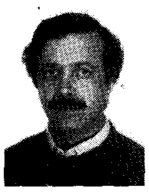
Stabilité des filtres récursifs de dimension deux : un algorithme simplifié et son implémentation

Stability of two dimensional recursif filters : a simplified algorithm and its implementation



Mohamed Faouzi BEL BACHIR

Laboratoire de Traitement du Signal, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran, BP 1505, Oran El M'Naouar, Algérie

M. F. Bel Bachir a obtenu successivement le diplôme d'ingénieur et le titre de magister (1984) de l'Université des Sciences et de la Technologie d'Oran (USTO) puis a effectué un séjour doctoral à l'Institut de la Communication Parlée à Grenoble. Il est actuellement chargé de cours à l'USTO et chercheur au laboratoire de Traitement de Signal. Ses centres d'intérêts concernent le filtrage numérique et le codage de la parole.

Jean CAELEN

Institut de la Communication Parlée, INPG, 46 avenue F. Viallet, 38031 Grenoble Cedex

J. Caelen, docteur ès sciences en 1979, dirige l'équipe Décodage et Compréhension de la Parole à l'Institut de la Communication Parlée de Grenoble. Pour l'aspect traitement du signal, ses centres d'intérêt concernent le filtrage en vue de l'analyse du signal vocal et le rehaussement de la parole dans le bruit. Il travaille notamment sur des méthodes de traitement touchant à l'intelligence artificielle.

RÉSUMÉ

Cet article porte sur le problème de la stabilité des filtres numériques à deux dimensions. L'approche théorique s'appuie sur le théorème de Shentov, Mitra et Anderson et sur le test de Bistritz pour la vérification des deux critères de stabilité de Huang. La récursivité des calculs à laquelle on parvient, permet de concevoir un algorithme efficace et facile à implanter pour le test de la stabilité de filtres numériques à deux dimensions d'ordre quelconque.

MOTS CLÉS

Filtres de dimension deux, stabilité, conception de filtres.

ABSTRACT

This paper adresses the important problem of two dimensional digital filter's stability. Shentov, Mitra and Anderson's theorem and Bistriz's test are used for the verification of the two stability criteria of Huang. From this theoretical approach calculus recursivity emerges, which allows to obtain an efficient algorithm easy to implement for the stability test of any ordered two dimensional digital filter.

KEY WORDS

Two dimensional filters, stability.

1. Introduction

La stabilité EBSB (Entrée Bornée Sortie Bornée) des filtres de dimension 2 est un problème qui, d'un point de vue mathématique, se ramène à l'étude de la position des racines d'un polynôme à deux variables dans le bicercle unité U^2. L'étude faite initialement par Shanks [2], a été simplifiée par Huang [3]. Le théorème fondamental qui en découle est devenu le point de départ de nombreux travaux dans le domaine.

Huang [3] a proposé une méthode pour le test de stabilité en utilisant deux transformées bilinéaires. Une des conséquences intéressante est que le problème est transformé en une forme directement admissible par la méthode d'Ansell [4]. De manière concurrente, le test d'Anderson et Jury [5] se fonde sur la construction d'une matrice de Schur-Cohn suivie d'un test de positivité d'un ensemble de polynômes autoréciproques, le long du cercle unité. Ces deux approches semblent équivalentes du point de vue du volume des calculs. De leur côté, Maria et Fahmi [1] utilisent une version modifiée du test de Jury [10] pour vérifier la première condition de Huang. Dans tous ces cas, les tests de stabilité sont très complexes à mettre en œuvre et les auteurs ne s'attardent pas à développer des algorithmes performants.

Dans cet article, au contraire, nous présentons un algorithme de test de la stabilité, conceptuellement plus simple et de mise en œuvre facile sur ordinateur. Le principe revient à tester la stabilité du filtre relativement à celle d'un filtre passe-tout ayant le même dénominateur. Pour cela, nous nous appuyons sur le théorème de Shentov, Mitra et Anderson [6] et sur le test de Bistritz [7], puis nous formulons le problème de manière récursive, ce qui conduit à un algorithme performant.

2. Principe général

Un filtre numérique récursif $P(z_1, z_2)$ à coefficients réels (couramment appelé quart de plan) peut être défini par sa transformée en z comme suit :

$$P(z_1, z_2) = \frac{N(z_1, z_2)}{D(z_1, z_2)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \cdot z_2^i \cdot z_1^j}{\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} \cdot z_2^i \cdot z_1^j} \tag{1}$$

où les coefficients a_{ij} et b_{ij} sont réels et m, n des entiers positifs.

Sous réserve que la fonction de transfert de $P(z_1, z_2)$ soit irréductible et que $N(z_1, z_2)$ et $D(z_1, z_2)$ ne possèdent pas de zéro en commun sur le bicercle unité U^2, la stabilité de $P(z_1, z_2)$ ne dépend que de celle du dénominateur $D(z_1, z_2)$ [12]. Nous examinons ci-après uniquement de tels filtres.

Considérons maintenant le filtre passe-tout, dont le dénominateur contient précisément le polynôme $D(z_1, z_2)$ que nous désirons étudier :

$$H(z_1, z_2) = z_1^m \cdot z_2^n \cdot \frac{D(z_1^{-1}, z_2^{-1})}{D(z_1, z_2)} . \tag{2}$$

Par cet artifice l'étude de la stabilité de $P(z_1, z_2)$ se ramène à celle de $H(z_1, z_2)$ dont la forme développée s'exprime comme suit :

$$H(z_1, z_2) = \frac{\sum_{j=0}^{m} a'_{m-j}(z_2) \cdot z_1^j}{\sum_{j=0}^{m} a_j(z_2) \cdot z_1^j} \tag{3}$$

avec :

$$a_j(z_2) = \sum_{i=0}^{n} a_{ij} \cdot z_2^i \tag{4}$$

$$a'_j(z_2) = \sum_{i=0}^{n} a_{ij} \cdot z_2^{n-i} \tag{5}$$

que nous pouvons normaliser en :

$$H(z_1, z_2) = B(z_2) \cdot E_m(z_1, z_2) \tag{6}$$

et dans laquelle,

$$B(z_2) = \frac{a'_m(z_2)}{a_m(z_2)} \tag{7}$$

$$E_m(z_1, z_2) = \frac{N_m(z_1, z_2)}{D_m(z_1, z_2)} = \frac{\frac{1}{a'_m(z_2)} \cdot \sum_{j=0}^{m} a'_{m-j}(z_2) \cdot z_1^j}{\frac{1}{a_m(z_2)} \cdot \sum_{j=0}^{m} a_j(z_2) \cdot z_1^j} . \tag{8}$$

On voit que $B(z_2)$ et $E_m(z_1, z_2)$ sont encore des fonctions de transfert de filtres passe-tout dont le numérateur est par définition réciproque du dénominateur. La stabilité de $H(z_1, z_2)$ est donc maintenant dépendante de celle de $B(z_2)$ et de celle de $E_m(z_1, z_2)$:

(*a*) pour le polynôme $B(z_2)$, qui ne dépend que d'une variable, le problème de la stabilité est connu : il faut et il suffit que toutes ses racines soient à l'intérieur du cercle unité — ceci peut se vérifier par exemple, à l'aide du test de Bistriz [7],

(*b*) par contre la stabilité de $E_m(z_1, z_2)$ est plus difficile à établir ; pour cela nous nous appuyons sur le théorème de Shentov, Mitra et Anderson [6] dont nous rappelons la formulation générale :

THÉORÈME [6] : $E_m(z_1, z_2)$ *est la fonction de transfert de degré m en* z_1*, d'un filtre passe-tout stable, si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1) *le filtre de fonction de transfert* $E_{m-1}(z_1, z_2)$ *au plus de degré m* − 1 *donné par la relation*

$$E_{m-1}(z_1, z_2) = z_1 \cdot \frac{E_m(z_1, z_2) - K_m(z_2)}{1 - K'_m(z_2) \cdot E_m(z_1, z_2)} \tag{9}$$

est un filtre passe-tout stable avec :

$$K_m(z_2) = E_m(\infty, z_2)$$
$$K'_m(z_2) = (E_m(0, z_2))^{-1} .$$

2) $\forall z_2 \in C$, $|z_2| = 1 \Rightarrow K'_m(z_2) \cdot K'^*_m(z_2) < 1$ *où* $K'^*_m(z_2)$ *est le conjugué de* $K'_m(z_2)$.

L'intérêt de ce théorème est de lier la stabilité d'un filtre d'ordre quelconque m, à celle d'un filtre d'ordre immédiatement inférieur. Ainsi après $m - 1$ itérations et si les conditions $K'_{m-i}(z_2) \cdot K'^*_{m-i}(z_2) < 1 \; \forall i \in [0, m-1]$ sont vérifiées, alors nous pouvons conclure sur la stabilité de $E_m(z_1, z_2)$ à partir d'un filtre passe-tout d'ordre 1 dont les coefficients dépendent uniquement de z_2.

Le principe général de cette méthode conduit à l'algorithme suivant :

a) Vérifier que $a_m(z_2)$ a toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité
b) Pour $i = 0$ à $m-1$ **Faire**
  Vérifier $K'_{m-i}(z_2) \cdot K'^{*}_{m-i}(z_2) < 1$
  $i = i + 1$
  Calculer $E_{m-i}(z_1, z_2)$ à partir de $E_{m-i+1}(z_1, z_2)$
 FinPour
c) Conclure sur la stabilité du filtre.

Pour la réalisation de l'étape **a)** (le test de Bistritz [7]) un algorithme performant a été détaillé dans [9]. Pour l'étape **b)** une stratégie récurrente est nécessaire pour le calcul des $E_{m-i}(z_1, z_2)$ et le test de la condition $K'_{m-i}(z_2) \cdot K'^{*}_{m-i}(z_2) < 1$: les sections 3 et 4 leur sont, respectivement, consacrées.

3. Calcul de $E_{m-i}(z_1, z_2)$

3.1. INITIALISATION DU CALCUL

D'après l'expression (8) de $E_m(z_1, z_2)$ nous remarquons que le numérateur $N_m(z_1, z_2)$ et le dénominateur $D_m(z_1, z_2)$ sont eux-mêmes des fractions rationnelles dont leur propre numérateur est un polynôme des deux variables z_1 et z_2 et leur dénominateur un polynôme de la seule variable z_2. Par un changement de notation, posons de manière plus générale :

$$(10) \quad E_m(z_1, z_2) = \frac{N_m(z_1, z_2)}{D_m(z_1, z_2)} = \frac{\dfrac{1}{\eta_m(z_2)} \cdot CN_m(z_1, z_2)}{\dfrac{1}{\delta_m(z_2)} \cdot CD_m(z_1, z_2)}$$

avec :

$$(11) \quad CN_m(z_1, z_2) = \sum_{j=0}^{m} n_m^j(z_2) \cdot z_1^j, \quad n_m^j(z_2) = a'_{m-j}(z_2)$$

$$(12) \quad CD_m(z_1, z_2) = \sum_{j=0}^{m} d_m^j(z_2) \cdot z_1^j, \quad d_m^j(z_2) = a_j(z_2)$$

et les identités :

$$(13) \quad \eta_m(z_2) = a'_m(z_2) = n_m^0(z_2)$$

$$(14) \quad \delta_m(z_2) = a_m(z_2) = d_m^m(z_2) .$$

Les polynômes $\eta_m(z_2)$ et $\delta_m(z_2)$ sont réciproques l'un de l'autre. En développant les calculs pour $E_{m-1}(z_1, z_2)$, sachant que :

$$E_{m-1}(z_1, z_2) = \frac{N_{m-1}(z_1, z_2)}{D_{m-1}(z_1, z_2)}$$

on obtient à partir des formules (9) et (10) :

$$(15) \quad N_{m-1}(z_1, z_2) = N_m(z_1, z_2) - K_m(z_2) \cdot D_m(z_1, z_2)$$

puis en remplaçant par les expressions de N_m et D_m :

(16)

$$N_{m-1}(z_1, z_2) = \frac{1}{n_m^0(z_2) \cdot d_m^m(z_2)} \left[d_m^m(z_2) \cdot \sum_{j=0}^{m} n_m^j(z_2) \cdot z_1^j - n_m^m(z_2) \cdot \sum_{j=0}^{m} d_m^j(z_2) \cdot z_1^j \right]$$

expression dans laquelle on identifie facilement :

$$(17) \quad \eta_{m-1}(z_2) = n_m^0(z_2) \cdot d_m^m(z_2)$$

$$(18) \quad CN_{m-1}(z_1, z_2) = d_m^m(z_2) \cdot CN_m(z_1, z_2) - n_m^m(z_2) \cdot CD_m(z_1, z_2) .$$

Des calculs identiques pour le dénominateur $D_{m-1}(z_1, z_2)$ conduisent à :

$$(19) \quad \delta_{m-1}(z_2) = n_m^0(z_2) \cdot d_m^m(z_2)$$

$$(20) \quad CD_{m-1}(z_1, z_2) = z_1^{-1} \cdot [n_m^0(z_2) \cdot CD_m(z_1, z_2) - d_m^0(z_2) \cdot CN_m(z_1, z_2)] .$$

Le rapprochement de (17) et (20) montre que $\eta_{m-1}(z_2) = \delta_{m-1}(z_2)$, ce qui simplifie l'expression finale de $E_{m-1}(z_1, z_2)$ en :

$$(21) \quad E_{m-1}(z_1, z_2) = \frac{CN_{m-1}(z_1, z_2)}{CD_{m-1}(z_1, z_2)}$$

par application du lemme ci-après on peut aussi affirmer que CN_{m-1} est réciproque de CD_{m-1}, ce que l'on notera $CN_{m-1} = CD'_{m-1}$.

LEMME : *Soit*

$$X(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{p} x_k(z_2) \cdot z_1^k$$

alors

$$Q(z_1, z_2)' = z_1^{-1}[x_p(z_2)' \cdot X(z_1, z_2) - x_0(z_2) \cdot X(z_1, z_2)'] = \sum_{k=0}^{p-1} q_k(z_2) \cdot z_1^k$$

a pour réciproque

$$Q(z_1, z_2)' = x_p(z_2) \cdot X(z_1, z_2)' - x_0(z_2)' \cdot X(z_1, z_2)$$

La preuve de ce lemme s'obtient de façon immédiate par calcul de Q et Q'.

3.2. DÉMONSTRATION DE LA RÉCURRENCE

Nous supposons que la relation (21) — vraie au pas 1 — reste vraie au pas $i > 1$, c'est-à-dire :

$$(22) \quad E_{m-i}(z_1, z_2) = \frac{CD_{m-i}(z_1, z_2)'}{CD_{m-i}(z_1, z_2)}$$

avec

(23)

$$CD_{m-i}(z_1, z_2) = z_1^{-1}(n_{m-i+1}^0(z_2) \cdot CD_{m-i+1}(z_1, z_2) - d_{m-i+1}^0(z_2) \cdot CN_{m-i+1}(z_1, z_2)).$$

Montrons sa validité au pas $i + 1$.
Pour cela on part de la relation (9) qui donne :

$$(24)\quad E_{m-i}(z_1, z_2) = \frac{N_{m-i}(z_1, z_2)}{D_{m-i}(z_1, z_2)} = \frac{N_{m-i+1}(z_1, z_2) - K_{m-i+1}(z_2) \cdot D_{m-i+1}(z_1, z_2)}{z_1^{-1}[D_{m-i+1}(z_1, z_2) - K'_{m-i+1}(z_2) \cdot N_{m-i+1}(z_1, z_2)]}$$

avec :

$$(25)\quad K_{m-i}(z_2) = \frac{n_{m-i}^{m-i}(z_2)}{n_{m-i}^0(z_2)}$$

$$(26)\quad K_{m-i}(z_2) = \frac{d_{m-i}^0(z_2)}{d_{m-i}^{m-i}(z_2)}$$

et après des calculs similaires à ceux du pas 1, il vient :

$$(27)\quad N_{m-i-1}(z_1, z_2) = \frac{1}{\eta_{m-i-1}(z_2)} \times \left[n_{m-i}^0(z_2) \cdot \sum_{j=0}^{m-i} n_{m-i}^j(z_2) \cdot z_1^j - n_{m-i}^{m-i}(z_2) \cdot \sum_{j=0}^{m-i} d_{m-i}^j(z_2) \cdot z_1^j\right]$$

$$(28)\quad \eta_{m-i-1}(z_2) = n_{m-i}^0(z_2) \cdot \eta_{m-i}(z_2)$$

$$(29)\quad D_{m-i-1}(z_1, z_2) = \frac{1}{\delta_{m-i-1}(z_2)} \times z_1^{-1} \times [d_{m-i}^{m-i}(z_2) \cdot CD_{m-i}(z_1, z_2) - d_{m-i}^0(z_2) \cdot CN_{m-i}(z_1, z_2)]$$

$$(30)\quad \delta_{m-i-1}(z_2) = d_{m-i}^{m-i}(z_2) \cdot \delta_{m-i}(z_2).$$

Démontrons maintenant l'égalité de $\eta_{m-i-1}(z_2)$ et de $\delta_{m-i-1}(z_2)$ en identifiant dans l'expression (23) les coefficients des termes de degré le plus bas et le plus élevé en z_1 :

$$(31)\quad n_{m-i}^0(z_2) = d_{m-i+1}^{m-i+1}(z_2) \cdot n_{m-i+1}^0(z_2) - n_{m-i+1}^{m-i+1}(z_2) \cdot d_{m-i+1}^0(z_2)$$

$$(32)\quad d_{m-i}^{m-i}(z_2) = n_{m-i+1}^0(z_2) \cdot d_{m-i+1}^{m-i+1}(z_2) - d_{m-i+1}^0(z_2) \cdot n_{m-i+1}^{m-i+1}(z_2)$$

donc :

$$(33)\quad n_{m-i}^0(z_2) = d_{m-i}^{m-i}(z_2)$$

ce qui, grâce à $\eta_{m-i}(z_2) = \delta_{m-i}(z_2)$ implique :

$$(34)\quad \delta_{m-i-1}(z_2) = \eta_{m-i-1}(z_2)$$

dont on déduit que :

$$(35)\quad CN_{m-i-1}(z_1, z_2) = d_{m-i}^{m-i}(z_2) \cdot CN_{m-i}(z_1, z_2) - n_{m-i}^{m-i}(z_2) \cdot CD_{m-i}(z_1, z_2)$$

(36)

$$CD_{m-i-1}(z_1, z_2) = z_1^{-1} \cdot [n_{m-i}^0(z_2) \cdot CD_{m-i}(z_1, z_2) - d_{m-i}^0(z_2) \cdot CN_{m-i}(z_1, z_2)]$$

et qui, en appliquant le lemme à CN_{m-i-1}, démontre la récurrence.

4. Formulation de la condition sur $K'_{m-i}(z_2)$

Cherchons une expression simple de la condition définie par :

$$(37)\quad K'_{m-i}(z_2) \cdot K'^*_{m-i}(z_2) < 1$$

avec $|z_2| = 1$ et $i \in [0, m-1]$.
En utilisant (22), cette condition devient :

$$(38)\quad R_{m-i}(z_2) = d_{m-i}^0(z_2) \cdot d_{m-i}^0(z_2)^* - d_{m-i}^{m-i}(z_2) \cdot d_{m-i}^{m-i}(z_2)^* < 0 \quad i \in [0, m-1]$$

développons $d_{m-i}^j(z_2)$ en posant :

$$(39)\quad d_{m-i}^j(z_2) = \sum_{k=0}^{ni} \alpha_{k,j} \cdot z_2^k$$

on a alors :

$$(40)\quad R_{m-i}(z_2) = \sum_{k=0}^{ni} \alpha_{k,0} \cdot z_2^k \cdot \left(\sum_{k=0}^{ni} \alpha_{k,0} \cdot z_2^k\right)^* - \sum_{k=0}^{ni} \alpha_{k,m-i} \cdot z_2^k \cdot \left(\sum_{k=0}^{ni} \alpha_{k,m-i} \cdot z_2^k\right)^* < 0$$

sachant que $|z_2| = 1$ c'est-à-dire $z_2^* = z_2^{-1}$, il vient :

$$(41)\quad R_{m-i}(z_2) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{ni} \times \left(\sum_{k=0}^{ni-j} (\alpha_{k,0} \cdot \alpha_{k+j,0} - \alpha_{k,m-i} \cdot \alpha_{k+j,m-i})\right) \times (z_2^j + z_2^{-1}) < 0$$

en posant $z_2 = x + iy$, les $R_{m-i}(z_2)$ peuvent être exprimés en fonction de la variable réelle x en substituant $(z_2^j + z_2^{-j})$ par $f_j(x)$ ($j \in [1, ni]$) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
(z_2^0 + z_2^{-0}) &= 2 & &= f_0(x)\\
(z_2^1 + z_2^{-1}) &= 2x & &= f_1(x)\\
(z_2^2 + z_2^{-2}) &= 4x^2 - 2 & &= f_2(x)\\
(z_2^3 + z_2^{-3}) &= 8x^3 - 6x & &= f_3(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(z_2^j + z_2^{-j}) & & &= f_j(x).
\end{aligned}$$

Notons que $f_j(x)$ sont les polynômes de Tchebycheff d'ordre j et sont calculés à l'aide de l'expression suivante :

$$f_j(x) = 2\,x\,.\,f_{j-1}(x) - f_{j-2}(x) \quad \text{pour} \quad j > 2\,.$$

La condition devient :

$$(42) \quad \mathrm{R}_{m-i}(x) = \sum_{i=0}^{ni} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{ni-1} (\alpha_{k,0}\,.\,\alpha_{k+i,0} - \alpha_{k,m-i}\,.\,\alpha_{k+i,m-i}) \right) \times f_i(x) < 0$$

où $\mathrm{R}_{m-i}(x)$ ne doit posséder aucune racine réelle dans l'intervalle $-1 < x < 1$.

5. Mise en œuvre de l'algorithme

5.1. INTRODUCTION

Pour la mise en œuvre de l'algorithme proposé dans cet article, nous avons préféré utiliser une formulation matricielle. A partir de (12) et (39), nous avons :

$$\mathrm{CD}_{m-i}(z_1, z_2) = \sum_{j=0}^{m-i} d^j_{m-i}(z_2)\,.\,z_1^j = \sum_{j=0}^{m-i} \sum_{k=0}^{ni} \alpha_{k,j}\,.\,z_2^k\,.\,z_1^j$$

on définit alors la matrice CD_{m-i} par :

$$\mathrm{CD}_{m-i} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \cdots & \alpha_{0,j} & \cdots & \alpha_{0,m-i} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,j} & \cdots & \alpha_{1,m-i} \\ \alpha_{2,0} & \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,j} & \cdots & \alpha_{2,m-i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{ni,0} & \alpha_{ni,1} & \cdots & \alpha_{ni,j} & \cdots & \alpha_{ni,m-i} \end{bmatrix} =$$

$$= [d^0_{m-i}, d^1_{m-i}, \ldots, d^j_{m-i}, \ldots, d^{m-i}_{m-i}]\,.$$

On conviendra que $\mathrm{CD}_{m-i}(*, j)$ correspond à la j-ième colonne de la matrice CD_{m-i}.

Du fait de la réciprocité de $\mathrm{CN}_{m-i}(z_1, z_2)$ et $\mathrm{CD}_{m-i}(z_1, z_2)$ nous avons $\mathrm{CD}_{m-i} = \mathrm{CN}^{\mathrm{T}}_{m-i}$. La condition (42) s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathrm{CD}(*, 0) \circ \mathrm{CD}(*, 0)^{\mathrm{T}} - \\ - \mathrm{CD}(*, m-i) \circ \mathrm{CD}(*, m-i)^{\mathrm{T}} < 0$$

expression dans laquelle nous avons noté par « ∘ » la loi de multiplication terme à terme des matrices pour la distinguer de la multiplication habituelle.

5.2. ALGORITHME

Début

a) Lire m, n. Initialiser CD et $\mathrm{CN} = \mathrm{CD}^{\mathrm{T}}$

b) Vérifier à l'aide du test de Bistritz que le polynôme $\mathrm{CD}(*, m)$ a toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité :

c) Pour $i = m$ à 1 **Faire**

Tester la condition

$\mathrm{CD}(*, 0) \circ \mathrm{CD}(*, 0)^{\mathrm{T}} -$
$\quad - \mathrm{CD}(*, m-i) \circ \mathrm{CD}(*, m-i)^{\mathrm{T}} < 0$

$\mathrm{CN} = \mathrm{CD}(*, i) \circ \mathrm{CN} - \mathrm{CN}(*, i) \circ \mathrm{CD}$

$\mathrm{CD} = \mathrm{CN}^{\mathrm{T}}$

FinPour

Si la condition est vraie pour tout i

Alors « Le filtre est stable »

Sinon « Le filtre est instable »

Finsi

Fin

Remarquons que l'algorithme est d'une simplicité intéressante. Cependant des difficultés d'ordre pratique peuvent se poser lorsqu'on teste des filtres d'ordre élevé. En effet, au fur et à mesure des itérations, l'ordre des polynômes en z_2 générés par la procédure croît rapidement. Ainsi, si l'on considère un polynôme de degré m en z_1 et n en z_2, l'algorithme nécessite la construction de matrices CD de dimension $2\,n\,2^{m-1}$.

Cet algorithme a été évalué avec succès sur un ensemble de filtres que nous avons générés ainsi que sur des exemples donnés dans la bibliographie [14], [15] sur une machine identique : le temps d'exécution est nettement plus rapide avec cet algorithme (le temps machine moyen pour le test d'un filtre stable est de 20 ms pour un ordre $m = n = 2$ et de 50 ms pour $m = n = 3$ alors que les auteurs annoncent un temps de calcul de l'ordre de la seconde).

6. Étude de deux exemples

6.1. PREMIER EXEMPLE

L'exemple que nous présentons pour illustrer le déroulement de l'algorithme a été traité par Huang [3] ainsi que par Maria et Fahmi [1]. Sa fonction de transfert est :

$$P(z_1, z_2) = \frac{1}{\mathrm{D}(z_1, z_2)}$$

avec :

$$\mathrm{D}(z_1, z_2) = \\ = \left(\frac{1}{4} z_2^2\right) + \left(\frac{1}{4} z_2 + \frac{1}{2} z_2^2\right) \cdot z_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} z_2 + z_2^2\right) \cdot z_1^2\,.$$

— Étape a) de l'algorithme

Les matrices sont CD et CN sont initialisées par :

$$CD = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad CN = CD^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

— Étape b) de l'algorithme

Vérifions que le polynôme correspondant à $CD(*, m)$ a toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité :

$$CD(*, 2) = (1/4, 1/2, 1)\,.$$

En utilisant polynôme associé $d_2^2(z_2)$ la condition s'écrit :

$$d_2^2(z_2) = 1/4 + 1/2\, z_2 + z_2^2 = 0 \quad |z_2|_{1,2} < 1$$

la même condition a été obtenue par Maria et Fahmi [1] montrant qu'elle est satisfaite.

— Étape c) de l'algorithme

1. Vérifions que $K_2'(Z_2)\,.\,K_2'(Z_2)^* < 0$. Nous avons :

$$CD(*,0)\circ CD(*,0)^* - CD(*,2)\circ CD(*,2)^* = (0,0,1/4)\circ(0,0,1/4)^* - (1/4,1/2,1)\circ(1/4,1/2,1)^*.$$

En utilisant le polynôme associé $R_2(z_2)$, la condition s'exprime par :

$$R_2(z_2) = 1{,}25 - 0{,}625\,.\,(z_2 + z_2^{-1}) - 0{,}25\,.\,(z_2^2 + z_2^{-2}) < 0$$

en l'exprimant à l'aide de la variable réelle x :

$$H_2(x) = -3/4 - 5/4\,.\,x - x^2$$

il faut donc que $H_2(x)$ n'ait aucune racine réelle pour $|x| < 1$ et que $H_2(0) < 0$ ce qui est facilement vérifiable.

2. Calcul de $E_1(z_1, z_2)$:
Nous avons :

$$CN = CD(*,2)\circ CN(*,1) - CN(*,2)\circ CD(*,1)$$

les nouvelles valeurs que prennent les matrices CN et CD sont :

$$CD = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/4 & 5/8 \\ 1/2 & 5/4 \\ 1/4 & 5/8 \\ 1/8 & 1/4 \end{bmatrix} \quad CN = CD^T = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 5/8 & 1/4 \\ 5/4 & 1/2 \\ 5/8 & 1/4 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Vérifions que $K_1'(Z_2)\,.\,K_1'(Z_2)^* < 0$c'est-à-dire :

$$CD(*,0)\circ CD(*,0)^* - CD(*,1)\circ CD(*,1)^* < 0$$

$$(1/4, 1/2, 1/4, 1/8)\circ(1/4, 1/2, 1/4, 1/8)^* - (1/4, 5/8, 5/4, 5/8, 1/4)\circ(1/4, 5/8, 5/4, 5/8, 1/4)^* < 0\,.$$

En utilisant la même démarche que précédemment, nous avons :

$$R_1(z_2) = -133/64 - 51/32\,.\,(z_2 + z_2^{-1}) - 57/64 \times (z_2^2 + z_2^{-2}) - 9/32\,.\,(z_2^3 + z_2^{-3}) - 1/16\,.\,(z_2^4 + z_2^{-4}) < 0$$

en utilisant la variable réelle x, il vient :

$$H_1(x) = -27/64 - 3/2\,.\,x - 41/16\,.\,x^2 - 9/4\,.\,x^3 - x^4\,.$$

Le même polynôme a été obtenu dans [1] où il a été montré qu'il n'existe aucune racine réelle pour $|x| < 1$. Donc le filtre est stable.

6.2. DEUXIÈME EXEMPLE

Soit le filtre d'ordre 3 tiré de [14, p. 14, table II]. Cet exemple permet de montrer la plus grande simplicité de l'algorithme. Les principales étapes en sont :

— Étape a) de l'algorithme

$$CD = \begin{bmatrix} 0{,}9307\,e-01 & -0{,}8680\,e-01 & 0{,}9305\,e-01 & -0{,}1909\,e+00 \\ -0{,}1148\,e+00 & 0{,}2291\,e+00 & -0{,}1978\,e+00 & 0{,}3762\,e+00 \\ 0{,}8130\,e-01 & -0{,}1284\,e+00 & 0{,}1067\,e+00 & -0{,}2458\,e+00 \\ -0{,}1877\,e+00 & 0{,}5311\,e+00 & -0{,}5056\,e+00 & 0{,}1000\,e+01 \end{bmatrix} \text{ et } CN = CD^T.$$

— Étape b) de l'algorithme

$$d_3^3(z_2) = -0{,}1909 + 0{,}3762\,z_2 - 0{,}2458\,z_2^2 + z_2^3 \qquad |z_2|_{1,2,3} < 1$$

a toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité.

— Étape c) de l'algorithme

1. Vérification de la condition sur $K_3'(z_2)$:

Le polynôme $H_3(x)$ ne doit posséder aucune racine réelle pour $|x| < 1$, avec :

$$H_3(x) = -0{,}3866 - 0{,}2913\,x - 1{,}5764\,x^2 + 1{,}3882\,x^3 \quad \text{(condition vérifiée)}\,.$$

2. Le calcul de CN et CD donne au pas suivant :

$$CN = \begin{bmatrix} -0{,}1735\,e+00 & 0{,}8027\,e-01 & -0{,}8397\,e-01 \\ 0{,}3940\,e+00 & -0{,}1605\,e+00 & 0{,}1796\,e+00 \\ -0{,}3749\,e+00 & 0{,}1495\,e+00 & -0{,}1758\,e+00 \\ 0{,}1174\,e+01 & -0{,}4797\,e+00 & 0{,}5305\,e+00 \\ -0{,}3749\,e+00 & 0{,}1111\,e+00 & -0{,}1456\,e+00 \\ 0{,}3940\,e+00 & -0{,}1477\,e+00 & 0{,}1825\,e+00 \\ -0{,}1735\,e+00 & -0{,}4362\,e-01 & -0{,}3974\,e-01 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad CD = CN^T.$$

3. Vérification de la condition sur $K_2'(z_2)$:

La condition se vérifie sur le polynôme $H_2(x)$:

$$H_2(x) = -0{,}1209 - 0{,}2087\,x - 1{,}0624\,x^2 + 0{,}0625\,x^3 - 1{,}1644\,x^4 + 3{,}6576\,x^5 - 1{,}7135\,x^6\,.$$

4. *CD* et *CN* valent au pas suivant :

$$\mathrm{CN} = \begin{bmatrix} 0,2677\,e-01 & 0,1026\,e-01 \\ -0,1143\,e+00 & 0,3924\,e-01 \\ 0,2334\,e+00 & -0,7576\,e-01 \\ -0,5793\,e+00 & 0,1872\,e+00 \\ 0,9583\,e+00 & -0,2800\,e+00 \\ -0,1062\,e+01 & 0,3036\,e+00 \\ 0,1624\,e+01 & -0,4428\,e+00 \\ -0,1062\,e+01 & 0,2517\,e+00 \\ 0,9583\,e+00 & -0,2335\,e+00 \\ -0,5793\,e+00 & 0,1213\,e+00 \\ 0,2334\,e+00 & -0,4693\,e-01 \\ -0,1143\,e+00 & 0,2179\,e-01 \\ 0,2677\,e-01 & -0,4379\,e-02 \end{bmatrix} \quad \text{et } \mathrm{CD} = \mathrm{CN}^{\mathrm{T}}.$$

La condition sur $K_1'(z_2)$ porte sur :

$$\begin{aligned} H_1(x) = &-0,0132 - 0,0457\,x - 0,2726\,x^2 - 0,3906\,x^3 - \\ &- 1,2643\,x^4 + 0,4750\,x^5 - 1,2550\,x^6 \\ &+ 6,6213\,x^7 - 5,0035\,x^8 + 8,1141\,x^9 \\ &- 16,2116\,x^{10} + 11,7240\,x^{11} - 2,7518\,x^{12}. \end{aligned}$$

Ce qui, tous calculs faits, conduit à la stabilité du filtre.

7. Conclusion

Dans cet article nous avons proposé un algorithme permettant de tester simplement la stabilité de filtres numériques à deux dimensions. Les deux conditions de Huang ont été vérifiées à partir du critère de Bistritz et du théorème de Shentov, Mitra et Anderson. L'algorithme proposé a l'avantage d'être conceptuellement simple et surtout de mise en œuvre facile et cela pour un ordre de filtre quelconque.

Manuscrit reçu le 25 avril 1990, version révisée le 25 février 1991.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. A. Maria and M. M. Fahmi, *On the Stability of Two Dimensional Digital filters.* IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU20, pp. 470-472, October 1973.

[2] J. L. Shanks, S. Treitel and J. H. Justice, *Stability and Synthesis of Two Dimensional Recursive Filters.* IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU20, pp. 115-128, June 1972.

[3] T. S. Huang, *Stability of Two Dimensional Recursive Filters.* IEEE Trans. Audio. Electroacoust., Vol. AU20, pp. 158-163, June 1972.

[4] H. G. Ansell, *On certain Two-variable Generalisation of Circuit Theory with Applications to Networks of Transmission Lines and Lumped Reactances.* IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-11, pp. 214-223, June 1964.

[5] B. D. O. Anderson and E. I. Jury, *Stability Test for Two Dimensional Recursive Filters.* IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU21, N° 4, August 1973.

[6] O. Shentov, S. K. Mitra and B. D. O. Anderson, *A Simple Circuit-Theoretical Approach for Stability of 2D Digital Filters.* ICASSP 88, pp. 852-855, April 1988.

[7] Y. Bistritz, *Zero Location with Respect to the Unit Circle of Discrete-Time Linear System Polynomial.* Proceedings of IEEE, Vol. 72, N° 9, pp. 1131-1142, September 1984.

[8] M. Queysanne, Algèbre, Collection U, 1969.

[9] M. F. Bel Bachir et J. Caelen, *Optimisation de Filtres Récursifs à Phase Linéaire,* Revue Traitement du Signal, pp. 151-158, N° 5, décembre 1988.

[10] E. I. Jury, Theory and Application of the Z-Transform Method, New York, Wiley, 1964.

[11] L. R. Rabiner and B. Gold, Theory and Application of Digital Signal Processing, Englewood cliffs, NJ, Prentice Hall, 1975.

[12] D. Goodman, *Some Stability Properties of Two-Dimensional Linear Shift-Invariant Filters.* IEEE Trans., CAS, Vol. 24, N° 4, pp. 201-208, 1977.

[13] M. F. Bel Bachir et J. Caelen, *Two Dimensional Recursive Digital Filter Design.* V^e European Signal Processing Conf. EUSIPCO 90, pp. 681-684, 18-21 September 1990.

[14] A. T. Chottera and G. A. Julien, *Design of Two-Dimensional Recursive Digital Filters Using Linear Programming.* IEEE Trans. CAS, Vol. 29, N° 12, December 1982.

[15] Ju-Hong and Yih-Min Chen I, *A New Method for the Design of Two-Dimensional Recursive Digital Filters.* IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal, Proc., Vol. 36, N° 4, April 1988.