué d'échantillons séparés de  $CT_e$  secondes (fig. 3) :

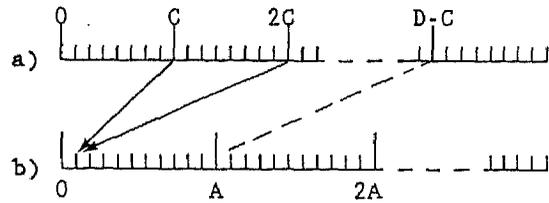


Fig. 3. — a) Suite  $x(k)$  de  $D$  points. b) Sous-suites de Thrane.

Soit :

$$x(k) = x(mC + i)$$

alors :

$$X(n) = \sum_{i=0}^{C-1} \left[ \sum_{m=0}^{A-1} x(mC + i) W_A^{-nm} \right] W_D^{-ni}.$$

En posant :

$$\begin{aligned} G_i(n) &= \sum_{m=0}^{A-1} x(mC + i) W_A^{-nm} \\ &= \text{TFD}_A \{x(mC + i)\} \end{aligned}$$

on trouve

$$X(n) = \sum_{i=0}^{C-1} G_i(n) W_D^{-ni}.$$

Cette méthode présente l'avantage de n'introduire aucune approximation. Cependant, pour la même raison que celle évoquée dans le chapitre précédent, le traitement ne peut s'effectuer en temps réel.

## 3. Loupes sélectives

Ces loupes, centrées sur une bande de fréquence de largeur  $B$  autorisent, pour la plupart un traitement en temps réel des données.

### 3.1. INTÉGRATION COHÉRENTE

La loupe par intégration cohérente [5] est une application immédiate de la décomposition de Shaw. En reprenant l'expression de  $\hat{X}(rC + t)$  et en posant  $r = 0$  dans la relation (3), afin d'obtenir les basses fréquences, le spectre  $\hat{X}(t)$  s'écrit :

$$\hat{X}(t) = \sum_{i=0}^{C-1} \left[ \sum_{m=0}^{A-1} x_i(m) \right] W_C^{-it}.$$

Soit encore

$$\hat{X}(t) = \text{TFD}_C \left\{ \sum_{m=0}^{A-1} x_i(m) \right\}.$$

Il suffit, pour réaliser ce zoom, de sommer  $A$  échantillons successifs du signal, de ranger le résultat dans un bloc de  $C$  points et d'en calculer sa TFD. Le spectre obtenu est défini sur  $C$  raies. La plage de fréquences balayées est  $[0, 1/AT_e[$  avec un pas  $1/(ACT_e)$ .

### 3.2. LOUPE À DÉMODULATION COMPLEXE

Notée ZFFT, la loupe à démodulation complexe [6] est une application de la propriété de translation de la transformée de Fourier.

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$x(t) \exp(2\pi j f_1 t) \Leftrightarrow X(f - f_1).$$

Représentée sur la figure 4, la réalisation de cette loupe tient en trois points. Le signal  $x(k)$ , obtenu après échantillonnage du signal  $x(t)$  à une période  $T_e$ , est multiplié par  $\exp(-2\pi j f_1 k T_e)$  où  $f_1$  est la fréquence origine de la loupe. Ensuite, le signal complexe  $x_c(k)$  est filtré par un filtre passe-bas de largeur  $B_p$ . Pour finir le signal de sortie du filtre  $x_f(k)$  est sous échantillonné avec une période  $T'_e$  donnée par la relation :

$$T'_e = 1/2 B_p.$$

D'après la relation (1) on trouve :

$$T'_e = AT_e/2B$$

ce qui revient à prélever un point tous les  $A/2B$  points du signal  $x_f(k)$ . On peut alors procéder à l'analyse spectrale du signal sous-échantillonné  $x_{sec}(k)$ .

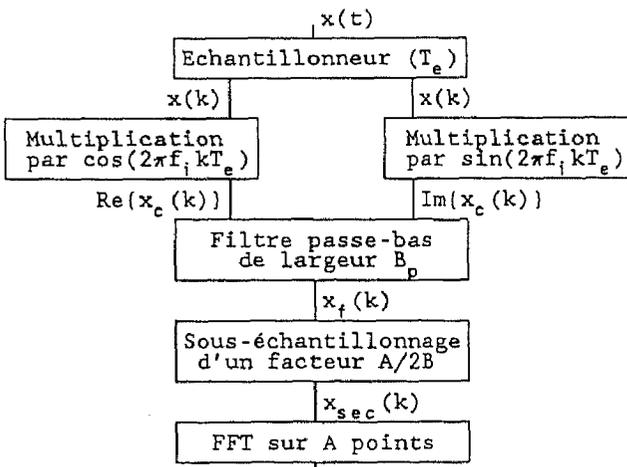


Fig. 4. — Z.F.F.T.

Nous noterons que B. Liu et F. Mintzer [7] ont proposé une variante de la loupe à démodulation complexe qui utilise la propriété de sous-échantillonnage de signaux à bande étroite. Le signal large bande initial est d'abord filtré par un filtre passe-bande de fréquence de coupure basse  $f_i$  et de fréquence de coupure haute  $f_i + B_p$ . Le signal de sortie du filtre est alors sous-échantillonné. La fréquence de sous-échantillonnage est choisie de façon à n'introduire aucun recouvrement spectral lors de la périodisation du spectre à bande étroite.

Pour que les deux types de loupe présentés soient efficaces il faut que les filtres réalisés soient le plus plat (taux d'ondulation faible dans la bande passante) et le plus raide (bande de transition étroite)

possible. D'autre part, ces filtres étant, le plus souvent à déphasage linéaire (Butterworth, Chebyshev, FIR, ...), un traitement supplémentaire est nécessaire pour retrouver l'information liée à la phase du signal. Ce traitement varie suivant le type de filtre. La simplicité de réalisation de ces loupes en fait leur principal intérêt.

### 4. Loupe par filtrage fréquentiel (LFF)

Nous nous sommes inspirés, pour mettre au point la loupe par filtrage fréquentiel (LFF), de la méthode classique de démodulation complexe en nous intéressant, dans un premier temps, à la technique de filtrage utilisée. Bien que les caractéristiques des loupes LFF et ZFFT soient comparables, la technique que nous avons mise au point est totalement différente et présente l'avantage de conserver l'information liée à la phase du signal traité.

Nous nous sommes imposés le cahier des charges suivant :

- acquisition et traitement en ligne de blocs de  $A$  points ;
- reconstruction du signal filtré dont les composantes proviennent du zoom sur la bande de largeur  $B_p$  ( $= B/AT_e$ ) et d'origine  $f_i$  ( $= S/AT_e$ ), où  $S$  et  $B$  représente respectivement le canal origine de la loupe et le nombre de canaux contenus dans la bande passante ;
- taux d'ondulation inférieur respectivement à  $-10$  dB et à  $-20$  dB dans la bande passante et dans la bande atténuée ;
- bande de transition inférieure à trois canaux ( $4/AT_e$ ) ;
- déphasage quasi nul dans la bande passante.

Nous précisons pour finir qu'il a fallu tenir compte dans cette étude de l'implantation logicielle finale.

#### 4.1. PRINCIPE

Pour réaliser la loupe par filtrage fréquentiel nous avons, dans un premier temps, décomposé la suite  $x(k)$  en blocs de  $A$  points, notés  $x_i(m)$  ( $m \in [0, A - 1]$ ), puis nous avons multiplié le spectre  $X_i(n)$  du bloc  $x_i(m)$  par le filtre  $F(n)$ , qui vaut 1 si  $n$  est compris entre les canaux  $S$  et  $S + B$  et 0 ailleurs (fig. 5) :

L'étape suivante consiste à traduire  $X_{Fi}(n)$  pour ramener la bande  $[S/AT_e, (S + B)/AT_e]$  à l'origine, en respectant les propriétés spectrales des signaux réels. Le spectre  $Y_i(p)$  obtenu après translation est défini sur  $2B$  points par :

$$Y_i(0) = \text{Re} \{X_{Fi}(S)\}$$

$$Y_i(B) = \text{Re} \{X_{Fi}(S + B)\}$$

$$Y_i(p) = X_{Fi}(S + p)$$

avec  $p \in [1, B - 1]$

$$Y_i(p) = Y_i(2B - p)^* = X_{Fi}(A - S - 2B + p)$$

avec  $p \in [B + 1, 2B - 1]$ .

En calculant la transformée de Fourier discrète inverse de  $Y_i(p)$  on obtient le signal  $y_i(r)$ , défini lui

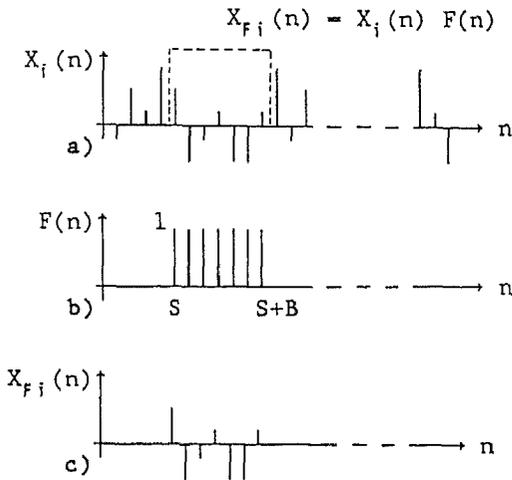


Fig. 5. — a) Spectre  $X_i(n)$ . b) Filtre  $F(n)$ . c) Spectre après filtrage  $X_{Fi}(n)$ .

aussi sur  $2B$  points.  $y_i(r)$  est alors juxtaposé à  $y_{i-1}(r)$ , qui est issu du traitement du bloc précédent,  $x_{i-1}(m)$ . On procède ainsi jusqu'à obtention d'un bloc de  $A$  points, noté  $y(m)$ . On peut alors calculer la transformée de Fourier discrète  $Y(v)$  du signal  $y(m)$ .

Le facteur de loupe  $C$ , qui correspond aussi au nombre de blocs nécessaires à la reconstruction du signal  $y(m)$ , est donné par :

$$(4) \quad C = \frac{A}{2B}$$

Pour apprécier l'efficacité de la loupe nous avons utilisé deux méthodes. La première consiste à visualiser le signal de sortie  $y(m)$  lorsque l'entrée est une sinusoïde  $x(k)$  définie par :

$$x(k) = G_0 \cos(2\pi f_0 k T_e + \varphi)$$

Le résultat attendu pour  $y(m)$  est une sinusoïde de fréquence apparente  $f_0 - S/AT_e$  si  $f_0$  appartient à l'intervalle  $[S/AT_e, (S+B)/AT_e]$ , dans le cas contraire  $y(m)$  doit être nul.

La seconde méthode consiste à apprécier le gain du filtre réalisé en faisant varier la fréquence  $f_0$  de 0 Hz à  $F_e/2$  et en calculant, pour chaque fréquence, le rapport des puissances entrée-sortie.

4.1.1. Première méthode

Nous avons représenté, sur la figure 6 a,  $y(m)$  pour les valeurs des paramètres suivants :

$$G_0 = 2 \text{ V}, \quad f_0 = 11,5 \text{ Hz} \text{ et } \varphi = \pi/4 \text{ rad}$$

$$T_e = 1/256 \text{ s}, \quad A = 256, \quad B = 16,$$

$$S = 10 \text{ d'où } \Delta f_A = 1 \text{ Hz et } C = 8.$$

En conséquence le temps total nécessaire à la reconstruction du signal filtré est  $T = AT_e * C$  soit 8 secondes. Le nombre total de points traités est  $D = A * C$  soit 2 048 points et la résolution finale  $\Delta f_D$  est de 1/8 Hz.

On constate que le signal présente de fortes discontinuités, dues essentiellement à la juxtaposition des blocs  $y_i(r)$ . Au niveau spectral (fig. 6 b), ces discontinuités introduisent des raies parasites indésirables d'amplitude inférieure à  $-22$  dB. On note cependant que la composante fondamentale à 11,5 Hz est déjà prédominante bien qu'atténuée,  $-0,6$  dB au lieu de 0 dB.

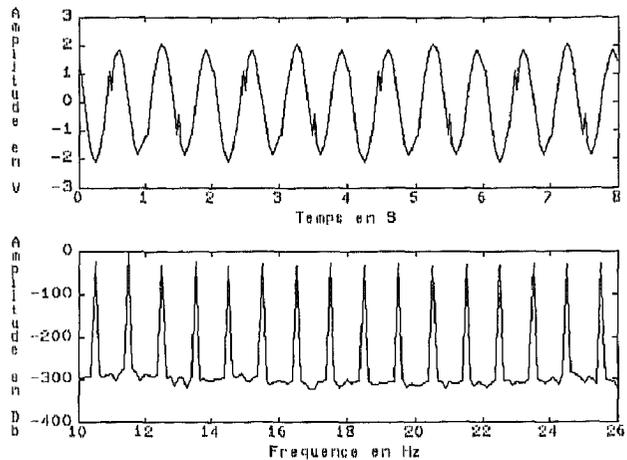


Fig. 6. — a) Réponse  $y(m)$  au signal  $x(k) = 2 \cos(2 * \pi * f_0 * k * T_e + \pi/4)$  pour  $f_0 = 11,5$  Hz,  $T_e = 1/256$  s,  $A = 256$ ,  $B = 16$  et  $S = 10$ . b) Spectre d'amplitude  $|Y(n)|$ .

4.1.2. Seconde méthode

La figure 7 représente le gain en puissance du zoom pour des valeurs identiques de  $A$ ,  $B$ ,  $S$  et  $T_e$ . On a :

- fréquence de coupure du signal d'entrée :  $F_C = 1/2 T_e = 128$  Hz
- largeur de la bande passante :  $B_p = B \Delta f_A = 16$  Hz
- largeur de la bande de transition :

$$B_T = [(S + 1) - (S - 1)] \Delta f_A = 2 \Delta f_A = 2 \text{ Hz}$$

- taux d'ondulation dans la bande passante :  $d_1 = -9$  dB
- taux d'ondulation dans la bande affaiblie :  $d_2 = -10$  dB.

L'importance des taux d'ondulations  $d_1$  et  $d_2$  tend à confirmer que ce type de traitement est peu efficace. Pour améliorer la reconstruction de  $y(m)$ , nous avons repris les points importants de cet algorithme (pondération, filtrage, translation) en y apportant de nouvelles solutions.

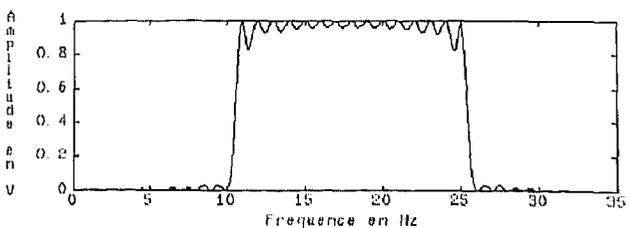


Fig. 7. — Gain en puissance de la loupe représenté entre les fréquences 0 et 32 Hz.

#### 4.2. CHOIX DE LA FENÊTRE DE PONDÉRATION ET TECHNIQUE DE DÉPONDÉRATION

Il faut, dans un premier temps, choisir une fenêtre de troncature plus performante que la fenêtre naturelle. Nous avons utilisé la fenêtre de Hanning,  $h_N(m)$ , définie par :

$$h_N(m) = 0.5 - 0.5 \cos(2\pi m/A).$$

Chaque bloc  $x_i(m)$  est d'abord multiplié par  $h_N(m)$  avant d'être traité comme précédemment. L'estimation du spectre des blocs  $x_i(m)$  est améliorée (disparition des hautes fréquences qui étaient introduites par la fenêtre rectangulaire) mais le signal  $y_{H1}(m)$  obtenu après traitement est alors pondéré par tranches de  $2B$  points (fig. 8 a). Pour effectuer la dépondération nous avons recommencé le même traitement sur les blocs translétés  $x'_i(m')$  ( $m' \in [0, A-1]$ ), où l'exposant  $t$  signifie que le bloc est translété.  $x'_i(m')$  est constitué de la seconde moitié du bloc  $x_i(m)$  suivie de la première moitié du bloc  $x_{i+1}(m)$ .

$$\begin{cases} x'_i(m') = x_i(m' + A/2) & \text{si } m' \in [0, A/2 - 1] \\ x'_i(m') = x_{i+1}(m' - A/2) & \text{si } m' \in [A/2, A - 1] \end{cases}$$

Le signal issu du traitement des blocs  $x'_i(m')$ , noté  $y_{H2}(m)$ , est pondéré par tranche de  $2B$  points. La fenêtre de pondération ayant été décalée, entre le premier et le second traitement, de  $A/2$  points, on retrouve sur les suites  $y_{H1}(m)$  et  $y_{H2}(m)$  un décalage de la fenêtre de  $B$  points (fig. 8 b).

Le signal dépondéré  $y(m)$  est donné par la relation :

$$(5) \quad y(m) = y_{H1}(m) + y_{H2}(m)$$

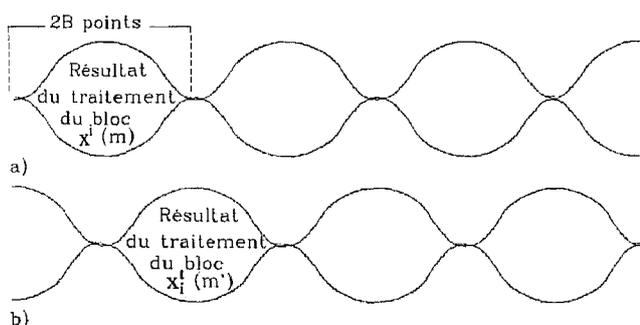


Fig. 8. — a) Résultat du premier traitement  $y_{H1}(m)$ .  
b) Résultat du second traitement  $y_{H2}(m)$ .

#### 4.3. EFFET DE LA TRANSLATION EN FRÉQUENCE

Si l'on tient compte de l'opération qui consiste à ramener à l'origine la bande  $[S/AT_e, (S+B)/AT_e]$ , la technique de dépondération mise en place reste incomplète. En effet, le résultat cherché après pondération, translation du spectre et dépondération est  $x_i(m) \exp(-2\pi jmS/A)$  or, après translation,

le produit de  $x_i(m)$  par  $h_N(m)$  devient :

$$x_i(m) h_N(m) \xrightarrow{T} x_i(m) h_N(m) \exp(-2\pi jmS/A).$$

De même :

$$x'_i(m') h_N(m') \xrightarrow{T} x'_i(m') h_N(m') \exp(-2\pi jm'S/A)$$

or, si  $m' \in [0, A/2 - 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} x'_i(m') h_N(m') \exp(-2\pi jm'S/A) &= \\ &= x_i(m' + A/2) h_N(m') \exp(-2\pi jm'S/A). \end{aligned}$$

En posant  $m' = m + A/2$ , on trouve :

$$\begin{aligned} x_i(m' + A/2) h_N(m') \exp(-2\pi jm'S/A) &= \\ &= \frac{(-1)^S}{2} x_i(m) (1 + \cos(2\pi m/A)) \\ &\quad \times \exp(-2\pi jmS/A). \end{aligned}$$

En effectuant la somme des deux traitements, on a :

$$\begin{aligned} x_i(m) h_N(m) \exp(-2\pi jmS/A) + \\ + x_i(m' + A/2) h_N(m') \exp(-2\pi jm'S/A) \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x_i(m) [(1 - \cos(2\pi m/A)) + (-1)^S \\ (1 + \cos(2\pi m/A))] \exp(-2\pi jmS/A). \end{aligned}$$

On remarque que, pour les valeurs impaires de  $S$ , on introduit le terme  $\cos(2\pi m/A)$  qui a pour effet de moduler la suite  $x_i(m)$ . Pour éliminer ce terme nous avons décidé de multiplier systématiquement  $x'_i(m')$  par  $(-1)^S$ . Ainsi la somme :

$$\begin{aligned} x_i(m) h_N(m) \exp(-2\pi jmS/A) + \\ (-1)^S x'_i(m') h_N(m') \exp(-2\pi jm'S/A) \end{aligned}$$

est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x_i(m) [(1 - \cos(2\pi m/a)) + (-1)^{2S} \\ \times (1 + \cos(2\pi m/A))] \exp(-2\pi jmS/A) \end{aligned}$$

où encore :

$$x_i(m) \exp(-2\pi jmS/A).$$

*Note :* Le raisonnement qui vient d'être effectué pour des valeurs de  $m$  comprises entre 0 et  $A/2 - 1$ , peut être mené de façon identique pour  $m' \in [A/2, A - 1]$ .

Le traitement des blocs  $x'_i(m')$  est représenté sur la figure 9.

#### 4.4. DIMINUTION DES EFFETS DE BORD DE BANDE

Nous pouvons déjà apprécier, en comparant les figures 6 et 10, l'amélioration apportée dans la reconstruction du signal de sortie et par conséquent dans l'estimation du spectre.

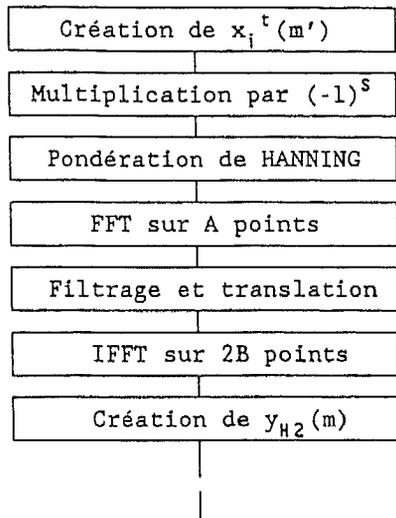


Fig. 9. — Traitement des blocs  $x_i^t(m')$ .

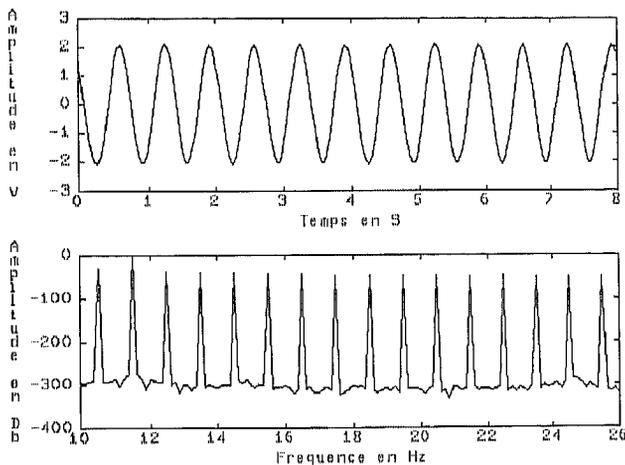


Fig. 10. — a) Réponse  $y(m)$  au signal  $x(k) = 2 \cos(2 * \pi * f_0 * k * T_e + \pi/4)$  pour  $f_0 = 11,5$  Hz,  $T_e = 1/256$  s,  $A = 256$ ,  $B = 16$  et  $S = 10$ .  
b) Spectre d'amplitude  $|Y(n)|$ .

L'amplitude de la composante principale (11,5 Hz) est de -0,1 dB. On constate cependant, la persistance de raies parasites dont l'amplitude, inférieure à -29 dB décroît lorsque la fréquence  $f_0$  s'éloigne des bords de la loupe. Ainsi, les composantes hors-bande appartenant aux intervalles  $[(S - 1) \Delta f_A, S \Delta f_A]$  et  $[(S + B) \Delta f_A, (S + B + 1) \Delta f_A]$ , ne sont que faiblement atténuées. Nous avons décidé, pour diminuer l'influence de ces raies, d'invertir les étapes filtrage-translation et pondération de Hanning. En effet, la relation liant le spectre  $S(n)$  d'un signal quelconque  $s(k)$  défini sur  $A$  points et non pondéré, et le spectre  $S_H(n)$  du même signal pondéré par Hanning est :

$$S_H(n) = \frac{1}{2} S(n) - \frac{1}{4} S(n - 1) - \frac{1}{4} S(n + 1)$$

avec, en particulier, pour les raies 0 et  $A/2$  :

$$S_H(0) = \frac{1}{2} \text{Re} \{ S(0) - S(1) \}$$

$$S_H(A/2) = \frac{1}{2} \text{Re} \{ S(A/2) - S(A/2 - 1) \} .$$

Dans notre cas, après avoir appliqué la fonction de pondération sur  $x_i(m)$  et opéré le filtrage et la translation, le spectre  $Y_i(n)$  obtenu vérifie les relations :

$$Y_i(0) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ X_i(S) - \frac{1}{2} X_i(S - 1) - \frac{1}{2} X_i(S + 1) \right\}$$

$$Y_i(B) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ X_i(S + B) - \frac{1}{2} X_i(S + B - 1) - \frac{1}{2} X_i(S + B + 1) \right\} .$$

Par contre, si on inverse les étapes filtrage-translation et pondération de Hanning, on trouve, pour  $Y_i(0)$  et  $Y_i(B)$  :

$$Y_i(0) = \frac{1}{2} \text{Re} \{ X_i(S) - X_i(S + 1) \}$$

$$Y_i(B) = \frac{1}{2} \text{Re} \{ X_i(S + B) - X_i(S + B - 1) \} .$$

Nous avons ainsi éliminé la contribution due aux raies  $X_i(S - 1)$  et  $X_i(S + B + 1)$ . Le résultat obtenu après inversion, représenté sur la figure 11, montre que l'amplitude des raies parasites, inférieure à -51 dB, a fortement diminué.

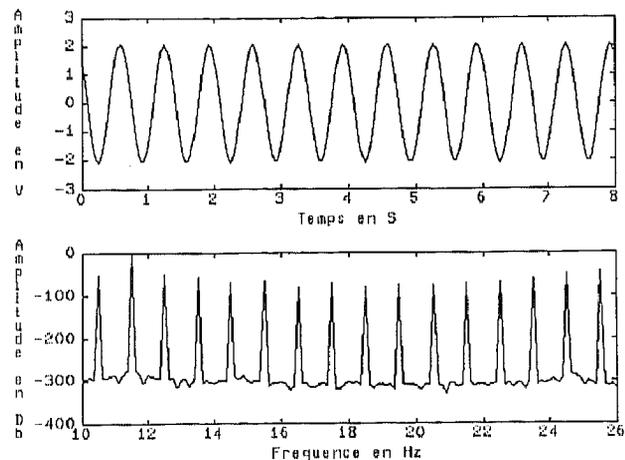


Fig. 11. — a) Réponse  $y(m)$  au signal  $x(k) = 2 \cos(2 * \pi * f_0 * k * T_e + \pi/4)$  pour  $f_0 = 11,5$  Hz,  $T_e = 1/256$  s,  $A = 256$ ,  $B = 16$  et  $S = 10$ .  
b) Spectre d'amplitude  $|Y(n)|$ .

4.5. CHOIX DU FILTRE FRÉQUENTIEL

Nous nous sommes intéressés pour finir à l'opération de filtrage et, plus particulièrement, au traitement des raies en bord de bande,  $X_i(S)$  et  $X_i(S + B)$ . Nous avons reproduit sur la figure 12 le recouvrement spectral dû à la translation. Les taux d'ondulation correspondants sont en moyenne de -13 dB dans la bande et de -29 dB hors bande. Ces valeurs

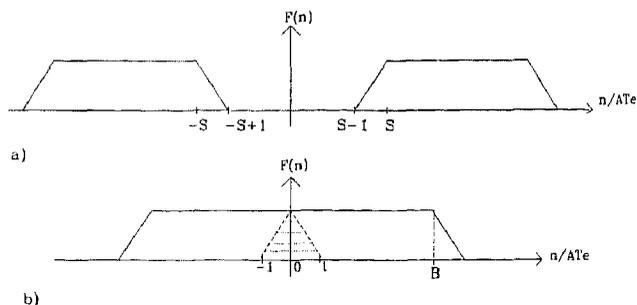


Fig. 12. — a) Filtre  $F(n)$ . b) Recouvrement spectral après translation.

pouvant varier de  $\pm 1$  dB suivant l'origine et la largeur de loupe. La bande de transition  $B_T$  est donnée par :

$$B_T = S \Delta f_A - (S - 1) \Delta f_A = \Delta f_A .$$

En modifiant les coefficients proches des bords de bandes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F(S) &= F(S + B) = 0.5 \\ F(S + 1) &= F(S + B - 1) = 0.6 \\ F(S + 2) &= F(S + B - 2) = 0.8 \end{aligned}$$

on augmente la bande de transition

$$B_T = [(S + 3) - (S - 1)] \Delta f_A = 4 \Delta f_A$$

mais on diminue les taux d'ondulations dans la bande passante ( $d_1 = -17$  dB) et dans la bande affaiblie ( $d_2 = -34$  dB). Le filtre ainsi réalisé est représenté sur la figure 13.

L'algorithme définitif est décrit sur la figure 14.

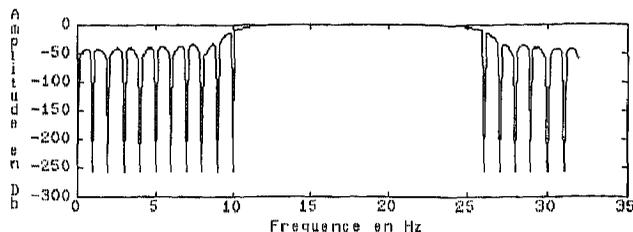


Fig. 13. — Gain du filtre exprimé en dB avec  $F(S) = F(S + B) = 0,5$ ,  $F(S + 1) = F(S + B - 1) = 0,6$  et  $F(S + B - 2) = 0,8$ .

### 5. Erreur d'estimation

#### 5.1. SPECTRE DE SORTIE

L'expression du spectre de sortie  $Y(v)$  [8] est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(v) &= \sum_{i=0}^{C-1} \sum_{m=0}^{A/2-1} x(iA + m) W_C^{-vi} \\ &\times \left[ I(v, m) + (-1)^S W_{2C}^{+v} I\left(v, m + \frac{A}{2}\right) \right] \\ &+ \sum_{i=0}^{C-1} \sum_{m=A/2}^{A-1} x(iA + m) W_C^{-vi} \\ &\times \left[ I(v, m) + (-1)^S W_{2C}^{-v} I\left(v, m - \frac{A}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Avec :

$$I(v, m) = \sum_{r=0}^{2B-1} J(m, r) W_A^{-vr}$$

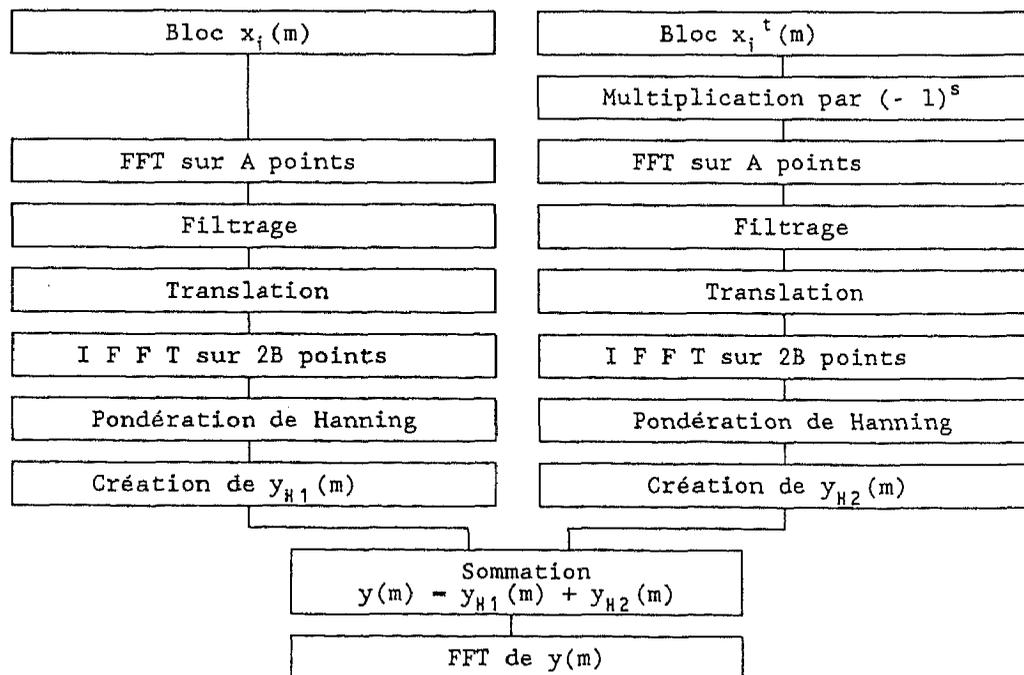


Fig. 14. — Loupe par filtrage fréquentiel.

et :

$$J(m, r) = \frac{1}{4B} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi r}{2B} \right) \right) \times \left[ F(S) \cos \left( \frac{2\pi mS}{A} \right) + F(S+B) \cos \left( \frac{2\pi m(S+B)}{A} + \pi r \right) + \sum_{u=1}^{B-1} 2 F(S+u) \cos \left( \frac{-2\pi m(S+u)}{A} + \frac{\pi r u}{B} \right) \right]$$

$F(u)$  = coefficient multiplicatif du filtre appliqué à la  $u$ -ième composante.

Nous avons représenté (fig. 15), à partir de l'expression du spectre  $Y(v)$ , le déphasage de la loupe. On constate que, quel que soit le type de filtre  $F(n)$  utilisé, le déphasage des composantes comprises entre  $(S+1)\Delta f_A$  et  $(S+B-1)\Delta f_A$ , reste inférieur à  $10^{-5}$  radians.

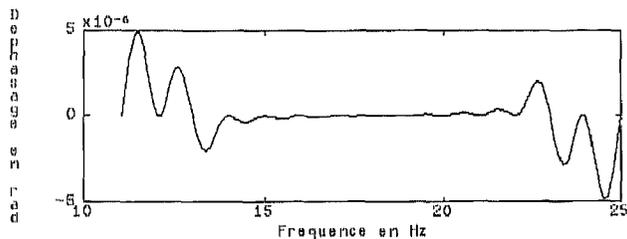


Fig. 15. — Déphasage  $\varphi(f)$  avec  $T_e = 1/256$  s,  $A = 256$ ,  $B = 16$ ,  $S = 10$ .

5.2. ERREUR D'ESTIMATION

Pour calculer l'erreur d'estimation nous avons comparé les raies  $Y(v)$  aux raies issues de la TFD sur  $D$  points,  $X(n)$ , de la suite  $x(k)$ . Nous devons pour cela distinguer deux cas.

Si  $v \in [0, A/2]$  alors les fréquences correspondantes pour  $X(n)$  sont comprises entre  $S/AT_e$  et  $(S+B)/AT_e$ . L'erreur  $E(v)$  est donnée par :

$$E(v) = Y(v) - X(SC + v).$$

Le calcul aboutit à [8] :

$$E(v) = \sum_{i=0}^{C-1} \sum_{m=0}^{A/2-1} x(iA+m) W_C^{-vi} \times [I(v, m) + (-1)^S W_2^+ I \times \left( v, m + \frac{A}{2} \right) - W_D^{-m(v+SC)}] + \sum_{i=0}^{C-1} \sum_{m=A/2}^{A-1} x(iA+m) W_C^{-vi} \times [I(v, m) + (-1)^S W_2^- I \times \left( v, m - \frac{A}{2} \right) - W_D^{-m(v+SC)}].$$

Si, par contre,  $v \in [A/2 + 1, A - 1]$  l'erreur est déterminée en comparant  $Y(v)$  et  $X(D - A - SC + v)$  :

$$E(v) = Y(v) - X(D - A - SC + v)$$

soit :

$$E(v) = \sum_{i=0}^{C-1} \sum_{m=0}^{A/2-1} x(iA+m) W_C^{-vi} \times [I(v, m) + (-1)^S W_2^+ I \times \left( v, m + \frac{A}{2} \right) - W_D^{-m(v-A-SC)}] + \sum_{i=0}^{C-1} \sum_{m=A/2}^{A-1} x(iA+m) W_C^{-vi} \times [I(v, m) + (-1)^S W_2^- I \times \left( v, m - \frac{A}{2} \right) - W_D^{-m(v-A-SC)}].$$

Le calcul de l'amplitude maximum de  $E(v)$ , exprimé en dB et représenté dans le tableau I, a été effectué pour différentes valeurs du nombre de points  $A$  (128, 256, 512), de la largeur de loupe  $B$  (8, 16, 32) et de l'origine de la loupe  $S$  ( $S1 = 2$ ,  $S2 = A/4$ ,  $S3 = A/2 - B$ ).

On constate que l'erreur maximum varie peu quelle que soit l'origine  $S$  et la largeur de loupe  $B$ .

TABEAU I

B \ A		8			16			32		
		S1	S2	S3	S1	S2	S3	S1	S2	S3
128		-16,2	-16,1	-16,2	-16,5	-16,4	-16,5	-17,8	-17,7	-17,7
256		-16,1	-16,0	-16,1	-16,4	-16,4	-16,4	-16,5	-16,4	-16,4
512		-16,1	-16,0	-16,0	-16,4	-16,3	-16,3	-16,4	-16,4	-16,4

Taux d'ondulation dans la bande passante ( $d_2$ ), exprimé en dB et calculé à partir de  $E(v)$ , en fonction de la largeur de loupe  $B$ , de l'origine de la loupe  $S$  et du nombre de points  $A$ .

## 6. Applications

Mise en œuvre sur l'ordinateur IN 1 200 d'IN 2, la loupe LFF permet le dépouillement de données physiques en temps réel. La principale limitation au fonctionnement de l'algorithme, est due au temps de calcul de la FFT (20 ms pour 1 024 points). A chaque acquisition d'un bloc de A points, un spectre  $Y(v)$  est restitué. Nous avons représenté sur la figure 16 l'évolution temps-fréquence d'un signal de parole. Acquis à une fréquence de 16 kHz sur des blocs de 256 points, la loupe porte sur les fréquences comprises entre 0 et 1 kHz ( $B = 16$ ,  $S = 0$ ). La résolution, augmentée d'un facteur 8, passe de 62,5 Hz à 7,8 Hz. Cette étude a permis de mettre en évidence une fréquence fondamentale à 101,5 Hz dans la première partie du mot et une composante à 390 Hz dans la deuxième partie du mot.

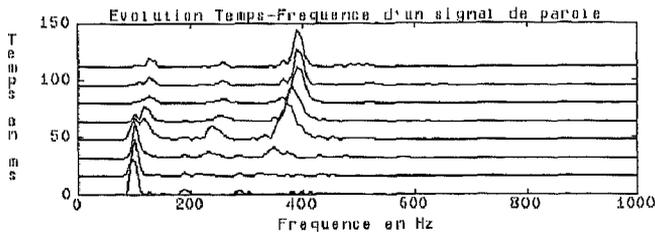


Fig. 16. — Evolution temps-fréquence d'un signal de parole. Spectre calculé toutes les 16 ms et défini sur 256 points avec une résolution de 7,8 Hz.

En conclusion, la loupe par filtrage fréquentiel fournit un moyen simple et efficace d'affiner la résolution spectrale. La possibilité d'effectuer un traitement en temps réel est un atout important par

rapport au zoom proposés par Shaw ou Thrane et, contrairement à la méthode dite d'intégration cohérente, la loupe LFF peut dilater une bande de fréquence quelconque du signal. Enfin, la loupe LFF sera particulièrement utile dans les expériences nécessitant une connaissance précise de la phase car, contrairement au zoom à démodulation complexe, elle n'introduit aucun déphasage et, en conséquence, n'impose pas de correction de phase après traitement.

Manuscrit reçu le 19 juin 1989.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] SHAW E. : « Presentation of Zoom transform technique », *Conf. On Computers Service*, Canada 1970.
- [2] GILCHRIST A. W. R. : « The Zoom transform », *Commun. Res. Center* 631, Ottawa Canada 1971.
- [3] YIP P. C. : « Some aspects of Zoom transform », *IEEE Trans. On Computers*, vol. 25, pp. 287-296, mars 1976.
- [4] THRANE N. : « Zoom FFT » *Bruël & Kjaer Tech. Review* n° 2, pp. 3-41, 1980.
- [5] FARLEY D. T. : « Coherent integration », *Handbook for MAP*, vol. 9, 1983, University of Illinois.
- [6] PELED J., LIU B. : « Digital Signal Processing », *Wiley*, p. 86.
- [7] LIU B., MINTZER F. : « Calculation of a narrow-band spectra by direct decimation », *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-26, n° 6, pp. 529-534, December 1978.
- [8] ZARADER J. L. : « Conception et réalisation d'une loupe par filtrage fréquentiel et d'un transformateur de Fourier rapide », *Thèse de Doctorat de l'Université P. M. Curie*, Paris, décembre 1988.