

## Analyse des systèmes linéaires basée sur la transformée de Laplace à variable réelle et positive

### *Random time series analysis for linear systems based on the Laplace transform using a real and positive variable*



Louis Marcel MUSÉ

4801 Montgomery Drive, Santa Rosa,  
California 95409 U.S.A.

Docteur ès Sciences (1969), géophysicien, Président de General Electro-Magnetic Prospecting, Inc. (Californie) jusqu'en 1989. Géophysicien Consultant depuis 1990. Domaines de recherche : Géophysique ; étude et réalisation d'équipements portables permettant enregistrement et traitement complet des signaux magnéto-telluriques directement sur le terrain ; traitement du signal : utilisation de la transformée de Laplace dans l'analyse des systèmes linéaires.

#### RÉSUMÉ

Une méthode d'analyse utilisant une transformée de Laplace particulière a été développée pour les systèmes linéaires continus ou discrets soumis à une excitation aléatoire ou non périodique, de nature causale ou non causale.

Cette transformée de Laplace est particulière en ce sens que sa variable «  $s$  » est définie comme réelle et positive. Afin d'éviter toute ambiguïté, cette variable est appelée «  $\sigma$  ». En pratique, dans le « domaine de  $\sigma$  »,  $\sigma$  est utilisé d'une manière analogue à celle dont est utilisée la fréquence  $f$  dans le domaine des fréquences.

Cette méthode convient soit aux systèmes et phénomènes continus régis par des équations différentielles ou aux dérivées partielles à coefficients constants, soit aux systèmes et phénomènes discrets régis par des équations aux différences à coefficients constants.

Cet article fournit les éléments pour traiter un cas très fréquent en pratique. C'est celui d'un système linéaire continu ne comportant qu'une entrée et qu'une sortie, et régi par une équation différentielle de forme générale connue, mais dont les coefficients constants sont indéterminés. Les signaux représentant l'excitation et la réponse sont toutefois numérisés en vue d'un traitement de données.

La comparaison de la fonction de transfert expérimentale discrète  $G^*(\sigma)$  avec la fonction de transfert théorique continue  $G(\sigma)$ , donne la possibilité de déterminer les valeurs spécifiques des coefficients constants, sans une seule incursion dans le domaine des fréquences.

Pour que cette détermination devienne réalisable, deux tâches essentielles, dont la définition constitue l'objectif principal de cet article, doivent être accomplies :

1) À partir de l'équation représentant le système,  $G(\sigma)$  théorique est calculé sans nécessiter de déphasage entre les fonctions représentant l'excitation et la réponse du système. Cela rend ce calcul bien plus simple et plus rapide que le calcul correspondant dans le domaine des fréquences.

2)  $G^*(\sigma)$  est calculé à partir de signaux discrets qui doivent satisfaire certaines conditions initiales. Pour ce faire, un algorithme est défini, qui peut être aisément généralisé si le système est plus compliqué. Cet algorithme, en combinant linéairement des tranches de séries temporelles originelles, construit des paires de signaux synthétiques qui, tout en satisfaisant les conditions initiales, ont l'avantage de ne comprendre qu'un nombre fini d'échantillons. Le rapport des transformées de Laplace des signaux synthétiques appartenant à la même paire donne  $G^*(\sigma)$ . Ces transformées offrent l'avantage de ne pas être affectées par l'effet de troncation lié à l'utilisation de la transformée de Fourier et peuvent, sans inconvénient, être appliquées à des signaux courts.

3) Deux appendices complètent cet exposé. Dans le premier appendice est abordée la question de la correspondance entre le spectre de fréquence de ces signaux synthétiques et leur transformée de Laplace dans le domaine de  $\sigma$ . Le deuxième appendice, en partant de la relation existant entre transformée de Laplace discrète et transformée de Laplace continue, est consacré à examiner dans quelles conditions  $G^*(\sigma)$  tend vers  $G(\sigma)$ .

#### MOTS-CLÉS

Systèmes linéaires, fonction de transfert, transformée de Laplace, combinaisons linéaires, domaine de  $\sigma$ .

#### SUMMARY

An analysis method using a particular Laplace transform has been developed for continuous-time and discrete-time linear systems energized

by random or non periodic signals which can be either causal or non causal. This Laplace transform is particular in the sense that its variable

«  $s$  » is defined as real and positive. To prevent any possible ambiguity, this variable is denoted «  $\sigma$  ». In the « sigma domain »,  $\sigma$  is used as the counterpart of the frequency  $f$  in frequency domain.

This method is suitable for :

- 1) the continuous-time systems or phenomena governed by linear partial or ordinary differential equations with constant coefficients,
- 2) the discrete-time systems or phenomena governed by difference equations with constant coefficients.

This article provides the material for handling the very common case of a one input-one output continuous-time linear system, when the general shape of the differential equation governing this system is known, while the specific values of the constant coefficients are undetermined. The input and output signals are sampled to allow subsequent data processing.

By comparing the experimental discrete transfer function  $G^*(\sigma)$  to the theoretical continuous  $G(\sigma)$ , it becomes possible to determine the specific values of the constant coefficients, without any incursion into the frequency domain.

The most important part of this process is developed in this article and consists of the following steps :

- 1)  $G(\sigma)$  is calculated from the equation ruling the system. Since that does not require any phase shift between input and output time functions, this

approach is much simpler and faster than its classical frequency domain counterpart.

2)  $G^*(\sigma)$  is calculated from discrete signals that must satisfy certain initial conditions. For this purpose, a specific algorithm is designed to fit any linear system no matter how complicated. This algorithm performs appropriate linear combinations of time series slices coming from the original sampled signals. This results in pairs of synthetic time series that not only satisfy the initial conditions but are also perfectly suitable for machine computation since they involve only a finite number of samples. The ratio of the Laplace transforms of the synthetic signals pertaining to the same pair yields  $G^*(\sigma)$ . These transforms ignore the truncation effect affecting the Fourier transform and can be applied to short signals without any inconvenience.

3) Two appendixes conclude this article. The first one briefly covers the question of the relationship between synthetic signals' spectra and Laplace transforms of these signals in sigma domain. Throughout the second appendix the relationship between continuous and discrete Laplace transforms is used to examine how  $G^*(\sigma)$  approaches  $G(\sigma)$  with respect to  $\sigma$ .

### KEY WORDS

Linear systems, transfer function, Laplace transform, linear combinations, sigma domain.

## 1. Introduction

La méthode d'analyse qui est présentée ici est essentiellement destinée à identifier les systèmes linéaires fonctionnant dans le domaine temporel et présentant les propriétés suivantes :

- a) dans le cas où ces systèmes sont continus, ils sont représentés par une ou plusieurs équations différentielles ou aux dérivées partielles à coefficients constants ;
- b) dans le cas où ces systèmes sont discrets, ils sont représentés par une ou plusieurs équations aux différences à coefficients constants ;
- c) les signaux temporels qui excitent ces systèmes sont aléatoires ou tout au moins non périodiques, et peuvent être de nature causale ou non causale.

L'identification d'un système linéaire ainsi défini va habituellement consister à déterminer, dans le domaine des fréquences, le ou les paramètres qui le caractérisent et qui sont exprimés comme des invariants par rapport à la variable « temps ».

Plus précisément, l'opération d'identification s'opère à deux niveaux :

- a) calcul du ou des invariants expérimentaux obtenus en appliquant la transformée de Fourier aux divers signaux collectés à l'entrée et à la sortie du système linéaire ;
- b) calcul du ou des invariants théoriques correspondants obtenus en utilisant, des fonctions harmoniques dans les équations générales qui régissent le système (et qui sont supposées connues).

L'identification peut alors être finalement achevée grâce à un processus d'optimisation qui va faire converger le mieux possible le ou les invariants théoriques vers le ou les invariants expérimentaux correspondants.

Bien que la définition des systèmes linéaires, telle qu'elle a été exprimée au début de cette introduction, soit relativement restrictive, elle englobe néanmoins la plupart des équipements utilisés pour enregistrer les phénomènes physiques ainsi qu'une notable partie de ces phénomènes physiques tels que, par exemple, la propagation des ondes électromagnétiques et la propagation des ondes élastiques.

Par conséquent, afin de garder le présent article dans des limites raisonnables, un cas simple et fondamental, mais facilement généralisable, va être traité afin d'exposer la méthode d'analyse annoncée. Ce cas est celui des systèmes linéaires continus, pourvus seulement d'une entrée et d'une sortie, et régis par une équation différentielle à coefficients constants. Cette situation est symbolisée par le schéma ci-dessous ou « S.L. » désigne le système linéaire,  $x(t)$  l'excitation, et  $y(t)$  la réponse du système :

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{S.L.}} \rightarrow y(t).$$

D'une façon générale, les fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  sont reliées par une équation différentielle du type suivant :

$$(1) \quad b_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) + b_{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} y(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} y(t) + b_0 y(t) = a_\ell \frac{d^\ell}{dt^\ell} x(t) + a_{\ell-1} \frac{d^{\ell-1}}{dt^{\ell-1}} x(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} x(t) + a_0 x(t).$$

Par définition, les coefficients  $a_\ell, \dots, a_0$  et  $b_k, \dots, b_0$  sont des constantes. En pratique,  $k$  est en général plus grand que  $\ell$ .

## 1.1. FONCTIONS DE TRANSFERT CONTINUES ET TRANSFORMÉE DE LAPLACE

La transformée de Laplace unilatérale est seule prise en considération :

$$(2) \quad \mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt .$$

La variable  $s$  est complexe et s'écrit

$$(3) \quad s = \sigma + j\omega .$$

La transformée de Laplace appliquée aux deux termes de l'équation (1) fournit, par rapport à la variable  $s$ , l'équation algébrique suivante :

$$(4) \quad Y(s)[b_k s^k + b_{k-1} s^{k-1} + \dots + b_1 s + b_0] = X(s)[a_\ell s^\ell + a_{\ell-1} s^{\ell-1} + \dots + a_1 s + a_0] - \kappa_x + \kappa_y ,$$

avec

$$\begin{aligned} \kappa_x = x(t=0)[a_\ell s^{\ell-1} + a_{\ell-1} s^{\ell-2} + \dots + a_1] \\ + \frac{d}{dt} x(t=0)[a_\ell s^{\ell-2} + a_{\ell-1} s^{\ell-3} + \dots + a_2] \\ + \dots \\ + \frac{d^{\ell-1}}{dt^{\ell-1}} x(t=0)[a_\ell] , \end{aligned}$$

et avec

$$\begin{aligned} \kappa_y = y(t=0)[b_\ell s^{k-1} + b_{\ell-1} s^{k-2} + \dots + b_1] \\ + \frac{d}{dt} y(t=0)[b_k s^{k-2} + b_{k-1} s^{k-3} + \dots + b_2] \\ + \dots \\ + \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} y(t=0)[a_k] . \end{aligned}$$

Si S.L. est initialement au repos, c'est-à-dire si l'excitation  $x(t)$  est non seulement causale mais rigoureusement nulle au moins pendant un intervalle de temps infiniment court à partir de l'origine, alors pour  $t \leq 0$ ,

$$x(t) = y(t) = 0 ,$$

les dérivées de  $x(t)$  d'ordre 1 à  $\ell - 1$  sont égales à 0, et les dérivées de  $y(t)$  d'ordre 1 à  $k - 1$  sont égales à 0.

Cette situation s'exprime, d'une façon plus concise, par  $\kappa_x = \kappa_y = 0$ , ou bien en disant que les conditions initiales  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$  sont satisfaites.

Dans ce cas, la relation entre excitation et réponse devient :

$$(5) \quad Y(s) = G(s) X(s)$$

$$(6) \quad \text{avec} \quad \frac{[a_\ell s^\ell + a_{\ell-1} s^{\ell-1} + \dots + a_1 s + a_0]}{[b_k s^k + b_{k-1} s^{k-1} + \dots + b_1 s + b_0]} = G(s) ,$$

où  $G(s)$  est la fonction de transfert continue de S.L.

Au cours de cet article, les expressions correspondant aux équations (5) et (6) et qui sont obtenues en appliquant la transformée de Fourier à l'équation (1) seront fréquemment mentionnées. Il est bien connu que leur structure est identique à celle des équations (5) et (6) et que le passage des unes aux autres s'opère par simple substitution de  $s$  par  $j\omega$ . Toutefois, une différence fondamentale subsiste, à savoir que les conditions initiales  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$  n'apparaissent pas lorsque la transformée de Fourier est utilisée.

Toute méthode d'analyse basée sur des relations du type (5) et (6) va donc rencontrer dès le départ la difficulté supplémentaire d'avoir à satisfaire  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$ , et, en conséquence, une large part de cet article est précisément consacrée à résoudre cette difficulté.

Il convient enfin de remarquer que la transformée de Laplace constitue la base d'une méthode opérationnelle classique pour résoudre les équations différentielles linéaires telles que, par exemple, celles définies en (1), mais que cette transformée et les équations (5) et (6) ne sont généralement pas utilisées pour identifier S.L., car la variable complexe  $s$  rend le maniement de  $G(s)$  peu pratique pour cette application.

## 1.2. UNE VARIANTE DANS LA DÉFINITION CLASSIQUE DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

Le concept de base sur lequel repose la méthode d'analyse présentée dans cet article est une transformée de Laplace dont la définition présente une sérieuse restriction vis-à-vis de la définition générale telle qu'elle est exprimée dans les équations (2) et (3).

Plus précisément, cette restriction réside dans le fait que la variable  $s$  est uniquement considérée comme réelle et positive, ce qui s'écrit :

$$(7) \quad s = \sigma \quad \text{avec} \quad \sigma > 0 .$$

Deux avantages majeurs résultent de cette définition.

En premier lieu, la fonction de transfert continu  $G(s)$  est obtenue directement, en remplaçant tout simplement  $s$  par  $\sigma$  dans l'expression de  $G(s)$  (équation (6)). Cette propriété découle du fait que l'expression de la transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre  $n$  demeure inchangée, quelle que soit la nature de la variable  $s$ , complexe, ou bien réelle et positive.

Deuxièmement, la définition (7) engendre une conséquence pratique importante :  $G(\sigma)$  est exprimé par rapport à une variable  $\sigma$  qui, étant réelle, peut alors être utilisée dans le domaine de sigma comme un équivalent de la fréquence  $f$  dans le domaine des fréquences (par exemple, voir la figure 6 où une fonction de transfert est représentée graphiquement en fonction de  $\sigma$ ).  $\sigma$  est homogène à l'inverse d'un temps, et l'unité physique correspondante est  $s^{-1}$  (1/seconde).

Cette définition de la variable  $s$  comme réelle et positive élimine pratiquement la possibilité d'utiliser la transformée de Laplace inverse. Néanmoins, ainsi qu'il va être montré dans cet article, un grand secteur d'application est ouvert à cette transformée telle qu'elle vient d'être définie.

## 2. Propriétés de la fonction de transfert dans le domaine de sigma

### 2.1. DÉFINITIONS ET HYPOTHÈSES DIVERSES

$x(t)$  et  $y(t)$  sont des signaux continus, aléatoires ou non périodiques, de nature causale ou non causale, et dont le spectre correspond à une bande de fréquence limitée. La relation existant entre ces signaux est une équation différentielle du même type que l'équation (1).

Ces deux signaux sont échantillonnés numériquement en vue d'un traitement de données ultérieur. Les deux échantillonneurs sont supposés travailler d'une façon uniforme et sont synchronisés. En conséquence, chaque série temporelle peut être considérée comme un train d'impulsions régulièrement espacées. Il est admis que la durée de ces impulsions est négligeable par rapport à la période d'échantillonnage, et que leur amplitude est égale à la fonction continue à chaque instant d'échantillonnage. En conclusion, ces signaux peuvent être considérés comme des fonctions discrètes.

Cette situation est illustrée par la figure 1 où les deux séries temporelles discrètes sont désignées par  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$  respectivement.

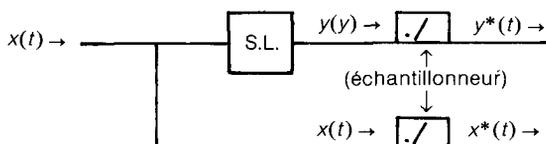


Figure 1. — Système linéaire continu avec deux échantillonneurs synchronisés.

La fréquence d'échantillonnage est  $f_0 = 1/T_0$ , avec  $\omega_0 = 2\pi f_0$ .  $X(j\omega)$ , le spectre de Fourier de  $x(t)$ , est défini par  $X(j\omega) = 0$  pour  $|\omega| > \omega_h$ , avec  $f_n = \omega_h/2\pi$  qui constitue la plus haute fréquence représentée dans le spectre de  $X(j\omega)$ . Afin d'éviter tout aliasage,  $\omega_0$  a une valeur plus grande que  $2\omega_h$ . Bien entendu, des caractéristiques semblables affectent le spectre de Fourier de  $y(t)$ .

L'origine du temps étant définie par l'échantillon d'indice zéro, les séries temporelles discrètes peuvent être exprimées par :

$$(8) \quad x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0) \delta(t - nT_0),$$

$$\text{et} \quad y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_0) \delta(t - nT_0).$$

$\delta(t - nT_0)$  est la fonction représentant un train d'impulsions-unités qui apparaissent à  $t = nT_0$ , où  $n$  désigne n'importe quel nombre entier tel que  $0 \leq n < \infty$ .

Enfin, il est également supposé que l'équation générale (1) qui régit le système linéaire S.L. est connue.

### 2.2. DOMAINE D'APPLICATION

Ainsi qu'il a été annoncé, la fonction de transfert  $G(\sigma)$  qui vient d'être introduite est destinée à jouer un rôle complètement différent du rôle classique de  $G(s)$ . En fait, ce nouveau rôle de  $G(\sigma)$  sera celui qui est généralement assumé par  $G(j\omega)$  dans les circonstances suivantes :

La fonction de transfert continue théorique  $G(j\omega)$  est calculée à partir de l'équation (1) et est comparée à la fonction de transfert discrète expérimentale  $G^*(j\omega)$  obtenue à partir de  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$ . Ensuite, grâce à des itérations successives, il est possible de faire converger  $G(j\omega)$  et  $G^*(j\omega)$  l'une vers l'autre, jusqu'à ce que la concordance devienne optimale.  $G(j\omega)$  apparaît alors comme un invariant absolument spécifique de S.L., et constitue, en quelque sorte, la « carte d'identité » de S.L. Cette « identification de S.L. » revient finalement à déterminer les valeurs numériques des constantes  $a_1, \dots, a_0$  et  $b_1, \dots, b_0$  qui sont celles du modèle théorique qui correspond le mieux aux valeurs expérimentales.

Le propos de cet article est de montrer que « l'identification de S.L. », telle qu'elle vient d'être définie, peut également être pratiquée d'une façon très profitable lorsqu'elle est basée sur la comparaison de la fonction de transfert théorique  $G(\sigma)$  avec la fonction de transfert discrète expérimentale  $G^*(\sigma)$  obtenue à partir de  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$ . La définition de la méthode d'optimisation évoquée plus haut, et qui peut être différente selon la nature de S.L., n'est pas traitée dans cet article. En revanche, d'une part, la manière de calculer, à partir de l'équation (1), un modèle direct dans le domaine de sigma, et, d'autre part, la méthode permettant de calculer  $G^*(\sigma)$  à partir de séries temporelles qui peuvent être causales ou non, vont être exposées en détail dans ce chapitre et dans le chapitre 3. Le lecteur disposera ainsi des outils de base nécessaires pour achever ensuite, dans le domaine de  $\sigma$ , le processus d'identification décrit plus haut, grâce à la méthode d'optimisation de son choix.

### 2.3. UN AVANTAGE MAJEUR : LA MÉTHODE DE CALCUL DES MODÈLES

En fait, la méthode d'identification dans le domaine de sigma constitue beaucoup plus qu'une approche plus ou moins équivalente de la méthode classique qui vient d'être esquissée. En effet, le domaine de sigma offre d'emblée une simplification importante dans le calcul des modèles théoriques. Cette simplification découle directement de l'expression même de la fonction de transfert théorique  $G(\sigma)$  (équation (6) où la variable  $s$  est tout simplement remplacée par  $\sigma$ ).

Pour mettre en évidence la nature de la simplification en question, les deux assertions suivantes qui seront vérifiées dans le chapitre 3 doivent être momentanément admises :

- a) un algorithme approprié existe qui calcule des séries temporelles synthétiques à partir des séries temporelles originales qui peuvent être causales ou non, et ces séries temporelles synthétiques satisfont les conditions initiales  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$  mises en évidence dans l'équation (4) ;
- b) le rapport des transformées de Laplace de ces séries temporelles synthétiques donne directement  $G^*(\sigma)$ .

Le calcul d'un modèle théorique  $G(\sigma)$  est alors, par définition, directement comparable à  $G^*(\sigma)$  et est défini par le simple rapport :

$$G(\sigma) = \frac{\sum_{n=0}^{\ell} a_n \sigma^n}{\sum_{m=0}^k b_m \sigma^m}.$$

Dans le domaine des fréquences, les valeurs expérimentales obtenues sont les amplitudes  $X^*(\omega)$  et  $Y^*(\omega)$ , ainsi que le décalage de phase correspondant  $\Phi^*(\omega)$ . La fonction de transfert d'amplitude est alors définie par  $G^*(\omega) = Y^*(\omega)/X^*(\omega)$ .

Les expressions théoriques correspondantes  $G(\omega)$  et  $\Phi(\omega)$  s'écrivent :

$$G(\omega) = \left| \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \right|^{1/2}$$

et 
$$\Phi(\omega) = \text{Arc tg } \frac{B}{A} - \text{Arc tg } \frac{D}{C}.$$

Par exemple, lorsque les indices  $\ell$  et  $k$  sont impairs, les termes A, B, C et D sont définis par :

$$A = \sum_{n=0}^{(\ell-1)/2} (-1)^n a_{2n} \omega^{2n},$$

$$B = - \sum_{n=0}^{(\ell-1)/2} (-1)^{n+1} a_{2n+1} \omega^{2n+1},$$

$$C = \sum_{m=0}^{(k-1)/2} (-1)^m b_{2m} \omega^{2m},$$

$$D = - \sum_{m=0}^{(k-1)/2} (-1)^{m+1} b_{2m+1} \omega^{2m+1}.$$

Il est donc évidemment plus simple de calculer des modèles théoriques dans le domaine de  $\sigma$  que dans le domaine des fréquences.

Par ailleurs, comme toute identification de système linéaire va nécessiter de calculer et d'essayer un nombre considérable de modèles théoriques directs avant d'arriver au modèle optimal (et ce, quelle que soit la méthode d'optimisation utilisée), il est clair que cette simplification du calcul des modèles théoriques directs inhérente au domaine de  $\sigma$  se traduira en fin de compte par une économie de temps de calcul appréciable. Cette économie est de l'ordre de 50 % du temps de calcul.

D'un point de vue plus général, en multipliant par  $e^{\sigma t}$  les deux termes de l'équation (6) exprimée par rapport à la variable  $\sigma$ , on obtient :

$$\begin{aligned} Y(\sigma) e^{\sigma t} [b_k \sigma^k + b_{k-1} \sigma^{k-1} + \dots + b_1 \sigma + b_0] &= \\ = X(\sigma) e^{\sigma t} [a_\ell \sigma^\ell + a_{\ell-1} \sigma^{\ell+1} + \dots + a_1 \sigma + a_0]. \end{aligned}$$

Cette équation n'est rien d'autre que l'équation (1), où  $x(t)$  et  $y(t)$  ont été remplacés par  $X(\sigma) e^{\sigma t}$  et  $Y(\sigma) e^{\sigma t}$  respectivement, puisque lorsque les conditions initiales sont satisfaites :

$$\frac{d^n}{dt^n} X(\sigma) e^{\sigma t} = \sigma^n X(\sigma) e^{\sigma t} \quad \text{avec } 1 \leq b \leq k$$

et

$$\frac{d^n}{dt^n} Y(\sigma) e^{\sigma t} = \sigma^n Y(\sigma) e^{\sigma t} \quad \text{avec } 1 \leq n \leq \ell.$$

$X(\sigma)$  et  $Y(\sigma)$  sont alors des constantes par rapport à la variable  $t$ .

Par conséquent, la fonction de transfert théorique  $G(\sigma)$  peut être directement obtenue à partir de l'équation (1) en utilisant des fonctions du type  $X(\sigma) e^{\sigma t}$  et  $Y(\sigma) e^{\sigma t}$  pour respectivement symboliser les séries temporelles  $x(t)$  et  $y(t)$ . Cette formulation met en évidence d'une façon plus formelle l'absence de décalage de phase qui caractérise les fonctions temporelles dans le domaine de  $\sigma$ .

Il convient de rappeler que définir  $Y(\sigma) e^{\sigma t}$  comme une solution de l'équation (1) n'est autre que l'approche originellement présentée par Cagniard (1939) [2, 3] en vue de résoudre les équations aux dérivées partielles qui régissent la propagation des ondes élastiques.

## 2.4. STADES DIVERS DANS LE TRAITEMENT DES SIGNAUX

Afin de pouvoir profiter réellement des avantages offerts par la méthode de calcul de modèles dans le domaine de  $\sigma$ , il convient de savoir également calculer la fonction de transfert continue expérimentale du système linéaire à partir des signaux discrets  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$ , pour pouvoir la comparer à  $G(\sigma)$  théorique.

Le processus qui mène à la fonction de transfert expérimentale continue à partir de  $x^*(t)$  and  $y^*(t)$  est décomposé en deux stades :

Le premier, dont l'importance est capitale, consiste à utiliser une technique destinée à construire des « séries temporelles appropriées » artificiellement produites à partir de  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$ . Ces séries temporelles synthétiques sont appropriées en ce sens qu'elles satisfont les conditions initiales  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$ , et permettent de calculer  $G^*(\sigma)$  en utilisant seulement un nombre fini d'échantillons, alors que, par définition, l'intervalle d'intégration de la transformée de Laplace est compris entre zéro et l'infini. Le produit de ce premier stade est donc la fonction de transfert discrète expérimentale  $G^*(\sigma)$ .

Le second stade, beaucoup plus classique, consiste à examiner dans quelles conditions et pour quelles valeurs de  $\sigma$ ,  $G^*(\sigma)$  expérimental tend vers  $G(\sigma)$  expérimental continu.

Le premier stade est traité dans le chapitre 3.

Le second stade est traité dans l'appendice n° 2.

### 3. Technique pour construire artificiellement des séries temporelles appropriées à partir de $x^*(t)$ et $y^*(t)$

#### 3.1. DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES

Dans le paragraphe 2.1 ont été introduites les diverses définitions concernant les signaux continus et discrets qui sont l'objet de la méthode d'analyse présentée dans cet article.

Par ailleurs, ainsi que l'a montré l'équation (5), la relation existant entre les transformées continues,  $X(\sigma)$  et  $Y(\sigma)$  s'exprime :

$$Y(\sigma) = G(\sigma) X(\sigma),$$

pourvu que les conditions initiales  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$  soient satisfaites. De même, les transformées de Laplace discrètes correspondantes sont reliées par

$$(9) \quad Y^*(\sigma) = G^*(\sigma) X^*(\sigma),$$

pourvu que les mêmes conditions initiales soient satisfaites.  $G^*(\sigma)$ , dans l'équation (9), désigne la fonction de transfert discrète dans le domaine de  $\sigma$ .

Les procédés de calcul définis en 3.2 et 3.3 s'appliquent à des signaux qui ne sont pas causaux naturellement, et dont le temps origine peut être arbitrairement fixé par l'utilisateur. Ces procédés s'appliquent également aux signaux causaux mais qui ne satisfont pas naturellement les conditions initiales  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$ .

#### 3.2. PRÉSENTATION DE L'ALGORITHME DE BASE DESTINÉ A SATISFAIRE LES CONDITIONS INITIALES $\kappa_x$ ET $\kappa_y$

Afin d'alléger les formules de ce chapitre,  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$  seront désignés par  $x^*(t) = x(nT_0)$ , et  $y^*(t) = y(nT_0)$ , (au lieu des expressions rencontrées dans l'équation (8)). Cette simplification est légitime, puisque les propriétés spécifiques des systèmes linéaires discrets ne vont pas être étudiées concurremment à celles des systèmes linéaires continus.

Il est clair que la nécessité de satisfaire les conditions initiales  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$  constitue un problème majeur, et ce, même dans le plus élémentaire des cas où l'équation (1) n'est que du premier ordre. Ces conditions se réduisent alors à  $y^*(t=0) = 0$ . Certes, il peut alors arriver que certains échantillons de  $y^*(t)$  aient une valeur nulle et chacun de ces échantillons peut être choisi comme origine de temps en vue de calculer une transformée de Laplace pour  $y^*(t)$ . Toutefois, une méthode générale d'analyse ne peut pas dépendre d'événements purement aléatoires.

Il est donc absolument nécessaire de mettre au point un algorithme systématique qui va construire, aussi souvent que nécessaire, des séries temporelles artificielles satisfaisant les conditions initiales.

La définition de base de cet algorithme repose sur deux remarques fondamentales concernant les fonctions continues :

Premièrement, l'équation (1) demeure valide quelle que soit l'origine du temps. Plus précisément,  $q$  étant un intervalle de temps arbitraire, si les fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  sont remplacées par  $x(t+q)$  et  $y(t+q)$  respectivement dans l'équation (1), cette équation demeure valide.

Deuxièmement, étant donné la définition fondamentale des systèmes linéaires, l'équation (1) va également demeurer valide si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont remplacés par n'importe quelle paire de combinaisons linéaires telle que :

$$c_x(t) = x(t) + ax(t+q_1) + bx(t+q_2) + cx(t+q_3) + \dots$$

et

$$c_y(t) = y(t) + ay(t+q_1) + by(t+q_2) + cy(t+q_3) + \dots$$

où les constantes  $a, b, c, \dots$  représentent n'importe quel nombre réel, et où  $q_1, q_2, q_3, \dots$  désignent divers intervalles de temps.

Appliquées aux séries temporelles discrètes, ces relations deviennent :

$$c_x^*(t) = x(nT_0) + ax((n+\lambda_1)T_0) + bx((n+\lambda_2)T_0) + cx((n+\lambda_3)T_0) + \dots$$

et

$$c_y^*(t) = y(nT_0) + ay((n+\lambda_1)T_0) + by((n+\lambda_2)T_0) + cy((n+\lambda_3)T_0) + \dots$$

Les constantes  $a, b, c, \dots$  sont des nombres réels, et  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  représentent n'importe quel nombre entier, positif ou négatif.

L'ensemble des cas où seulement les deux premières constantes ( $a$  et  $b$ ) sont différentes de zéro est maintenant considéré. Parmi tous ces cas possibles, il y en a un seul qui est défini par  $a = a_1$  et  $b = b_1$  tels que :

$$x(0T_0) + a_1 x((0+\lambda_1)T_0) + b_1 x((0+\lambda_2)T_0) = 0,$$

et

$$y(0T_0) + a_1 y((0+\lambda_1)T_0) + b_1 y((0+\lambda_2)T_0) = 0.$$

Par conséquent, les fonctions  $x_1^*(t)$  et  $y_1^*(t)$  qui sont définies par :

$$x_1^*(t) = x(nT_0) + a_1 x((n+\lambda_1)T_0) + b_1 x((n+\lambda_2)T_0)$$

et

(10)

$$y_1^*(t) = y(nT_0) + a_1 y((n+\lambda_1)T_0) + b_1 y((n+\lambda_2)T_0)$$

sont égales à zéro pour  $n = 0$  et satisfont ainsi la première et la plus simple des conditions initiales exigées pour  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$ .

Si l'ensemble des conditions initiales est plus compliqué, l'algorithme doit être développé plus avant.

Pour simplifier,  $x_i^*(t)$  et  $y_i^*(t)$  qui constituent une « Paire de Combinaisons linéaires du Premier Ordre » vont être désignées par « CL-1 ».

Si les signaux  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$  sont enregistrés durant un temps assez long, il devient possible de calculer un nombre relativement grand de « CL-1 » en choisissant arbitrairement  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ainsi que les origines de temps  $(t_0)_i$  tout au long de  $x(nT_0)$  et  $y(nT_0)$ . Une paire discrète peut alors s'exprimer :

$$x_1(nT_0)_i \text{ et } y_1(nT_0)_i,$$

où  $i$  indique l'ordre séquentiel selon lequel chaque paire est calculée.

Pour pouvoir développer l'algorithme, on doit supposer que au moins un ensemble de trois CL-1 discrètes ont été au préalable calculées en choisissant trois origines différentes de temps  $(t_0)_1$ ,  $(t_0)_2$  et  $(t_0)_3$  tout au long de  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$ .

Dans chaque paire, les premiers échantillons ( $n = 0$ ) correspondant aux différentes origines de temps sont désignés ainsi :

$$x_1(0 T_0)_1, \quad x_1(0 T_0)_2, \quad x_1(0 T_0)_3,$$

et

$$y_1(0 T_0)_1, \quad y_1(0 T_0)_2, \quad y_1(0 T_0)_3,$$

et sont tous égaux à zéro.

Deux constantes,  $a_2$  et  $b_2$ , peuvent être définies de façon que la relation suivante, affectant les seconds échantillons soit satisfaite :

$$x_1(1 T_0)_1 + a_2 x_1(1 T_0)_2 + b_2 x_1(1 T_0)_3 = 0,$$

et

$$y_1(1 T_0)_1 + a_2 y_1(1 T_0)_2 + b_2 y_1(1 T_0)_3 = 0.$$

Les fonctions discrètes suivantes sont alors construites :

$$x_2(t) = x_1(nT_0)_1 + a_2 x_1(nT_0)_2 + b_2 x_1(nT_0)_3,$$

et

$$(11) \quad y_2(t) = y_1(nT_0)_1 + a_2 y_1(nT_0)_2 + b_2 y_1(nT_0)_3.$$

Ces nouvelles fonctions sont des « Combinaisons Linéaires du Second ordre » désignées par « CL-2 », et qui présentent la caractéristique d'avoir leurs deux premiers échantillons égaux à zéro. Il est alors possible de calculer autant de CL-2 que nécessaire, pour une longueur donnée de  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$ , pourvu qu'un nombre approprié de CL-1 ait été calculé au préalable.

Satisfaire un ensemble donné de conditions initiales reviendra toujours à construire des paires de séries temporelles artificielles ayant leurs  $p$  premiers échantillons égaux à zéro (ce nombre  $p$  étant fonction de l'ordre de l'équation (1)). Par conséquent, la méthode qui vient d'être exposée définit un moyen d'obtenir des combinaisons linéaires d'ordre aussi élevé qu'il est désiré, et qui peuvent donc satisfaire n'importe quelles conditions initiales. Ainsi qu'il va être vu dans la prochaine section, ces séries

temporelles artificielles qui sont appelées *séries temporelles synthétiques*, par opposition aux séries temporelles originales naturelles, ne représentent toutefois pas le stade final de combinaisons linéaires requis pour procéder au calcul de la fonction de transfert.

Il convient de remarquer que la méthode qui vient d'être exposée traite  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$  d'une manière identique. En conséquence, quand les conditions initiales sont satisfaites, les deux séries temporelles synthétiques ainsi créées satisfont en fait l'ensemble des conditions qui est défini pour  $y^*(t)$  par  $\kappa_y$ , et qui correspond aux contraintes les plus dures, puisque l'exposant  $k$  est en pratique plus grand que l'exposant  $\ell$  (équation (1)). Ceci ne crée aucune difficulté particulière puisque  $x^*(t)$  qui, pour  $t = 0$ , a toutes ses dérivées d'ordre 1 à  $k - 1$  égales à zéro, a implicitement ces dérivées d'ordre 1 à  $\ell - 1$  égales à zéro, étant donné que  $k > \ell$ .

### 3.3. CONVERGENCE DES INTÉGRALES

Les signaux aléatoires ou non périodiques qui sont en général enregistrés par les physiciens et les ingénieurs, fluctuent par définition par rapport au temps dans des limites prédéterminées liées à la nature du matériel d'enregistrement. Les combinaisons linéaires produites par l'algorithme décrit plus haut vont donc également fluctuer dans des limites finies. En conséquence, l'exponentielle décroissante spécifique de la transformée de Laplace va fatalement rendre l'intégrale correspondante convergente avec un intervalle d'intégration infini.

Malheureusement, tout procédé de calcul basé sur un intervalle d'intégration infini ne peut pas être utilisé directement par un ordinateur. Un premier remède va consister à déterminer s'il est possible de remplacer l'intervalle d'intégration infini par un intervalle fini, et d'obtenir quand même des valeurs d'intégrales approchées suffisamment précises pour donner des fonctions de transfert valables et qui soient numériquement stables.

Cette approche, pour être efficace, a le défaut d'accroître considérablement le temps de calcul puisqu'il faut pratiquer un test de convergence individuel pour chaque intégrale calculée. En outre, certaines séries temporelles calculées par la méthode des combinaisons linéaires sont très difficiles à manier, parce que, même après un temps d'intégration fort long, les valeurs numériques d'intégrales obtenues sont très petites et fort instables, même pour des faibles variations de l'intervalle d'intégration.

Une deuxième méthode a été développée, qui est beaucoup plus précise et systématique. Elle permet d'obtenir  $G^*(\sigma)$  directement sans offrir l'inconvénient d'avoir à tester individuellement la convergence de chaque intégrale de Laplace.

Pour avoir recours à un minimum de formules, cette méthode va être d'abord introduite pour les signaux continus, et les conclusions ainsi atteintes seront alors transposées directement aux séries temporelles discrètes.

Tout d'abord, on suppose que la paire de signaux continus  $x(t)$  et  $y(t)$  satisfont les conditions initiales  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$  pour  $t = 0$ .

On suppose également que, après un intervalle de temps  $\Delta T_1$ ,  $x(t)$  et  $y(t)$  satisfont à nouveau le même ensemble de conditions, mais pour  $t = \Delta T_1$ .

Les fonctions suivantes sont alors introduites :

$$\begin{aligned} &x(t) U(t) \quad \text{et} \quad x(t) U(t - \Delta T_1), \\ &y(t) U(t) \quad \text{et} \quad y(t) U(t - \Delta T_1). \end{aligned}$$

$U(t)$  et  $U(t - \Delta T_1)$  sont les échelons-unités qui sont ainsi définis :

$$(12) \quad U(t) \begin{cases} = 0 & \text{pour } t < 0 \\ = 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}, \quad U(t - \Delta T_1) \begin{cases} = 0 & \text{pour } t < \Delta T_1 \\ = 1 & \text{pour } t > \Delta T_1 \end{cases}.$$

Par définition :

$$X(\sigma)_0 = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} x(t) U(t) dt$$

et

$$Y(\sigma)_0 = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} y(t) U(t) dt.$$

L'équation (5) devient :

$$(13) \quad Y(\sigma)_0 = G(\sigma) X(\sigma)_0.$$

Par ailleurs :

$$X(\sigma)_1 = \int_{\Delta T_1}^{\infty} e^{-\sigma(t - \Delta T_1)} x(t) U(t - \Delta T_1) dt$$

et

$$Y(\sigma)_1 = \int_{\Delta T_1}^{\infty} e^{-\sigma(t - \Delta T_1)} y(t) U(t - \Delta T_1) dt.$$

Étant donné que l'équation (1) demeure valide quelle que soit l'origine du temps, l'équation (5) peut s'écrire à nouveau :

$$(14) \quad Y(\sigma)_1 = G(\sigma) X(\sigma)_1.$$

D'autre part, par définition :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} x(t) U(t) dt &= \int_0^{\Delta T_1} e^{-\sigma t} x(t) U(t) dt + \\ &+ \int_{\Delta T_1}^{\infty} e^{-\sigma t} x(t) U(t - \Delta T_1) dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} y(t) U(t) dt &= \int_0^{\Delta T_1} e^{-\sigma t} y(t) U(t) dt + \\ &+ \int_{\Delta T_1}^{\infty} e^{-\sigma t} y(t) U(t - \Delta T_1) dt. \end{aligned}$$

Par définition :

$$\int_{\Delta T_1}^{\infty} e^{-\sigma t} x(t) U(t - \Delta T_1) dt = e^{-\sigma \Delta T_1} X(\sigma)_1,$$

et

$$\int_{\Delta T_1}^{\infty} e^{-\sigma t} y(t) U(t - \Delta T_1) dt = e^{-\sigma \Delta T_1} Y(\sigma)_1.$$

Finalement :

$$X(\sigma)_0 - e^{-\sigma \Delta T_1} X(\sigma)_1 = \int_0^{\Delta T_1} e^{-\sigma t} x(t) U(t) dt,$$

et

$$(15) \quad Y(\sigma)_0 - e^{-\sigma \Delta T_1} Y(\sigma)_1 = \int_0^{\Delta T_1} e^{-\sigma t} y(t) U(t) dt.$$

D'autre part, puisque

$$G(\sigma) = \frac{Y(\sigma)_0}{X(\sigma)_0} = \frac{Y(\sigma)_1}{X(\sigma)_1} = \frac{e^{-\sigma \Delta T_1} Y(\sigma)_1}{e^{-\sigma \Delta T_1} X(\sigma)_1},$$

il vient

$$(16) \quad G(\sigma) = \frac{Y(\sigma)_0 - e^{-\sigma \Delta T_1} Y(\sigma)_1}{X(\sigma)_0 - e^{-\sigma \Delta T_1} X(\sigma)_1},$$

et

$$(17) \quad G(\sigma) = \frac{\int_0^{\Delta T_1} e^{-\sigma t} y(t) U(t) dt}{\int_0^{\Delta T_1} e^{-\sigma t} x(t) U(t) dt}.$$

En conclusion,  $G(\sigma)$  peut être exprimé comme le rapport de deux intégrales définies.

Il est maintenant nécessaire de voir comment cet important résultat peut être appliqué aux séries temporelles discrètes  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$ . La réponse à cette question n'est autre qu'un recours supplémentaire à la méthode des combinaisons linéaires déjà présentée en 3.2.

En effet, étant donnée l'équation différentielle (1), il a été montré que la manière de satisfaire la condition initiale  $\kappa_y$  consiste toujours finalement à construire une paire de séries temporelles synthétiques dont les  $p$  premiers échantillons sont égaux à zéro (la valeur de  $p$  étant directement dépendante de l'ordre  $k$  de l'équation (1)). Il est clair qu'en utilisant l'algorithme qui crée les combinaisons linéaires, il est possible d'obtenir une paire finale de séries temporelles synthétiques qui non seulement ont leur  $p$  premiers échantillons, mais aussi un second ensemble de  $p$  échantillons égaux à zéro. La position du premier échantillon de ce second ensemble peut être choisie de façon à correspondre à n'importe quel intervalle de temps arbitraire  $\Delta T_1$  défini par  $\Delta T_1 = NT_0$ .

$x_p^*(t)$  et  $y_p^*(t)$  étant les séries temporelles synthétiques finales ainsi construites, et  $X_p^*(\sigma)$ ,  $Y_p^*(\sigma)$ , désignant les

deux transformées de Laplace correspondantes,  $G^*(\sigma) = \frac{Y_p^*(\sigma)}{X_p^*(\sigma)}$  peut s'écrire :

$$(18) \quad G^*(\sigma) = \frac{Y^*(\sigma)_0 - e^{-\sigma NT_0} Y^*(\sigma)_1}{X^*(\sigma)_0 - e^{-\sigma NT_0} X^*(\sigma)_1} = \frac{\sum_{n=0}^N y_p(nT_0) e^{-\sigma nT_0}}{\sum_{n=0}^N x_p(nT_0) e^{-\sigma nT_0}}$$

La justification définitive de cette expression est développée dans l'appendice n° 2, à propos des équations (28) et (30). En conclusion,  $G^*(\sigma)$  peut être exprimé comme le rapport de deux sommes réelles et finies, sans la nécessité d'ajouter un test de convergence et sans l'inconvénient d'avoir affaire à des intégrales qui ne sont autres que des approximations.

Cette approche, qui permet d'utiliser un nombre fini d'échantillons, rend l'analyse des séries temporelles dans le domaine de sigma directement acceptable par un ordinateur. Cela est positif également au point de vue économique, car il est alors possible de travailler sur des intervalles de temps  $\Delta T_1$  relativement courts. A ce propos, il convient de signaler que la méthode de calcul qui vient d'être présentée n'est pas affectée par l'effet de troncature caractéristique de la transformée de Fourier et qui devient d'autant plus gênant que le nombre d'échantillons utilisés est réduit.

Pour une valeur donnée de  $\sigma$  et une longueur donnée des séries temporelles originelles, le mode de choix des  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  (équation (10)) et des origines de temps ( $t_0$ ), affecte directement le nombre de valeurs calculées pour  $G^*(s)$ . Ce nombre doit être assez élevé pour permettre ultérieurement des calculs élémentaires de statistique en vue d'obtenir la valeur numérique finale  $G^*(\sigma)$ , ainsi que les erreurs correspondantes pour chaque  $\sigma$  utilisé.

### 3.4. CAS DES SIGNAUX NATURELLEMENT CAUSAUX

Lorsque les signaux  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$  sont naturellement causaux, et que les conditions initiales ne sont pas naturellement satisfaites, il sera toujours possible d'appliquer à ces signaux les procédés de calcul décrits ci-dessus en 3.2 et 3.3.

Dans le cas particulier des signaux ayant un caractère d'impulsion, et où l'excitation  $x(t)$  reste absolument nulle au moins durant un temps infiniment court, puis croît et fluctue durant un temps relativement bref pour redevenir à nouveau rigoureusement nulle, il n'est bien entendu pas nécessaire de mettre en œuvre les méthodes de calcul exposées en 3.2 et 3.3. En effet,  $G^*(\sigma)$  est alors exprimé par le simple rapport des transformées de Laplace directement appliquées aux signaux. En pratique, il est nécessaire toutefois de choisir une origine des temps suffisamment éloignée du démarrage de l'excitation  $x(t)$ . Cette remarque montre qu'il est particulièrement simple de calibrer du matériel d'instrumentation dans le domaine de  $\sigma$ , en utilisant des signaux courts du genre qui vient d'être décrit, puisque, là encore, les effets de troncature sont totalement ignorés.

## 4. Exemple d'analyse de signaux dans le domaine de sigma

L'exemple présenté dans le présent chapitre correspond à la situation illustrée dans la figure 1, où le système linéaire est défini comme un filtre Butterworth analogique, passe-bas, à deux pôles :  $x(t)$  est une différence de potentiel collectée à la sortie d'un capteur magnétique qui est lui-même excité par les variations aléatoires du champ magnétique naturel dans la bande passante comprise entre 5 Hz et 125 Hz.  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$  sont des séries temporelles discrètes collectées à la sortie des deux échantillonneurs qui sont synchronisés.

Le propos de ce chapitre est de présenter quelques résultats concrets correspondant aux stades successifs qui caractérisent une analyse de séries temporelles et leur interprétation dans le domaine de  $\sigma$ , telles qu'elles ont été définies dans les chapitres 2 et 3. Plus précisément, le système linéaire étant connu à l'avance,  $G(\sigma)$  théorique est directement calculé à partir de l'équation différentielle qui régit le comportement du filtre analogique.  $G^*(\sigma)$  est ensuite calculé à partir de  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$ , et comparé à  $G(\sigma)$  théorique. Finalement, pour illustrer comment la fonction de transfert dans le domaine de  $\sigma$  réagit en présence d'un bruit à large bande, deux exemples sont montrés qui correspondent chacun à une structure spécifique de bruit ajouté à la fonction  $y^*(t)$ .

### 4.1. LE FILTRE ANALOGIQUE

Ainsi qu'il a été déjà montré, une simple substitution de variable donnera à  $G(\sigma)$  à partir de  $G(j\omega)$ . En pratique, cette règle cesse d'être utilisable dès que la fonction de transfert du domaine de fréquence est éclatée en phases et amplitudes exprimées par rapport à la fréquence. Ceci peut être facilement constaté en comparant  $G(\sigma)$  dans l'équation (21) avec l'expression de la fonction de transfert d'amplitude  $G(f)_a$  (équation (20)).

En conséquence, si on veut obtenir la fonction de transfert continue, dans le domaine de sigma, d'un filtre Butterworth passe-bas à deux pôles, il devient nécessaire de remonter à l'équation différentielle linéaire originelle qui relie les fonctions  $y(t)$  et  $x(t)$  l'une à l'autre. Le filtre analogique est constitué des résistances  $R_1$  and  $R_2$ , capacités  $C_1$  et  $C_2$ , et d'un amplificateur dont le gain est  $K$  (fig. 2).

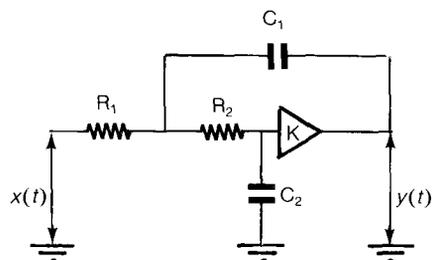


Figure 2. — Schéma d'un filtre Butterworth analogique passe-bas, à deux pôles.

En posant :

$$K = 1, \quad R_1 = R_2 = R, \\ C_2 = C, \quad C_1 = 2C,$$

$x(t)$  et  $y(t)$  (qui sont des différences de potentiel) sont liés par :

$$(19) \quad 2R^2C^2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2RC \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t).$$

Étant donné la fréquence de coupure du filtre :

$$f_c = \frac{1}{\pi 2 \sqrt{2} RC},$$

$G(f)_a$  (la fonction de transfert d'amplitude dans le domaine des fréquences) s'écrit :

$$(20) \quad G(f)_a = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^4\right]^{1/2}}.$$

La fonction de transfert correspondante dans le domaine de sigma s'obtient directement de l'équation (19) :

$$(21) \quad G(\sigma) = \frac{1}{\frac{\sigma^2}{4\pi^2 f_c^2} + \frac{\sigma}{\sqrt{2}\pi f_c} + 1}.$$

Dans tous les exemples suivants, la fréquence de coupure  $f_c$  du filtre est 10 Hz. La fréquence d'échantillonnage  $f_0$  égale 512 Hz, et, d'autre part,  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$  comprennent respectivement 20 000 échantillons.

## 4.2. DÉTERMINATION DES ERREURS DANS LE DOMAINE DE SIGMA

Dans tous les exemples présentés ci-dessous, les « barres d'erreur » correspondent à un intervalle de confiance de 95 %.

Par ailleurs, pour tout résultat présenté ici, des tests préalables ont montré que la distribution des valeurs était normale. En conséquence, les intervalles de confiance, calculés à partir de la moyenne et de l'écart-type des valeurs de  $G^*(\sigma)$ , sont définis par l'équation suivante [1, pp. 113-115] :

$$\bar{x} - \frac{st_{n; \alpha/2}}{\sqrt{N}} \leq \mu_x < \bar{x} + \frac{st_{n; \alpha/2}}{\sqrt{N}}, \quad \text{avec } n = N - 1,$$

où

$\mu_x$  sera la vraie valeur de  $G^*(\sigma)$ ,

$N$  est le nombre de valeurs,

$\bar{x}$  est la valeur moyenne calculée des valeurs,

$s$  est l'écart-type des valeurs,

$t_{n; \alpha/2}$  est la distribution  $t$  de Student.

## 4.3. COMMENTAIRES SUR LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

La figure 3 montre une paire de séries temporelles synthétiques finales,  $x_p^*(t)$  et  $y_p^*(t)$  qui ont chacune 250 échantillons. L'équation (19) définit la condition initiale  $\kappa_y$  par :  $y(t=0) = \frac{d}{dt} y(t=0)$ . Le nombre  $p$  d'échantillons, qui sont égaux à zéro à chaque extrémité de  $x_p^*(t)$  et  $y_p^*(t)$ , égale 2. Les deux séries temporelles oscillent autour de zéro, et grâce à la présence du filtre passe-bas,  $y_p^*(t)$  montre beaucoup moins de hautes fréquences que  $x_p^*(t)$ .

Une paire de séries temporelles synthétiques finales  $x_p^*(t), y_p^*(t)$

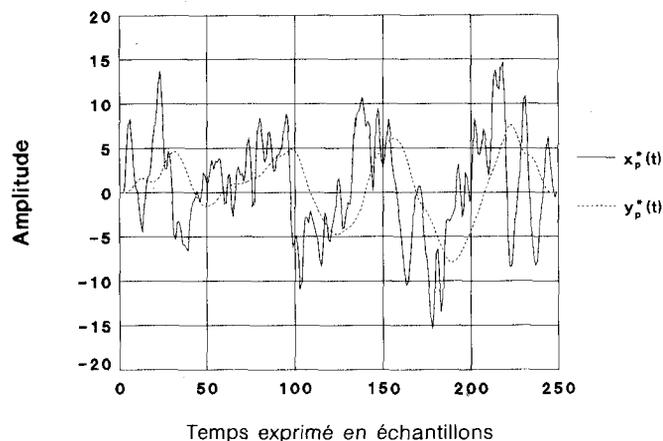


Figure 3. — Présentation d'une paire de séries temporelles synthétiques finales qui satisfont les conditions initiales définies pour le filtre Butterworth.

La figure 4 montre les trois fonctions  $X_p^*(\sigma)$ ,  $Y_p^*(\sigma)$ , et  $G^*(\sigma)$  calculées à partir de la paire précédente présentée dans la figure 3.

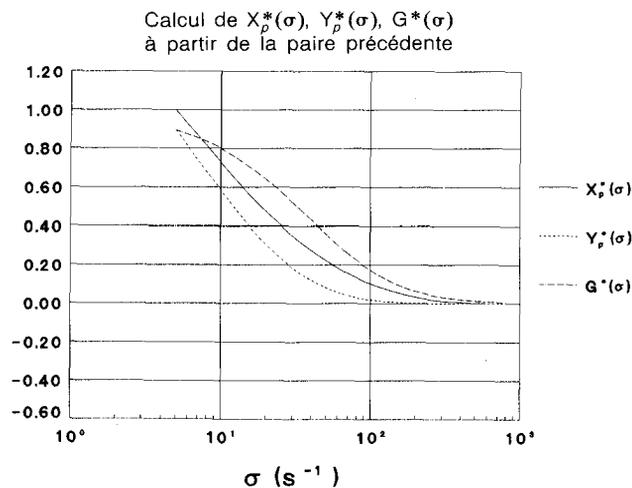


Figure 4. — Représentation de  $X^*(\sigma)$ ,  $Y^*(\sigma)$  et  $G^*(\sigma)$  calculés à partir de la paire précédente (fig. 3).

Dans cette figure, ainsi que dans les suivantes, la variable  $\sigma$  qui est homogène à l'inverse d'un temps est exprimée en  $s^{-1}$ .

La figure 5 montre les mêmes trois fonctions calculées à partir d'une autre paire. Dans ce cas,  $X_p^*(\sigma)$  et  $Y_p^*(\sigma)$  coupent l'axe de  $\sigma$  au même point et leur signe change au passage.

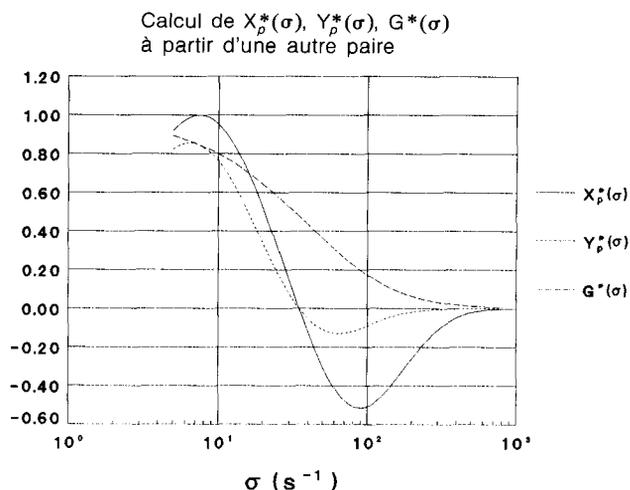


Figure 5. — Représentation de  $X^*(\sigma)$ ,  $Y^*(\sigma)$ , et  $G^*(\sigma)$  calculés à partir d'une autre paire.

La figure 6 montre la fonction de transfert théorique  $G(\sigma)$  calculée à partir de l'équation (21) (courbe continue), ainsi que les valeurs expérimentales  $G^*(\sigma)$  calculées à partir d'un nombre relativement grand (110) de paires de séries temporelles synthétiques finales semblables à celles représentées dans les figures 4 et 5. Il est clair que la correspondance entre  $G(\sigma)$  théorique et  $G^*(\sigma)$  expérimentale est excellente, et que, par conséquent, les valeurs

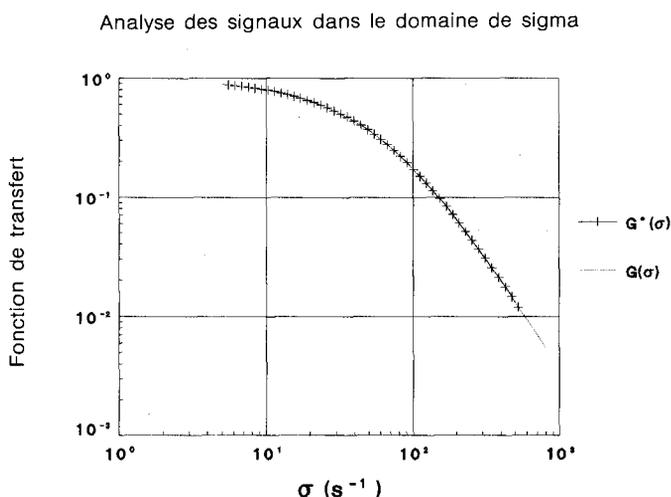


Figure 6. — Comparaison de la fonction de transfert théorique  $G(\sigma)$  (courbe continue) avec les valeurs de la fonction de transfert discrète expérimentale  $G^*(\sigma)$ . Les valeurs expérimentales sont représentées par des croix sans barres d'erreur, car ces dernières sont imperceptibles à l'échelle de la figure.

des coefficients  $\theta_{xi}$  et  $\theta_{yi}$ , pour  $5 \leq \sigma \leq 450$  (voir l'équation (30) dans l'Appendice N° 2) sont donc très proches l'une de l'autre. Il a été impossible de dessiner des barres d'erreur, car elles sont trop petites à l'échelle de cette figure. Il convient d'ajouter un commentaire à propos du grand nombre (110) un peu surprenant de paires de séries temporelles synthétiques calculées. En effet, dans le cas considéré, les calculs effectués à partir d'une seule paire résultent en fait en une courbe superposable à celle de la figure 6 (voir les fonctions de transfert calculées dans les figures 3 et 4). Toutefois, étant donné que les deux exemples suivants (fig. 7 et 8) sont basés sur un nombre de paires égal à 110, la fonction de transfert dans ce cas d'un niveau de bruit égal à zéro a été également calculée à partir du même nombre de paires pour permettre une comparaison entre valeurs issues d'un même traitement.

La figure 7 montre la fonction de transfert expérimentale  $G^*(\sigma)$  sur le même système linéaire excité par le même  $x^*(t)$ , alors que  $y^*(t)$  est remplacé par  $y^*(t)_N$  défini comme suit :

$$y^*(t)_N = y^*(t) + N^*(t).$$

$N^*(t)$  est une fonction aléatoire délibérément ajoutée à  $y^*(t)$  et qui joue le rôle d'un bruit.  $N^*(t)$  est en fait une autre différence de potentiel générée par le même capteur magnétique qui a déjà donné  $y^*(t)$  (mais à un instant différent). La bande passante 5-125 Hz demeure bien entendu la même. Toutefois, la distribution spectrale relative au sein de cette bande est différente de celle de  $y^*(t)$ . La durée de  $N^*(t)$  est la même que celle de  $y^*(t)$ , c'est-à-dire 20 000 échantillons.

Analyse des signaux dans le domaine de sigma  
(Signal/Bruit = 19,617 dB)

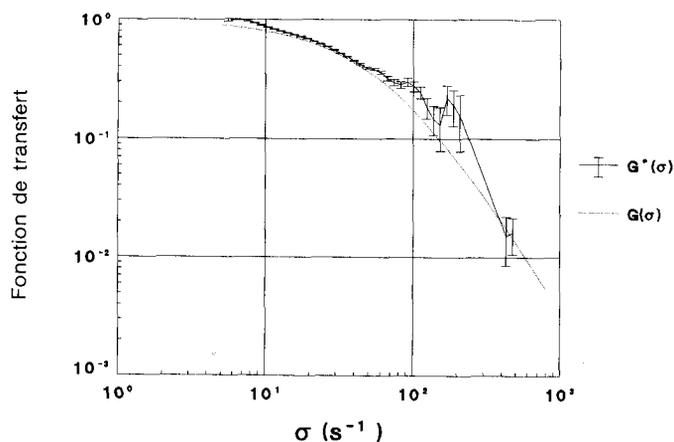


Figure 7. — Comparaison de  $G(\sigma)$  avec  $G^*(\sigma)$  quand un bruit à bande large mais limitée est ajouté à  $y^*(t)$  (le rapport de la valeur quadratique moyenne du signal à la valeur quadratique moyenne du bruit égale 19,617 dB).

Pour caractériser l'amplitude de  $N^*(t)$  par rapport à l'amplitude de  $y^*(t)$ , la valeur quadratique moyenne de chaque série temporelle a été calculée sur les 20 000 échantillons. Ces valeurs sont respectivement :

pour  $y^*(t)$ , valeur quadratique moyenne = 330,64 mV,  
pour  $N^*(t)$ , valeur quadratique moyenne = 34,555 mV.

La figure 7 montre que, malgré un rapport signal/bruit égal en moyenne à 19,617 dB,  $G^*(\sigma)$  est modérément aberrant par rapport à  $G(\sigma)$  théorique, pour  $10 \leq \sigma \leq 60$ .

La figure 8 montre  $G^*(\sigma)$  expérimental quand le même système linéaire est excité par le même  $x^*(t)$ , alors que la valeur quadratique moyenne de  $N^*(t)$  est maintenant égale à 86,402 mV. On observe que pour  $10 \leq \sigma \leq 60$ ,  $G^*(\sigma)$  est encore identifiable en dépit d'un rapport signal/bruit qui n'est plus égal en moyenne qu'à 11,657 dB.

D'une façon générale, les résultats montrés dans les figures 7 et 8 semblent être moins affectés par le bruit que les résultats correspondants obtenus par l'analyse harmonique classique pratiquée sur les mêmes données. Bien qu'une comparaison exacte soit difficile, cette remarque rejoint une observation analogue exprimée dans un article précédent [5]. Le bruit était alors défini comme une séquence d'impulsions à très haute énergie, et dont la forme était celle d'une demi-période de fonction sinusoïdale. La période de cette fonction était extrêmement courte par rapport au spectre moyen de la série temporelle. Ce bruit résultait en une dispersion considérable des valeurs de la fonction de transfert expérimentale calculée dans le domaine des fréquences, alors que la fonction de transfert correspondante, calculée dans le domaine de sigma, se trouvait beaucoup moins affectée.

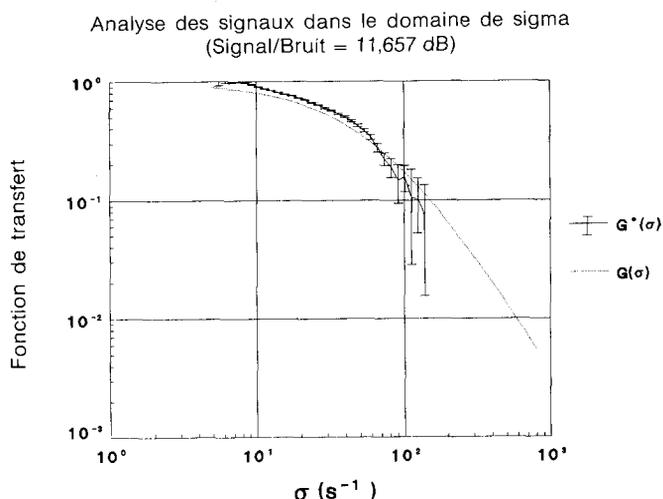


Figure 8. — Comparaison de  $G(\sigma)$  avec  $G^*(\sigma)$  quand un bruit à bande large mais limitée est ajouté à  $y^*(t)$  (le rapport de la valeur quadratique moyenne du signal à la valeur quadratique moyenne du bruit égale 11,657 dB).

## 5. Conclusion

Les fonctions de transfert et, plus généralement, les invariants par rapport au temps, caractérisant n'importe quel système linéaire discret ou continu, régi par des équations à coefficients constants, sont en général calculés dans le domaine de fréquence à partir de séries temporelles enregistrées et traitées selon des méthodes bien connues. Ces invariants expérimentaux sont alors interprétés grâce à des calculs de modèles théoriques utilisant des fonctions harmoniques.

Une méthode complètement différente a été mise au point, qui fournit les mêmes services lorsque les signaux sont aléatoires ou non périodiques, causaux ou non causaux. Cette méthode utilise la transformée de Laplace au lieu de la transformée de Fourier pour traiter les signaux, et permet de calculer fonctions de transfert et invariants qui sont alors exprimés par rapport à la variable de la transformée de Laplace. Cette variable, qui est définie comme réelle et positive, est appelée «  $\sigma$  ».

Étant donné qu'il n'y a pas de décalage de phase dans le domaine de  $\sigma$ , les calculs de modèles théoriques deviennent beaucoup plus simples et rapides que dans le domaine de fréquence (en général, le temps de calcul est divisé par deux pour un ordinateur donné).

Les transformées de Laplace dans le domaine de sigma sont effectuées sur des signaux discrets artificiellement construits, grâce à des combinaisons linéaires de tranches des séries temporelles originelles. Les nouveaux signaux ainsi construits sont causaux et satisfont les conditions initiales propres au système. Les transformées discrètes correspondantes ne sont pas sujettes à l'effet de troncature inhérent à la transformée de Fourier, ce qui permet d'appliquer la méthode à des signaux courts.

Dans le cas où les signaux expérimentaux sont naturellement causaux et ont en outre l'aspect d'impulsions ou tout au moins de signaux très courts, et pourvu que l'excitation reste nulle au moins pendant un temps infiniment bref, l'utilisation de la méthode devient particulièrement simple et, encore une fois, ignore les inconvénients de troncature déjà mentionnés.

Par ailleurs, au cours de nombreux tests, l'analyse des signaux dans le domaine de sigma a empiriquement montré une certaine réduction de la sensibilité de cette méthode à divers bruits, par comparaison avec la méthode classique travaillant dans le domaine des fréquences. Cette relative insensibilité à diverses formes de bruits est suffisamment importante pour faire l'objet de travaux additionnels qui seront présentés dans un futur article.

La méthode peut facilement être étendue au cas de systèmes linéaires ayant plus que deux canaux. Le nombre de canaux étant désigné par  $\zeta$ , l'algorithme de base doit alors travailler avec  $\zeta + 1$  tranches de série temporelles.

Ceci a déjà été vu dans le cas de la méthode Magnétotellurique où l'on doit travailler avec cinq canaux simultanés [5].

De nombreux secteurs d'application sont ouverts, puisque la méthode d'analyse dans le domaine de sigma s'applique à tous les phénomènes physiques ou équipements qui sont régis par des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

## 6. Appendice n° 1 : relation entre spectre de fréquence et transformée de Laplace dans le domaine de sigma

A partir de  $x^*(t)$  et  $y^*(t)$ , la méthode des combinaisons linéaires permet de bâtir les fonctions discrètes  $x_p^*(t)$  et

$y_p^*(t)$  qui satisfont les conditions initiales du système linéaire. La relation qui va être utilisée dans cet appendice concerne les fonctions temporelles continues qui sont désignées par  $x_p(t)$  et  $y_p(t)$  pour montrer qu'elles ont les mêmes propriétés que  $x_p^*(t)$  et  $y_p^*(t)$  (sauf, bien sûr, l'aspect discret). Dans l'appendice suivant, cette relation est appliquée aux fonctions discrètes.

Les spectres de fréquence de  $x(t)$  et  $y(t)$  ont été définis comme des spectres à bande large mais limitée. Il s'ensuit que les spectres de  $x_p(t)$  et  $y_p(t)$  peuvent également être considérés comme des spectres à bande large mais limitée. La plus haute fréquence  $f_h$  et la plus basse fréquence  $f_b$  d'un tel spectre étant connues, le propos de cet appendice est de déterminer quelles vont être les limites correspondantes  $\sigma_h$  et  $\sigma_b$ .

De façon plus précise,  $X_p(j\omega)$  est alors défini par :

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= 0 & \text{pour } \omega > \omega_h = 2\Pi f_h, \\ X_p(j\omega) &= 0 & \text{pour } \omega < \omega_b = 2\Pi f_b, \end{aligned}$$

avec  $X_p(j\omega)$  différent de zéro pour  $\omega_b \leq \omega \leq \omega_h$ .

La question s'énonce alors : Existe-t-il un intervalle correspondant défini par  $\sigma_b \leq \sigma \leq \sigma_h$ , et tel que  $X_p(\sigma) = 0$  pour  $\sigma > \sigma_h$ ,  $X_p(\sigma) = 0$  pour  $\sigma < \sigma_b$ , et avec  $X_p(\sigma)$  différent de zéro pour  $\sigma_b \leq \sigma \leq \sigma_h$  ?

Pour traiter ce sujet, il est commode de disposer d'une relation directe entre  $X_p(\sigma)$  et le spectre de  $x_p(t)$ . Les deux prochains paragraphes sont consacrés à définir et mettre en pratique cette relation.

Dans ce qui suit, tout calcul concernant  $x_p(t)$  s'applique également à  $y_p(t)$ , et en général, n'est pas explicité pour cette dernière fonction.

## 6.1. DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES

La série temporelle  $x_p(t)$  réunit les deux caractéristiques suivantes :

a) elle est réelle et causale, et ne présente pas de singularité pour  $t = 0$  (ceci provenant d'ailleurs de la caractéristique qui suit) ;

b) elle résulte de combinaisons linéaires qui font que les conditions initiales sont satisfaites pour  $t = 0$  et  $t = \Delta T_1$ .

La relation qui vient d'être évoquée et qui doit donner directement  $X_p(\sigma)$  à partir de  $X_p(j\omega)$  concerne uniquement la première caractéristique.

On peut alors écrire ce qui suit.

Selon l'approche connue,  $x_p(t)$  peut être considéré comme la somme d'une fonction paire  $x_p(t)_\pi$  et d'une fonction impaire  $x_p(t)_i$ .

Autrement dit :  $x_p(t) = x_p(t)_\pi + x_p(t)_i$ , avec,

$$(22) \quad \text{pour } t > 0 : x_p(t) = 2 x_p(t)_\pi \text{ et } x_p(t) = 2 x_p(t)_i.$$

Par ailleurs, la transformée de Fourier de  $x_p(t)$  étant :

$$\mathcal{F}\{x_p(t)\} = R_x(\omega) + jI_x(\omega),$$

on a :

$$(23) \quad \mathcal{F}\{x_p(t)_\pi\} = R_x(\omega),$$

et

$$\mathcal{F}\{x_p(t)_i\} = 2 R_x(\omega).$$

## 6.2. RELATION DIRECTE ENTRE $R_x(\omega)$ ET $X_p(\sigma)$

Avec  $s = \sigma$  réel et positif, et  $X_p(\sigma)$  désignant la transformée de Laplace de  $x_p(t)$ , la transformée de Fourier de la fonction  $U(t) e^{-\sigma t} x_p(t)$  est :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) e^{-\sigma t} x_p(t) e^{-j\omega t} dt &= \\ \int_0^{+\infty} U(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} x_p(t) dt &= X_p(\sigma+j\omega). \end{aligned}$$

Étant donné que  $\mathcal{F}\{U(t) e^{-\sigma t}\} = \frac{1}{\sigma+j\omega}$ ,  $X_p(\sigma+j\omega)$  peut être également exprimé par la convolution suivante :

$$X_p(\sigma+j\omega) = \frac{1}{\Pi} R_x(\omega) * \frac{1}{\sigma+j\omega},$$

ou

$$X_p(\sigma+j\omega) = \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_x(\xi)}{\sigma+j(\omega-\xi)} d\xi,$$

et

$$X_p(\sigma) = \frac{\sigma}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_x(\omega)}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega.$$

Par définition,  $R_x(\omega)$  étant une fonction paire par rapport à  $\omega$ , la relation attendue s'écrit donc finalement :

$$(24) \quad X_p(\sigma) = \frac{2\sigma}{\Pi} \int_0^{+\infty} \frac{R_x(\omega)}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega.$$

Dans ce qui suit, chaque fois que cette formule va être utilisée, il conviendra de comparer la valeur calculée  $X_p(\sigma)$  avec l'amplitude du spectre de  $x_p(t)$  qui est égal à  $2 R_x(\omega)$ . Ce spectre étant réel sera désormais désigné par  $X_p(\omega)$ .

Afin d'alléger le texte, la relation (24) va être appliquée à un cas très simplifié, mais présentant un intérêt certain. Ce cas est défini par des spécifications, concernant le spectre de  $x_p(t)$ , qui sont légèrement modifiées par rapport à celles énoncées au début de cet appendice. De façon plus précise, ces nouvelles spécifications sont les suivantes :

$$\omega_h = \alpha, \quad R_x(\omega) = \frac{\Pi}{2} P(\omega),$$

$$\text{avec } P(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \omega \leq \alpha \\ 0 & \text{pour } \omega > \alpha \end{cases} \text{ et } \omega_b = 0,$$

$$\text{avec } X_p(\omega) = 2 R_x(\omega) = \Pi P(\omega).$$

L'expression de  $X_p(\sigma)$ , obtenue à partir de l'équation (24), devient alors :

$$X_p(\sigma) = \frac{2\sigma\Pi}{2\Pi} \int_0^\alpha \frac{d\omega}{\sigma^2 + \omega^2} = \left[ \text{Arc tg} \left( \frac{\omega}{\sigma} \right) \right]_0^\alpha$$

$$= \text{Arc tg} \left( \frac{\alpha}{\sigma} \right).$$

La manière dont  $X_p(\sigma)$  évolue par rapport à  $\sigma$  est exprimée par le tableau suivant :

$\sigma$	0	$\alpha/8$	$\alpha/4$	$\alpha/2$	$\alpha$	$2\alpha$	$4\alpha$	$8\alpha$
$X_p(\sigma)$	1,570	1,446	1,326	1,107	0,785	0,463	0,245	0,124

Commentaires :

Pour  $\sigma > \alpha$ ,  $X_p(\sigma)$  décroît presque linéairement. Pour  $\sigma = \alpha$ ,  $X_p(\sigma)$  ne vaut plus que 25 % de la valeur de  $X_p(\omega)$ . Pour  $\sigma < \alpha$ ,  $X_p(\sigma)$  croît à mesure que  $\sigma$  décroît, mais cette croissance devient très lente pour  $\sigma < \alpha/8$ .  $X_p(\sigma)$  tend vers  $\Pi/2$  quand  $\sigma$  tend vers zéro.

L'ensemble des valeurs utilisables que  $\sigma$  peut prendre est donc limité en pratique, à la fois du côté des grandes valeurs de  $\sigma$ , et du côté des faibles valeurs de  $\sigma$ .

En conclusion, l'amplitude du spectre de  $x_p(t)$  étant prise comme référence, on peut considérer comme raisonnable la définition suivante des valeurs utilisables de  $\sigma$  :

$$\sigma_b \leq \sigma \leq \sigma_h \quad \text{avec} \quad \sigma_b = \alpha/8 \quad \text{et} \quad \sigma_h = \alpha.$$

Ainsi que mentionné plus haut, ces conclusions sont basées sur le seul aspect causal de  $x_p(t)$ . C'est pourquoi il a été admis que la fonction continue, implicitement définie dans le calcul précédent par le simple choix de son spectre, ne satisfasse aucune condition initiale.

Il est toutefois important de considérer la deuxième caractéristique de cette fonction, lorsque la fonction originelle  $x(t)$ , à partir de laquelle on construit  $x_p(t)$ , est une simple fonction harmonique de fréquence  $f = \omega/2\pi$ . Dans ce cas, en effet, l'algorithme défini au chapitre 3 donne une valeur nulle à  $X_p(\sigma)$  dès la première combinaison linéaire.

## 7. Appendice n° 2 : relation entre $G^*(\sigma)$ et $G(\sigma)$

Il a été montré comment calculer  $G(\sigma)$  théorique à partir des équations qui régissent le système (chapitre 2), et comment obtenir  $G^*(\sigma)$  à partir de  $x_p^*(t)$  et  $y_p^*(t)$  (chapitre 3).

Le propos de cet appendice est de déterminer dans quelle mesure la comparaison de  $G^*(\sigma)$  à  $G(\sigma)$  est légitime, ce qui revient à examiner la relation générale qui lie ces deux fonctions.

Le premier pas dans cette voie va s'effectuer à partir de la relation qui lie transformées de Laplace discrètes et continues dans le domaine de  $\sigma$ .

### 7.1. RELATION ENTRE TRANSFORMÉES DE LAPLACE DISCRÈTES ET CONTINUES DANS LE DOMAINE DE SIGMA

La relation entre transformées de Laplace discrètes et continues dans le domaine de  $s$  est un résultat classique, et qui est fréquemment utilisé en pratique. C'est cette relation qui, par exemple, permet de définir le lien existant entre l'entrée et la sortie d'un échantillonneur [4, 6]. Toutefois, pour établir cette relation, il faut utiliser la transformée de Laplace inverse pour la variable complexe  $s$ , et définir un contour d'intégration dans le plan complexe correspondant. Or la méthode présentée dans cet article utilise uniquement la variable réelle  $\sigma$ . Par ailleurs, puisque  $x_p^*(t)$  et  $y_p^*(t)$  satisfont les conditions initiales, on a au moins  $x_p^*(t=0) = y_p^*(t=0) = 0$ , et, de ce fait, la méthode simplifiée suivante permet d'établir directement la relation recherchée dans le cas particulier de la variable  $\sigma$ .

Cette relation, qui est le cas particulier de l'équation de Poisson quand la variable est  $\sigma$ , résulte de deux manières différentes de définir la série temporelle discrète  $x_p^*(t)$  :

a) La première s'écrit :

$$x_p^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_p(nT_0) \delta(t - nT_0),$$

et la transformée de Laplace correspondante est :

$$(25) \quad X_p^*(e^{T_0\sigma}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_p(nT_0) e^{-nT_0\sigma}.$$

On remarque que, dans l'équation (25), l'échantillon de rang  $n = 0$  est pris en compte, mais que cela ne change pas la somme, car  $x_p^*(t=0) = 0$ .

b) La deuxième manière est basée sur le fait que la transformée de Laplace de la fonction continue  $x_p(t)$  n'a de sens que si  $x_p(t)$  est nul pour  $t < 0$ . Cela revient à écrire pour la fonction qui sera transformée :

$$(26) \quad x_p^*(t) = x_p(t) U(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_0),$$

ce qui peut encore se formuler, à cause de la présence de  $U(t)$  :

$$x_p^*(t) = x_p(t) U(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0).$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$  est alors une fonction périodique qui est représentable par la série de Fourier complexe :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_0 t}.$$

Les termes  $c_m$  sont les coefficients de Fourier qui s'expriment :

$$c_m = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t - nT_0) e^{-jm\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = \frac{1}{T_0}$$

ce qui donne : 
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\omega_0 t}$$

et l'équation (26) devient :

$$x_p^*(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_p(t) U(t) e^{jm\omega_0 t}.$$

Grâce à sa symétrie,  $x_p^*(t)$  peut aussi s'exprimer :

$$x_p^*(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_p(t) U(t) e^{-jm\omega_0 t}.$$

En conséquence, la transformée de Laplace de l'expression (26) est :

$$(27) \quad X_p^*(\sigma) = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_p(\sigma + jm\omega_0).$$

Il est alors possible de réunir en une seule relation les équations (25) et (27), grâce au fait que  $x_p^*(t=0) = 0$ , et bien que (27) ne prenne pas en compte l'échantillon de rang  $n = 0$ .

La relation de Poisson, dans ce cas particulier, s'écrit alors :

$$(28) \quad \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_0) e^{-nT_0\sigma} = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_p(\sigma + jm\omega_0).$$

Bien entendu, cette formule n'a de sens que si  $\sigma$  assure la convergence des deux expressions ainsi réunies. Or cette convergence est acquise par définition, puisque les valeurs de  $x_p^*(t)$  et  $y_p^*(t)$  restent finies.

Par ailleurs,  $X^*(\sigma)$  dans l'équation (27) doit être une quantité réelle. En séparant parties réelles et parties imaginaires, il vient :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_p(\sigma + jm\omega_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{RX}_p(\sigma, m\omega_0) + j \text{IX}_p(\sigma, m\omega_0),$$

et l'équation (27) peut alors être formulée :

$$X_p^*(\sigma) = \frac{1}{T_0} \left[ \text{RX}_p(\sigma, 0) + \sum_{m=-\infty}^{-1} \text{RX}_p(\sigma, m\omega_0) + \sum_{m=+1}^{\infty} \text{RX}_p(\sigma, m\omega_0) \right]$$

avec

$$\text{RX}_p(\sigma, 0) = X_p(\sigma), \text{ et } \text{RX}_p(\sigma, m\omega_0) = X_p(\sigma, m\omega_0).$$

En posant :

$$\theta_x = 1 + \left[ \frac{1}{X(\sigma)} \right] \left[ \sum_{m=-\infty}^{-1} X_p(\sigma, m\omega_0) + \sum_{m=1}^{\infty} X_p(\sigma, m\omega_0) \right]$$

L'équation (28) prend alors la forme :

$$(29) \quad X_p^*(\sigma) = \frac{1}{T_0} [X_p(\sigma)] \theta_x.$$

Cette expression est intéressante, car elle réunit dans une même formule la transformée de Laplace discrète et la transformée de Laplace continue.

## 7.2. EXPRESSIONS DE $G^*(\sigma)$ ET DE $G(\sigma)$

L'expression de  $G^*(\sigma)$  a déjà été formulée par l'équation (18). En utilisant la relation (29),  $G^*(\sigma)$  devient :

$$(30) \quad G^*(\sigma) = \frac{Y_p^*(\sigma)}{X_p^*(\sigma)} = \frac{\theta_{y_0}[Y(\sigma)_0] - e^{-\sigma NT_0} \theta_{y_1}[Y(\sigma)_1]}{\theta_{x_0}[X(\sigma)_0] - e^{-\sigma NT_0} \theta_{x_1}[X(\sigma)_1]}.$$

Étant donné qu'il y a très peu de raisons pour que les spectres  $X(\omega)_0$  et  $X(\omega)_1$  soient différents, on peut écrire :  $\theta_{x_0} = \theta_{x_1} = \theta_x$ .

De même pour les spectres  $Y(\omega)_0$  et  $Y(\omega)_1$ , on écrit :  $\theta_{y_0} = \theta_{y_1} = \theta_y$ , et, avec  $G(\sigma)$  défini par l'équation (16), on obtient finalement :

$$(31) \quad G^*(\sigma) = G(\sigma)[\theta_y/\theta_x].$$

## 7.3. EXEMPLE NUMÉRIQUE

Le propos de cet exemple numérique est d'évaluer l'ordre de grandeur de  $\theta_y$ ,  $\theta_x$  et de  $\theta_y/\theta_x$  dans le cas où le système linéaire est un filtre passe-bas idéal. Pour simplifier, le spectre de la fonction continue qui correspond à  $x_p^*(t)$  est celui déjà rencontré dans l'appendice précédent.

À ce propos, il convient de signaler que la relation de Poisson (28) cesse alors d'être valide car, ainsi que signalé dans l'appendice n° 1, la fonction  $x_p(t)$  implicitement définie par le choix de son spectre, ne satisfait pas les conditions initiales. Toutefois, la définition de  $X_p^*(\sigma)$  dans l'équation (27) demeure valide même si ces conditions ne sont pas satisfaites, et va pouvoir être utilisée dans ce qui suit.

Le spectre fondamental de  $X_p^*(j\omega)$  qui n'est autre que  $X_p(\omega)$ , est défini par :

$$X_p(\omega) = \Pi P_x(\omega), \text{ avec } P_x(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \omega \leq \alpha_x \\ 0 & \text{pour } \omega > \alpha_x \end{cases}$$

et par conséquent :  $X_p(\sigma) = \text{Arc tg } \frac{\alpha_x}{\sigma}$ .

L'équation (27) devient :

$$X_p^*(\sigma) = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{Arc tg } \frac{\alpha_x}{\sigma + jm\omega_0}.$$

On pose  $Z_m = A_m - jB_m$  et  $\bar{Z}_m = A_m + jB_m$ ,

$$\text{avec } A_m = \frac{\alpha_x \sigma}{\sigma^2 + m^2 \omega_0^2} \text{ et } B_m = \frac{m \alpha_x \omega_0}{\sigma^2 + m^2 \omega_0^2}.$$

On obtient :

$$X_p^*(\sigma) = \frac{1}{T_0} \left[ X_p(\sigma) + \sum_{m=1}^{\infty} \text{Arc tg } Z_m + \sum_{m=1}^{\infty} \text{Arc tg } \bar{Z}_m \right].$$

1) L'application numérique est définie par  $\sigma = \alpha_x$ ,  $\omega_0 = 4 \alpha_x$ .

$$\text{Cela donne : } A_m = \frac{1}{1 + 16 m^2}, \text{ et } B_m = \frac{4}{1 + 16 m^2}.$$

Un rapide calcul numérique donne le tableau suivant :

m	A <sub>m</sub>	B <sub>m</sub>
1	1/17 = 0,05882	4/17 = 0,23529
2	1/65 = 0,01538	8/65 = 0,12307
3	1/145 = 0,00689	12/145 = 0,08275

Ce tableau montre que  $A_m > A_{m+1}$  et  $B_m > B_{m+1}$ .

Par ailleurs,  $Z_m$ , par exemple, peut s'écrire :

$$Z_m = A_m - jB_m = \text{Arc tg} \left[ \frac{\sin 2 A_m - j \text{sh} 2 B_m}{\cos 2 A_m + \text{ch} 2 B_m} \right]$$

et, puisque  $A_m$  et  $B_m$  sont inférieurs à 1, certaines approximations apparaissent possibles. Il convient de tester la validité de ces approximations sur les termes de rang  $m = 1$  qui sont les plus grands et peuvent causer les erreurs les plus considérables. Le développement limité au premier terme des constituants de  $Z_m$  donne alors :

$$\sin 2 A_1 = 2 A_1 \text{ (erreur = 0,2 \% ) ,}$$

$$\text{sh} 2 B_1 = 2 B_1 \text{ (erreur = 3,7 \% ) ,}$$

$$\cos 2 A_1 + \text{ch} 2 B_1 = 2 \text{ (erreur = 6 \% ) .}$$

On peut donc écrire, avec une approximation raisonnable :

$$\text{Arc tg} [A_m - jB_m] = A_m - jB_m,$$

et

$$\begin{aligned} X_p^*(\sigma) &= \frac{1}{T_0} \left[ X_p(\sigma) + \sum_{m=1}^{\infty} Z_m + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{Z}_m \right] \\ &= \frac{1}{T_0} \left[ X_p(\sigma) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m \right] \end{aligned}$$

ou (éq. (29)),  $X_p^*(\sigma) = \frac{1}{T_0} [X_p(\sigma)] \theta_x$ , avec

$$\theta_x = 1 + \frac{8}{\Pi} \sum_{m=1}^{\infty} A_m, \text{ avec } \sum_{m=1}^{\infty} A_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 16 m^2}.$$

À partir du terme de rang  $m = 2$ , cette somme est égale à  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{16 m^2}$  avec une précision supérieure aux approximations utilisées plus haut. Après correction concernant le premier terme, il vient :  $\sum_{m=1}^{\infty} A_m = 0,0991$ .

En conséquence, dans le cadre de la précision calculée plus haut,

$$\theta_x = 1,252.$$

2) Pour évaluer  $\theta_y$  lié à la réponse du filtre passe-bas, le spectre fondamental de  $Y_p^*(j\omega)$ , qui n'est autre que  $Y_p(\omega)$ , est défini par :

$$Y_p(\omega) = \Pi P_y(\omega), \text{ avec } P_y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \omega \leq \alpha_y \\ 0 & \text{pour } \omega > \alpha_y \end{cases},$$

avec  $\omega_h = \alpha_y = 0,8 \alpha_x$ .

Il s'ensuit que  $\omega_0 = 5 \alpha_y$ . Pour  $\sigma = \alpha_y$ , après avoir effectué des approximations semblables à celles du cas précédent, on obtient :

$$\theta_y = 1 + \frac{8}{\Pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 25 m^2} = 1,166.$$

Par conséquent, dans l'équation (31),  $\theta_y/\theta_x = 1,166/1,25 = 0,93$ .

Bien entendu, les filtres de ce genre n'existent pas en réalité, mais cet exemple montre directement l'importance du composant spectral de fréquence la plus élevée pour une fréquence d'échantillonnage donnée, ainsi que le mécanisme selon lequel  $G^*(\sigma)$  aura tendance à être moins fortement affecté que  $X_p^*(\sigma)$  ou  $Y_p^*(\sigma)$ , pour une valeur de  $\sigma_h$  donnée. Cette dernière caractéristique est d'ailleurs renforcée dans le cas d'un filtre réel, car une spartie du spectre  $X_p(\omega)$  subsiste dans  $Y_p(\omega)$  pour la plage de valeurs de  $\omega$  définies par  $0,8 \alpha_x \leq \omega \leq \alpha_x$ , ce qui contribue à accroître  $\theta_y$  et à rapprocher encore plus  $G^*(\sigma)$  de  $G(\sigma)$ .

En conclusion,  $f_h = \alpha_x/2 \Pi$  étant la plus haute fréquence représentée dans un spectre donné, et  $f_0/f_h$  étant déterminé par la règle classique du domaine des fréquences, la valeur maximum  $\sigma_h$  utilisable permettant à  $G^*(\sigma)$  d'être égal à  $G(\sigma)$  avec une précision meilleure que 7% est définie par  $\sigma_h = \kappa_\alpha \alpha_x$ , avec  $\kappa_\alpha = 0,8$ . Cette précision augmente considérablement dès que  $\kappa_\alpha$  décroît.

Cette conclusion est conforme au phénomène expérimental décrit dans le chapitre 4, où le système linéaire est un filtre passe-bas avec pour fréquence de coupure  $f_c = 125$  Hz et où  $f_0 = 512$  Hz.

En prenant les notations de l'exemple ci-dessus, cela s'exprime à peu près (puisque  $f_c$  n'est pas  $f_h$ ) par :  $\alpha_x = 2 \Pi f_h = 785,4$ ,  $\omega_0 = 4 \alpha_x$ .

On observe alors que  $G^*(\sigma)$  expérimental et  $G(\sigma)$  théorique demeurent pratiquement identiques et, ce, avec une très haute précision, pour des valeurs de  $\sigma$  allant au moins jusqu'à 450, ce qui correspond à  $\sigma_h = 0,57 \alpha_x$  (fig. 6).

## REMERCIEMENTS

L'auteur est reconnaissant pour les commentaires et suggestions qu'il a reçus de la part du professeur Alex Becker, Geoscience Department, University of California, Berkeley, et pour l'aide venant de Mr. Ramsey Haight, qui a préparé les figures.

La rédaction de TS remercie M. Michel Dubesset pour sa participation.

Premier manuscrit reçu le 12 juin 1990

## Liste des symboles utilisés

$\{x(t)\}$	fonction continue du temps
$\mathcal{F}\{x(t)\}$	transformation de Fourier de $x(t)$
$X(j\omega)$	transformée de Fourier de $x(t)$
$s$	variable de la transformée de Laplace
$\mathcal{L}\{x(t)\}$	transformation de Laplace de $x(t)$
$X(s)$	transformée de Laplace de $x(t)$
$\{x^*(t)\}$	fonction discrète du temps
$X^*(j\omega)$	transformée de Fourier de $x^*(t)$
$X^*(s)$	transformée de Laplace de $x^*(t)$
$X^*(s)$	transformée de Laplace de $x^*(t)$
$U(t)$	échelon-unité
$\delta(t - nT_0)$	fonction représentant un train d'impulsions se produisant à $t = nT_0$
$G(s)$	fonction de transfert continue
$G^*(s)$	fonction de transfert discrète
$\sigma$	variable de la transformée de Laplace réelle et positive
$G(\sigma)$	fonction de transfert continue par rapport à $\sigma$
$G^*(\sigma)$	fonction de transfert discrète par rapport à $\sigma$
$f_0$	fréquence d'échantillonnage
$f_h$	fréquence la plus haute dans un spectre à bande limitée
$\kappa_x$ et $\kappa_y$	ensemble de conditions initiales à satisfaire pour pratiquer l'analyse dans le domaine de sigma.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. S. BENDAT and A. G. PIERSON, *Random data : analysis and measurement procedures*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1971.
- [2] L. CAGNIARD, *Réflexion et réfraction des ondes sismiques progressives*, Gauthier-Villars, Paris, 1939.
- [3] L. CAGNIARD, *Réflexion et réfraction des ondes sismiques progressives*, Gauthier-Villars, Paris ; Flinn E. A. and Dix C. H., trans. and rev., 1962, Reflection and refraction of progressive seismic waves, McGraw-Hill Book Co. (Div. of McGraw-Hill, Inc.), New York, 1939.
- [4] G. DOETSH and R. HERSCHEL, *Guide to the applications of the Laplace and Z-transforms*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1971.
- [5] L. MUSÉ and R. HAUGHT, *Random time series analysis for linear systems based on the Laplace transform with applications to the magnetotelluric method : Goexploration*, 25 (1988), pp. 113-143, 1988.
- [6] J. RAGAZZINI and G. FRANKLIN, *Sampled-data control systems*, McGraw-Hill Book Co. (Div. of McGraw-Hill, Inc.), New York, 1958.