

## Restauration d'image bruitée par analyse multirésolution et champs de Markov

---

### *Noisy Image Restoration Using Markov Random Field in a Multiresolution Scheme*

---



#### L. Blanc-Féraud,

13S URA 1376 du CNRS  
Université de Nice-Sophia Antipolis  
Bât. 4 SPI, 250 Avenue A. Einstein  
06560 Valbonne (France)  
et GDR 134 Traitement du Signal et  
Image du CNRS

Laure Blanc-Féraud a obtenu sa thèse concernant la modélisation et la restauration d'images floues en juillet 1989. De 89 à 90 elle travaille dans l'industrie sur des images d'acoustique sous-marine, puis elle intègre le CNRS au laboratoire 13S. Ses recherches actuelles concernent l'analyse d'image multirésolution et la modélisation markovienne pour la restauration d'image, la reconstruction tomographique et l'estimation de mouvement dans une séquence d'images.



#### M. Barlaud

13S URA 1376 du CNRS  
Université de Nice-Sophia Antipolis  
Bât. 4 SPI, 250 Avenue A. Einstein  
06560 Valbonne (France)  
et GDR 134 Traitement du Signal et  
Image du CNRS

Michel Barlaud est Professeur à l'Université de Nice-Sophia Antipolis où il enseigne l'automatique et le traitement du signal. Ses domaines de recherche théorique sont les ondelettes pour le traitement d'image, la quantification vectorielle, les problèmes inverses avec une approche modèle Markovien et algorithme de relaxation déterministe. Les principales applications sont la compression numérique des images, la reconstruction tomographique en imagerie médicale et l'estimation de mouvement.

---

### RÉSUMÉ

La modélisation de l'image et de ses discontinuités par champ markovien a pour objectif dans la restauration d'image de préserver les contours. Dans cet article l'image est d'abord décomposée à différents niveaux de résolutions par transformée en ondelettes. Un champ markovien est défini pour chaque résolution et l'image est restaurée itérativement en fonction des résolutions croissantes. Cet algorithme est analysé comparativement à

*multiresolution algorithms provide better results with less computation time.*

#### **KEY WORDS**

*Markov random field, line processus, image restoration, multiresolution analysis, deterministic relaxation.*

---

### SUMMARY

*The restoration methods involving Markov random fields with line process for the discontinuities are known to give good results in edge preserving image restoration. The Markov model is developed on the image decomposed at several resolutions using a wavelet transform. A deterministic relaxation algorithm (GNC) performs the minimization of the non convex criterion. Several multiresolution algorithms are developed and results are compared with those in monoresolution. These*

un algorithme monorésolution et montre son efficacité en terme de réduction de temps de calcul et qualité de l'image restaurée.

#### **MOTS CLÉS**

Champ de Markov, processus de lignes, restauration d'image, analyse multirésolution, relaxation déterministe.

## Introduction

D'une manière générale, les images numériques (images satellites, médicales...) sont bruitées lors de leur acquisition. Les traitements de restauration sont souvent indispensables pour pouvoir améliorer la qualité de ces images numériques, et pouvoir les exploiter ultérieurement. Nous nous intéressons dans cet article au problème de la suppression de bruit sur une image dégradée par un bruit blanc additif. Ce problème fait partie du cas général des « problèmes mal posés [13] ». Le but est de lisser l'image, tout en préservant ses contours. La modélisation de l'image par champ de Markov et processus de ligne pour les discontinuités introduite par Geman et Geman [1] est bien connue pour être performante en restauration et segmentation d'image [11], [12]. Cependant, les problèmes mathématiques posés (minimisation de fonctions non convexes, nombre de variables important), impliquent un temps de calcul important pour la recherche de la solution optimale (méthode de relaxation du type recuit simulé [1]). Les méthodes déterministes permettent dans certains cas, d'approcher la solution optimale et sont plus rapides (MFA [5], ICM [6], GNC [2]). Cependant, leur temps de calcul reste important pour des images  $256 \times 256$  pixels.

Le but de cet article est de présenter une méthode de restauration utilisant une analyse multirésolution de l'image et une modélisation markovienne. L'hypothèse de Markov est alors faite pour toutes les images aux différents niveaux de résolution, au même titre qu'elle est faite usuellement à la résolution la plus fine (image numérique d'origine). Il n'y a pas de liens précis entre l'hypothèse de Markov à une résolution donnée et cette hypothèse à une résolution inférieure. Des résultats ont au contraire été obtenus concernant la perte de markovianité lors du passage d'une résolution à une résolution inférieure [16].

D'un point de vue déterministe, nous avons étudié la décomposition d'un opérateur de type gradient à une résolution inférieure : on obtient un opérateur qui n'est plus une simple dérivation et qui dépend bien sûr des filtres utilisés pour la décomposition. De plus, cet opérateur agit sur les deux sous-images (basses fréquences et coefficients hautes fréquences à la fois). Ceci fait l'objet de travaux basés sur les résultats obtenus par Beylkin [17] et dont les premiers résultats ont été publiés récemment [18].

L'article proposé ici présente un algorithme multirésolution performant pour la restauration d'image bruitée, et est le point de départ de recherches sur d'autres modélisation multirésolution mieux adaptées.

Nous exploitons deux propriétés de la multirésolution :

— d'une part les techniques multirésolution permettent d'accélérer significativement la convergence des algorithmes de traitement d'image [7] ;

— d'autre part elles permettent une meilleure adaptation des traitements en fonction de la résolution et donc d'améliorer significativement la qualité de la restauration.

La méthode de relaxation utilisée pour la minimisation du critère non convexe est la méthode déterministe introduite par Blake et Zisserman [2], appelée Graduated Non Convexity (GNC). Dans le cadre d'une modélisation

markovienne donnée (en particulier absence d'interaction sur les processus de ligne), cette méthode permet d'approcher le minimum global du critère non convexe de manière satisfaisante et ce en un temps restreint.

Les différents points sont développés dans l'ordre suivant :

Nous présentons en partie I de cet article la modélisation par champ de Markov, l'estimation de l'image restaurée par le critère du maximum a posteriori (MAP), et la méthode de relaxation mise en œuvre (« Graduated Non-Convexity » : GNC) pour cette estimation.

Dans une deuxième partie nous rappelons comment décomposer une image à différents niveaux de résolution par transformée en ondelettes biorthogonales. Nous évaluons la loi de croissance du rapport signal sur bruit (SNR) de l'image bruitée décomposée à des résolutions de plus en plus grossières, et introduisons une modélisation markovienne de l'image aux différentes résolutions.

Dans une troisième partie nous exploitons les résultats présentés en partie II, et présentons un algorithme de restauration multirésolution. Une modification du modèle des contours de l'image nous permet d'améliorer les résultats de la restauration multirésolution. Enfin un schéma différent de restauration multirésolution est présenté, mettant en œuvre un traitement sur les coefficients en ondelettes. Des résultats sont présentés pour ces algorithmes sur l'image du Cameraman bruitée à + 4,4 dB.

## 1. Restauration par champ de Markov en monorésolution

### 1.1. MODÉLISATION MARKOVIENNE

Une image numérique est modélisée par un processus aléatoire bidimensionnel  $X$ , prenant ses valeurs sur un réseau 2D fini  $G = \{s = (ij) / 1 \leq i, j \leq M\}$ . Les valeurs prises par  $X_s$  en chaque site  $s = (i, j)$  représente les niveaux de gris de l'image. L'image bruitée  $Y$  est modélisée par  $Y = X + N$  où  $N$  est un bruit blanc gaussien indépendant de  $X$ . On suppose que le champ intensité  $X$  a la propriété de Markov, soit :

$$(1.1) \quad P(X_s = x_s / X_{s'} = x_{s'}, s' \in G - \{s\}) = P(X_s = x_s / X_{s'} = x_{s'}, s' \in V_s).$$

Le voisinage  $V_s$  utilisé définit un modèle de Markov à l'ordre un (formé par les quatre plus proches voisins).

Il s'avère intéressant de prendre en compte les discontinuités de l'image afin de ne pas lisser les contours lors de la restauration. Les discontinuités sont modélisées par un processus  $L$  de ligne et de colonne défini sur le réseau  $J = J_m + J_l$  (voir figure 1).  $L$  prend les valeurs  $m_{i,j}$  sur le réseau  $J_m$  et les valeurs  $l_{i,j}$  sur  $J_l$ . Les variables  $m_{i,j}$  et  $l_{i,j}$  sont booléennes. La valeur 0 marque l'absence de discontinuité, la valeur 1 la présence d'une discontinuité. On suppose qu'il n'y a pas d'interaction sur le processus  $L$ . L'image est décrite par les processus  $X$  et  $L$  qui doivent être estimés à partir des observations bruitées. Le couple de

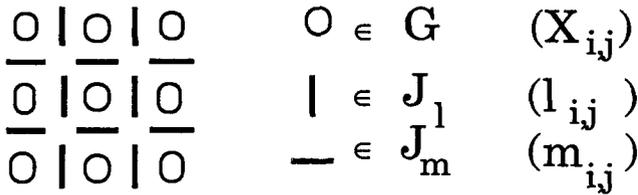


Figure 1. — Treillis G du processus intensité et treillis J des processus de lignes (contours).

processus  $(X, L)$  est estimé au sens du critère du maximum a posteriori (MAP) c'est-à-dire obtenu en maximisant la probabilité conditionnelle aux observations  $Y : P(X, L/Y)$ . En utilisant le théorème de Bayes on a :

$$(1.2) \quad P(X, L/Y) = P(Y/X, L) P(X, L)/P(Y).$$

$P(Y)$  est une constante. Étant donné que le bruit  $N$  est additif, gaussien de variance  $\sigma^2$  et indépendant de  $X$  et de  $L$ , on a :

$$(1.3) \quad P(Y/X, L) = P(Y - X = N/X, L) = P(Y - X = N)$$

soit

$$(1.4) \quad P(Y/X, L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{|Y - X|^2}{2\sigma^2}\right).$$

$(X, L)$  est un champ de Markov. Le théorème de Hammerley-Clifford [3] exprime l'équivalence entre un champ aléatoire dont la densité de probabilité vérifie l'hypothèse markovienne et un champ aléatoire dont la densité de probabilité est une distribution de Gibbs. Ainsi  $P(X, L)$  s'exprime comme une distribution de Gibbs, c'est-à-dire :

$$P(X, L) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E(X, L)}{T}}$$

où  $T$  et  $Z$  sont des constantes (respectivement la température du système et la fonction de « partition ») et  $E$  est la fonction d'énergie du système. Cette énergie est de la forme suivante :

$$(1.5) \quad E(X, L) = \sum_{c=C} V_c(X_c, L_c).$$

C'est l'ensemble des cliques qui correspondent au système de voisinage choisi sur  $J$  et  $G$ .  $V_c(\cdot)$  est un potentiel défini sur la clique  $c$ , qui modélise les contraintes imposées par le modèle sur l'image estimée.

Ce théorème traduit donc l'hypothèse de Markov, définie par une propriété sur les probabilités conditionnelles du champ  $(X, L)$ , par une définition explicite de la distribution de probabilité  $P(X, L)$  en fonction de l'énergie des processus  $X$  et  $L$ .

Ainsi, en prenant le log dans (1.2) et en utilisant (1.3) et (1.4), on montre que maximiser (1.2) (estimateur du MAP), revient à minimiser l'énergie  $E$  suivante :

$$(1.6) \quad E = (1/2\sigma^2) |Y - X|^2 + E(X, L).$$

D'après les interactions définies sur les champs  $X$  et  $L$  et après multiplication par  $2\sigma^2$  cette énergie s'écrit [1] :

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

avec

$$(1.7) \quad \begin{aligned} E_1 &= \sum_{i,j} (y_{i,j} - x_{i,j})^2; \\ E_2 &= \sum_{i,j} \lambda^2 [(x_{i,j} - x_{i-1,j})^2 (1 - \ell_{i,j}) \\ &\quad + (x_{i,j} - x_{i,j-1})^2 (1 - m_{i,j})] \\ E_3 &= \sum_{i,j} \alpha (\ell_{i,j} + m_{i,j}). \end{aligned}$$

Les trois termes de cette énergie peuvent être analysés de la manière suivante :  $E_1$  assure une bonne adéquation de la solution aux données observées,  $E_2$  est un terme de lissage classique ( $\lambda^2 \text{ gradient}^2$ ) mais qui tient compte des discontinuités,  $E_3$  est le coût à payer pour l'introduction d'une discontinuité.

## 1.2. MINIMISATION DU CRITÈRE PAR L'ALGORITHME GNC

Le critère est défini en (1.7). Il doit être minimisé par rapport aux variables  $\{x_{i,j}, \ell_{i,j}, m_{i,j}\}$ . Ce critère est non convexe en fonction de ces variables. Blake et Zisserman [2] ont développé une méthode déterministe de relaxation qui permet d'approcher de manière relativement correcte la solution optimale. C'est l'algorithme GNC (Graduated Non Convexity). L'idée est de construire une approximation convexe  $E^*$  de  $E$  et une suite de fonctions  $E^{(p)}$  variant de  $E^*$  à  $E$  (pour  $p$  variant de 1 à 0). La méthode consiste à minimiser successivement  $E^{(p)}$  de  $E^{(1)} = E^*$  à  $E^{(0)} = E$  (en initialisant la nouvelle minimisation par le dernier optimum calculé). La solution de ce processus approche le minimum global de la fonction  $E$  [2].

La construction de la suite  $E^{(p)}$  est la suivante : en remarquant que  $E_1$  ne dépend pas de  $L$ , on minimise d'abord  $E_2 + E_3$  par rapport à  $\ell_{i,j}$  et  $m_{i,j}$  dans  $(0, 1)$ . Le critère résultant à minimiser par rapport à  $x_{i,j}$  est :

$$(1.8) \quad \sum_{i,j} (y_{i,j} - x_{i,j})^2 + g_{\alpha\lambda}(x_{i,j} - x_{i-1,j}) + g_{\alpha\lambda}(x_{i,j} - x_{i,j+1})$$

où  $g_{\alpha\lambda}$  est définie par :

$$\begin{cases} g_{\alpha\lambda}(t) = \lambda^2 t^2 & \text{si } |t| < \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda} \\ g_{\alpha\lambda}(t) = \alpha & \text{si } |t| \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}. \end{cases}$$

La suite des critères  $E^{(p)}$  pour  $p = 1$  à 0 est simplement construite grâce à une suite de fonctions  $g_{\alpha\lambda}^{(p)}$  remplaçant  $g_{\alpha\lambda}$ , telles que :

$$\begin{cases} g_{\alpha,\lambda}^{(p)}(t) = \lambda^2 t^2 & \text{si } |t| \leq q \\ g_{\alpha,\lambda}^{(p)}(t) = \alpha - (c|t| - r)^2/2 & \text{si } q \leq |t| \leq r \\ g_{\alpha,\lambda}^{(p)}(t) = \alpha & \text{si } r \leq |t| \end{cases}$$

où  $c = \frac{1}{4p}$ ,  $r^2 = \alpha \left( \frac{2}{c} + \frac{1}{\lambda^2} \right)$ ,  $q = \alpha \left( \frac{\alpha}{\lambda^2 r} \right)$

$g_{\alpha\lambda}^{(1)}$  est telle que le Hessien de  $E^{(1)}$  est positif, c'est-à-dire que  $E^{(1)}$  est l'approximation convexe de  $E$  ( $E^{(1)} = E^*$ ), et lorsque  $p$  tend vers 0,  $g_{\alpha\lambda}^{(p)}$  tend vers  $g_{\alpha\lambda}$  donc  $E^{(p)}$  tend vers  $E$ . En pratique  $p$  tend vers zéro par pas tels que  $p \leftarrow p/2$ . La valeur finale de  $p$  est notée  $p_f$ . En pratique  $p_f = 1/16$  suffit.

Ces fonctions sont tracées en figure 2.

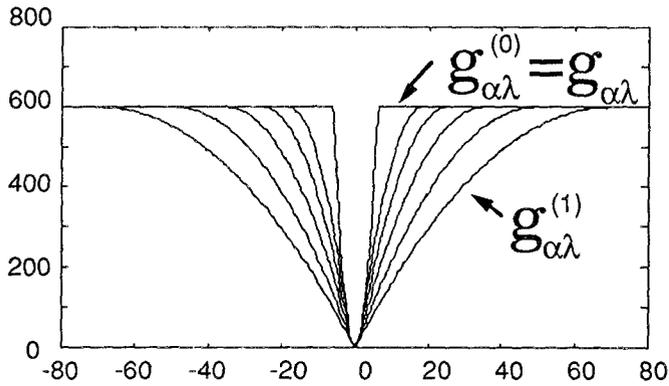


Figure 2. — Fonctions  $g_{\alpha\lambda}^{(p)}$  pour  $\lambda = 4$ ,  $\alpha = 675$ ,

$$p = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \quad \text{et} \quad h = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda}} = 18,4.$$

Les paramètres  $\lambda$  et  $\alpha$  apparaissent explicitement dans le critère (1.7). Les deux paramètres que l'on règle sont  $\lambda$  et  $h$ .

$\lambda$  est le paramètre de lissage. Le paramètre  $h = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda}}$  est



Image 1. — Cameraman 256 x 256 pixels codés sur 8 bits.

le seuil sur le gradient entre deux pixels voisins à partir duquel un contour isolé est introduit [2]. Un contour est isolé s'il n'y a pas d'autres contours à une distance  $\lambda$  de celui-ci.

Nous présentons ici des résultats de cet algorithme sur l'image du Cameraman (image 1). C'est une image codée sur 8 bits soit 256 niveaux de gris et de dimension 256 x 256 pixels. L'image bruitée est obtenue par addition d'un bruit blanc. Le rapport des variances de l'image d'origine sur celle du bruit est égal à  $SNR_{\text{variance}} = 4,4$  dB et correspond à un rapport d'énergies de  $SNR_{\text{énergie}} = 10$  dB. L'image bruitée est présentée en image 2.



Image 2. — Cameraman bruité.  $SNR_{\text{variance}} = 4,4$  dB.

Les images 3 a et 3 b sont le résultat de la restauration monorésolution par l'algorithme GNC avec deux jeux de paramètres différents. Les paramètres de tous les résultats sont présentés en table 1.

Il est impossible d'obtenir une image restaurée ayant moins de bruit que l'image restaurée 3 a, tout en conservant visibles certains éléments de l'image, comme la tour blanche à droite du cameraman. En changeant les valeurs des paramètres du modèle, il est possible d'avoir une image ayant moins de bruit, mais les contours de la tour disparaissent (image 3 b).

On prendra le temps de calcul de cette restauration monorésolution (résultat de l'image 3 a) comme référence  $T_{\text{réf}}$  pour comparer la complexité des différentes méthodes proposées.

Avant d'introduire d'autres modélisations et algorithmes, on fait remarquer ici que la prise en compte des discontinuités en traitement d'image est très importante. On présente à titre de comparaison un résultat de restauration de l'image bruitée avec une régularisation par l'opérateur classique du



a)



b)

Images 3 a et 3 b. — Images restaurées par l'algorithme GNC en monorésolution avec deux jeux de paramètres différents : le facteur de lissage  $\lambda$  est supérieur en 3 b (cf. table 1)  $T_{ref}$  est le temps CPU de calcul de l'image 3 a.

Table 1. — Table des images et paramètres utilisés.

Images	Méthodes et paramètres
1	Cameraman 256 × 256 codé sur 8 bits
2	Cameraman bruité SNR <sub>var</sub> = 4,4 dB
3 a	GNC $m = 0$ $\lambda = 4$ $h = 45$ $p_f = 1/16$
3 b	GNC $m = 0$ $\lambda = 6$ $h = 45$ $p_f = 1/16$
4 a	Régularisation : <b>Laplacien</b> $m = 0$ paramètre de régularisation = 14
4 b	Régularisation : <b>Modèle AR 2 D non causal</b> $m = 0$ Support du modèle = 3 × 3 paramètre de régularisation = $\sigma_n/\sigma_e \approx 18$
5 a	GNC $m = 2$ $\lambda = 4$ $h = 10$ $p_f = 1/16$ $m = 1$ $\lambda = 4$ $h = 18$ $p_f = 1/16$
5 b	GNC $m = 2$ $\lambda = 2$ $h = 22$ $p_f = 1/16$ $m = 1$ $\lambda = 2$ $h = 44$ $p_f = 1/16$
6 a	GNC $m = 2$ $\lambda = 2$ $h = 22$ $p_f = 1$ $m = 1$ $\lambda = 2$ $h = 44$ $p_f = 1$
6 b	GNC $m = 2$ $\lambda = 2$ $h = 22$ $p_f = 1$ $m = 1$ $\lambda = 2$ $h = 44$ $p_f = 1$ $m = 0$ $\lambda = 4$ $h = 45$ $p_f = 1$
7	GNC $m = 2$ $\lambda = 4$ $h = 10$ $p_f = 1/16$ $m = 1$ $\lambda = 4$ $h = 18$ $p_f = 1/16$ GNC sur les <b>coefficients</b> à $m = 1$ $m = 1$ $\lambda = 1$ $h = 60$ $p_f = 1/16$

Laplacien (image 4 a). Une restauration avec modélisation de l'image par un modèle autorégressif non causal de



Image 4 a. — Image restaurée avec régularisation par un Laplacien.

support 3 × 3 est aussi présentée en image 4 b. Les paramètres de régularisation sont optimaux dans le sens où le SNR sur l'image restaurée est expérimentalement maximisé. Il apparaît sur ces deux résultats que les images



Image 4 b. — Image restaurée avec régularisation par un modèle AR causal à l'ordre 1.

restent très bruitées. En augmentant arbitrairement la valeur les paramètres de régularisation, les images deviennent plus lisses mais en même temps beaucoup plus floues.

## 2. Analyse multirésolution

### 2.1. DÉCOMPOSITION EN ONDELETTES BIORTHOGONALES

Les techniques multirésolutions ont aujourd'hui montré leur efficacité aussi bien d'un point de vue diminution du temps de calcul que du point de vue de l'amélioration de la qualité des résultats [7].

Nous calculons l'image aux différentes résolutions par transformée en ondelettes. Le signal image étant généralement continu, excepté aux contours, il semble approprié d'utiliser un schéma de décomposition en sous-bandes de l'image qui corresponde à une base orthogonale engendrée par une ondelette suffisamment régulière. De plus, les filtres doivent être courts pour un calcul rapide, et symétriques. Ces conditions étant contradictoires [8], nous utilisons des bases d'ondelettes biorthogonales, qui permettent de conserver la propriété de symétrie, importante en traitement d'image, en relaxant la contrainte d'orthogonalité [8]. Ces bases ont été largement utilisées pour le codage d'image [4].

La transformée en ondelettes biorthogonales est d'abord présentée en une dimension. Pour la transformée en ondelette biorthogonale, deux familles d'ondelettes  $\psi_{m,n}$  et  $\tilde{\psi}_{m,n}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$  sont utilisées. Ces familles de fonctions

sont générées par dilatations et translations de deux fonctions différentes  $\psi$  et  $\tilde{\psi}$ , dites ondelettes mères :

$$(2.1) \quad \psi_{m,n}(x) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}x - n).$$

$m$  est l'indice de résolution, et  $n$  l'indice de décalage. La même formule est utilisée pour  $\tilde{\psi}_{m,n}$ .

Le principe de cette transformée est de représenter une fonction  $f$  quelconque de  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  comme une superposition d'ondelettes  $\tilde{\psi}_{m,n}$  :

$$(2.2) \quad f = \sum c_{m,n}(f) \tilde{\psi}_{m,n}.$$

Les coefficients d'ondelettes  $c_{m,n}(f)$  sont calculés par produit scalaire de  $f$  avec les fonctions  $\psi_{m,n}$  :

$$(2.3) \quad c_{m,n}(f) = \langle \psi_{m,n}, f \rangle = \int \psi_{m,n}(x) f(x) dx.$$

D'après (2.2) et (2.3), on dit que  $\psi_{m,n}$  et  $\tilde{\psi}_{m,n}$  sont deux bases duales de  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ .

Pour introduire la notion de multirésolution [9], on définit des fonctions d'échelle  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$ , et des familles  $\phi_{m,n}$  et  $\tilde{\phi}_{m,n}$  telles que :

$$(2.4) \quad \phi_{m,n}(x) = 2^{-m/2} \phi(2^{-m}x - n).$$

De même pour les  $\tilde{\phi}_{m,n}$ .

Soit  $V_m$  l'espace fermé engendré par la famille de fonctions  $\tilde{\phi}_{m,n}$  pour  $m$  fixé :

$$V_m = \overline{\text{span} \{ \tilde{\phi}_{m,n}, n \in \mathbb{Z}, m \text{ fixé} \}}.$$

La projection de  $f$  sur l'espace  $V_m$  donne une approximation de  $f$  à la résolution  $2^{-m}$  (ou indice  $m$ ). Elle est calculée par :

$$(2.5) \quad \text{Proj}(f/V_m) = \sum_n \langle \phi_{m,n}, f \rangle \tilde{\phi}_{m,n}.$$

Les fonctions  $\phi$ ,  $\tilde{\phi}$ ,  $\psi$  et  $\tilde{\psi}$  sont choisies telles que les coefficients en ondelettes  $c_{m,n}$  décrivent l'information perdue entre le signal à la résolution  $2^{-m}$  et le signal à la résolution  $2^{-m+1}$  :

$$\text{Proj}(f/V_{m-1}) = \text{Proj}(f/V_m) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n}(f) \tilde{\psi}_{m,n}.$$

### 2.2. MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE

Sur les signaux échantillonnés, ces projections sont calculées par filtrage. Nous disposons de deux paires de filtres :  $(h, g)$  pour la décomposition et  $(\tilde{h}, \tilde{g})$  pour la reconstruction.  $h$  et  $\tilde{h}$  sont les deux filtres passe-bas associés aux fonctions  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$ ,  $g$  et  $\tilde{g}$  sont les filtres passe-haut associés aux fonctions  $\psi$  et  $\tilde{\psi}$ . Le lien entre la fonction  $\phi$  et le filtre  $h$  est donné, par exemple dans l'espace de Fourier, par :

$$\phi(2w) = H(w) \cdot \phi(w) = \prod_{n=0}^{\infty} H\left(\frac{w}{2^n}\right).$$

De même pour  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{h}$ . Les liens avec les fonctions  $\psi$  et  $\tilde{\psi}$  et les filtres  $g$  et  $\tilde{g}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}\psi(2w) &= \tilde{G}(w + \pi) \cdot e^{-iw} \phi(w) \\ \tilde{\psi}(2w) &= G(w + \pi) \cdot e^{-iw} \tilde{\phi}(w).\end{aligned}$$

Les différentes conditions que doivent vérifier les filtres sont explicitées dans [4, 8].

Le schéma de décomposition/reconstruction par banc de filtres associés aux ondelettes biorthogonales est donné figure 3 (voir [4] pour plus de détails).

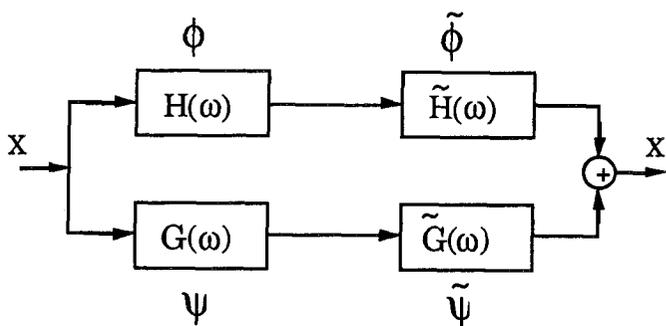


Figure 3. — Schéma de décomposition/reconstruction par banc de filtres dans le cas biorthogonal. Ondelettes et fonctions d'échelle associées.

Les filtres que nous utilisons correspondent à une variation des filtres splines [4, 8]. Ces filtres offrent un bon compromis entre les différentes propriétés sur les ondelettes pour l'analyse d'image (régularité, nombre de moments nuls, symétrie, support compact, ...). De plus l'ondelette utilisée à la décomposition est semblable à l'ondelette de reconstruction, ce qui signifie que ces bases sont proches de bases orthogonales de  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  [4] (Fig. 4).

L'extension de la transformée 1 D au cas 2 D peut se faire suivant deux schémas. Le premier schéma « dyadique » [4] correspond à des fonctions d'échelle séparables  $\phi(x, y) = \varphi(x) \varphi(y)$ . Ceci conduit à une décomposition de facteur d'échelle 2 et privilégie les orientations horizontales et verticales. En figure 5 on présente l'image classique Léna (256 x 256) décomposée suivant une pyramide dyadique jusqu'à la résolution indice 2.

Le second schéma pyramide en quinconce correspond à des fonctions d'échelle non séparables définies par :

$$\phi_{m,n}(x, y) = 2^{-m} \phi(L^{2^m}(x, y) - (n_x, n_y))$$

avec  $L(x, y) = (x + y, x - y)$ .

L'image est alors décomposée avec un facteur d'échelle égal à  $\sqrt{2}$ , et aucune direction n'est privilégiée (Fig. 6).

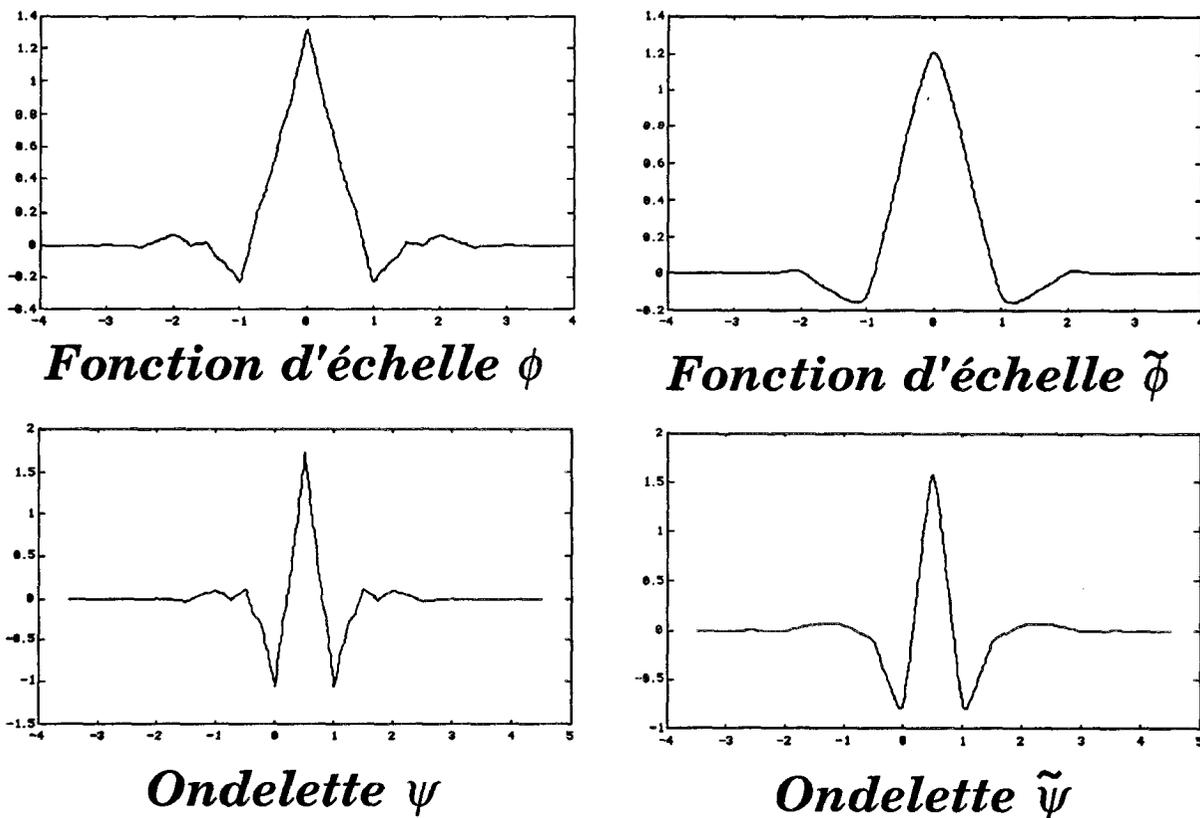


Figure 4. — Fonctions d'échelle et ondelettes biorthogonales associées à des filtres presque orthogonaux (filtres 9-7).

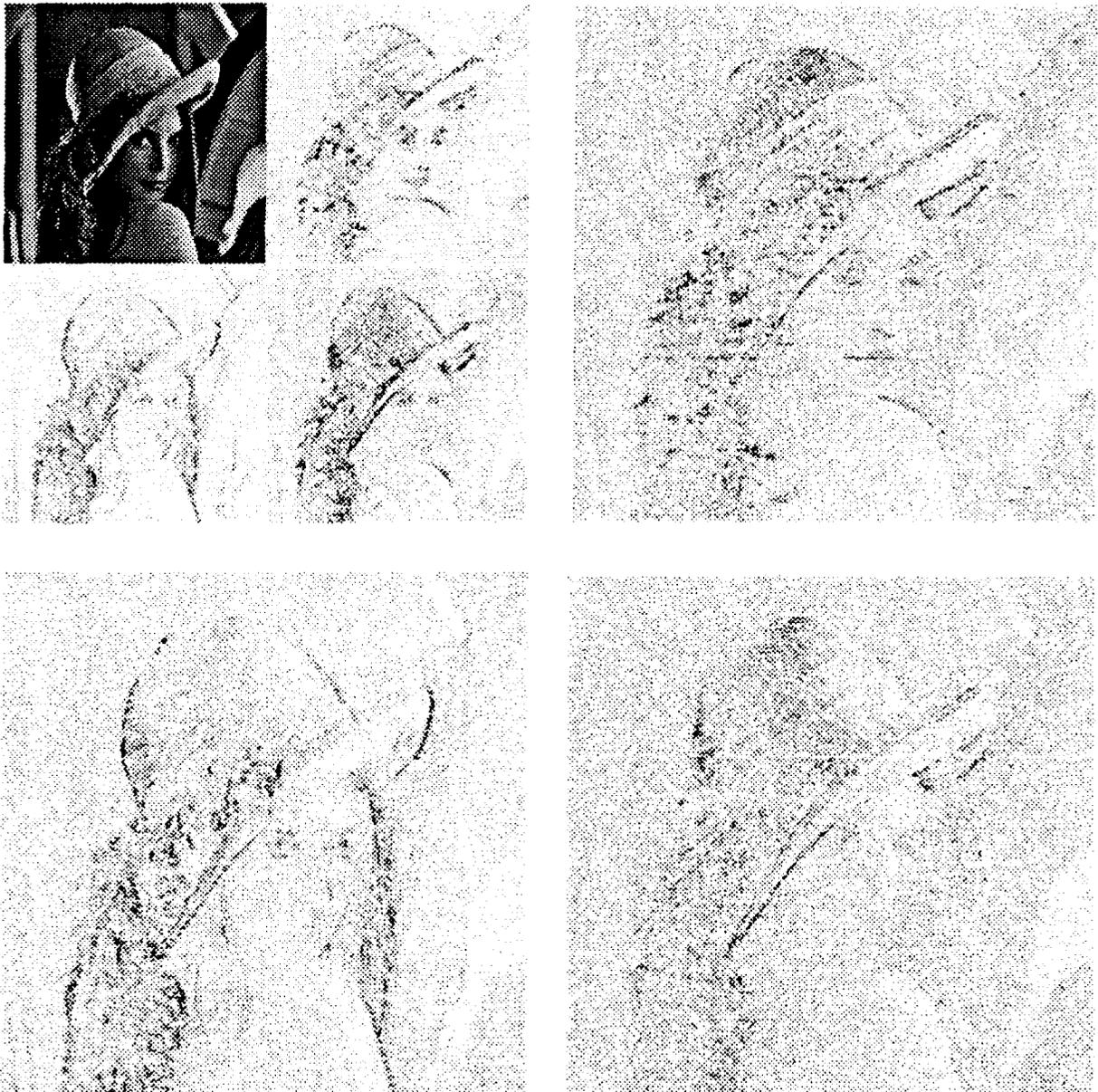


Figure 5. — Image Léna 256 × 256 pixels décomposée suivant une pyramide dyadique jusqu'à la résolution indice 2.

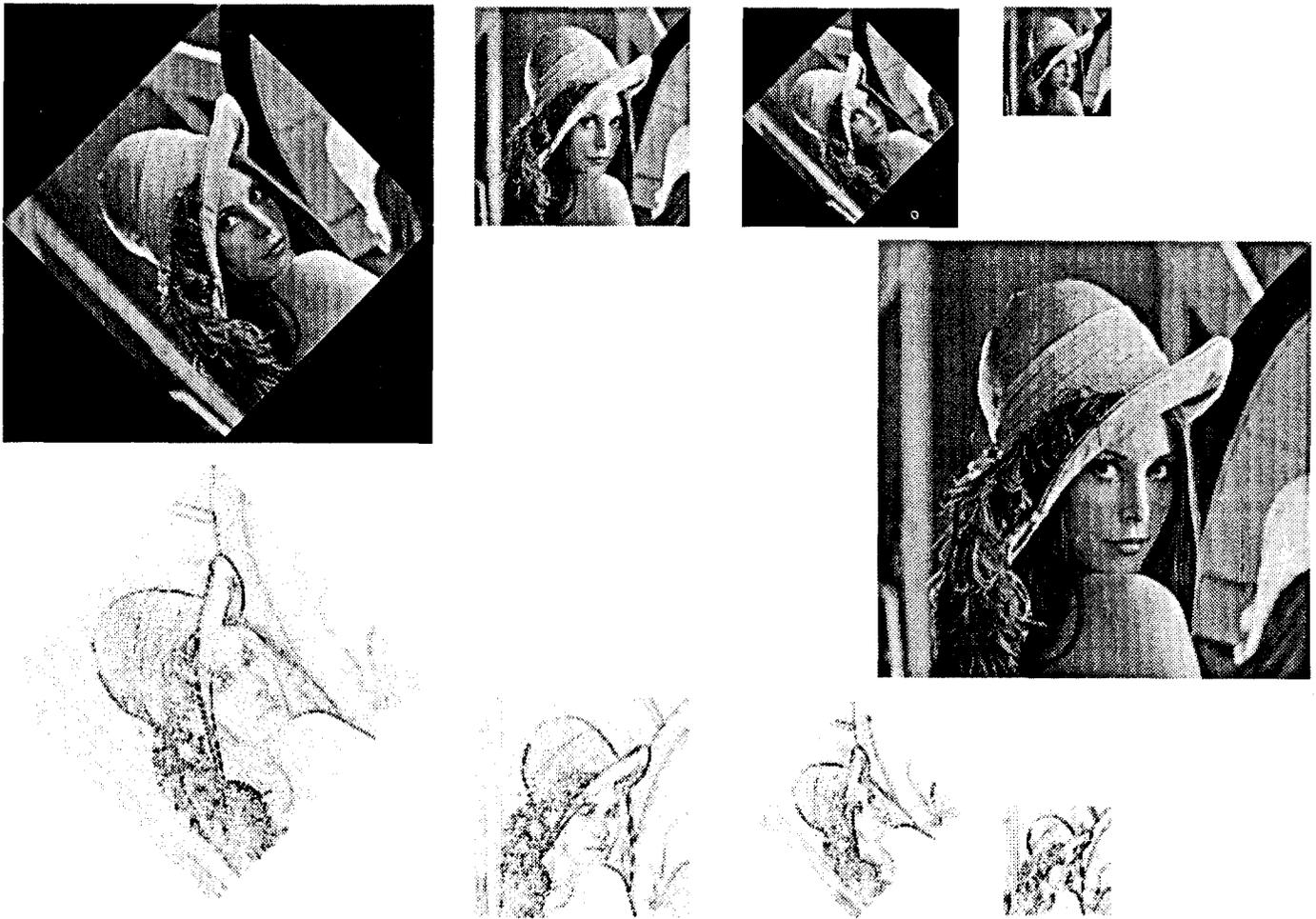


Figure 6. — Image Léna 256 × 256 pixels décomposée suivant une pyramide en quinconce jusqu'à la résolution indice 2.

## 2.3. ANALYSE DU RAPPORT SIGNAL A BRUIT (SNR) EN FONCTION DE LA RÉOLUTION

L'image bruitée a été étudiée après décomposition à différentes résolutions. Le rapport signal sur bruit en énergie ( $SNR_{\text{énergie}}$ ) étudié est défini par le rapport de l'énergie de l'image originale (non bruitée) sur l'énergie de l'image de bruit (erreur entre l'image originale et l'image bruitée). Les images sont considérées à un niveau de résolution donné. La figure 7 représente l'évolution de  $SNR_{\text{énergie}}$  en fonction de la résolution. A la résolution d'origine,  $SNR_{\text{énergie}} = 10$  dB (ce qui équivaut en rapport des variances à  $SNR_{\text{variance}} = 4,4$  dB). On constate sur ce graphique que le  $SNR_{\text{énergie}}$  de l'image à une résolution donnée est inférieur à celui de l'image à la résolution plus grossière : le SNR augmente lorsque la résolution diminue. Cette évolution se justifie par l'étude de la répartition de l'énergie dans les sous-images décomposées, d'une part sur une image type (ex. : Cameraman, Léna...), et d'autre part sur une image de bruit blanc.

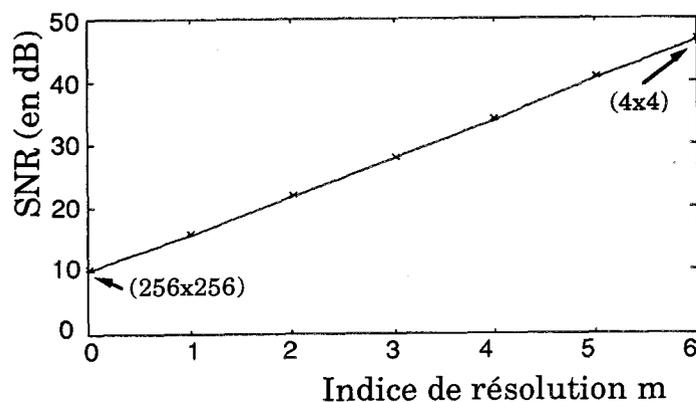


Figure 7. — Évolution du  $SNR_{\text{ener}}$  (rapport des énergies) en fonction de l'indice de résolution de l'image.

Dans le cas dyadique, l'image de résolution  $2^{-m}$  (résolution indice  $m$ ) est décomposée en quatre sous-images : la sous-image de résolution inférieure  $2^{-(m+1)}$ , qui correspond au filtrage passe-bas de la première image, et trois sous-images de hautes fréquences, qui correspondent aux détails perdus entre la résolution  $2^{-m}$  et la résolution  $2^{-(m+1)}$  dans le sens horizontal, vertical, diagonal (voir fig. 5).

Pour une image visible du type Léna ou Cameraman, l'énergie est principalement concentrée dans les sous-images de basses fréquences : à chaque décomposition, l'énergie reste concentrée dans la sous-image de basses fréquences, chaque sous-image de coefficients en ondelettes ne comportant comparativement que très peu d'énergie.

Pour une image de bruit blanc, on constate au contraire une diminution constante de l'énergie dans les sous-images de basses fréquences. Les ondelettes biorthogonales utilisées étant proches d'une base orthogonale, la décomposition sépare le spectre de l'image en 4 zones d'égale énergie. Donc l'énergie dans la sous-image de basses fréquences diminue d'un facteur 4. Ceci est reproduit à chaque niveau de résolution car on vérifie expérimentalement que les

propriétés du bruit blanc sont conservées à chaque niveau de résolution, après filtrage et sous-échantillonnage.

On en déduit que la variation du SNR de l'image bruitée à la résolution  $2^{-m}$  par rapport au SNR de cette image à la résolution d'origine (résolution  $2^0$ ), est de  $+10 \cdot m \cdot \log_{10}(4)$ . L'évolution du  $SNR_{\text{ener}}$  de l'image bruitée en fonction de la résolution représenté figure 7 est donc de pente  $\approx 10 \log_{10}(4) \approx +6$  dB.

Ainsi la restauration est plus simple aux faibles résolutions puisque l'image est moins bruitée. Elle est aussi plus rapide car il y a moins de points que sur l'image d'origine. La connaissance de l'évolution du SNR au travers des résolutions donne des indications pour adapter les paramètres du modèle Markovien aux différentes échelles (cf. § 3.1).

## 3. Restauration multirésolution

### 3.1. L'ALGORITHME MULTIRÉSOLUTION

L'algorithme de restauration multirésolution est le suivant : l'image  $Y$  observée est décomposée jusqu'à une résolution  $2^{-M}$  par une transformée en ondelettes biorthogonales. On note  $Y_m$  les suites de sous-images de basses fréquences et  $C_m^Y$  les suites de sous-images de hautes fréquences ou sous-images de coefficients en ondelettes à chaque résolution  $m$ . Les algorithmes présentés aux paragraphes 3.1 et 3.2 utilisent une pyramide dyadique, celui présenté au paragraphe 3.3 utilise une pyramide en quinconce. Dans un second temps, on effectue les itérations de restauration et reconstruction pour tous les niveaux  $m$  de résolutions, de  $m = M$  à  $m = 0$ . Une itération  $m$  est schématisée en figure 8.

A la première itération, l'image bruitée  $Y_M$  est restaurée par l'algorithme GNC. Notons  $\hat{X}_m$  l'image restaurée au niveau  $m$ .

La nouvelle image observée  $Z_{M-1}$  au niveau  $M-1$  est la synthèse de  $\hat{X}_M$  avec les coefficients en ondelettes bruités du niveau  $M$ , soit  $C_M^Y$ . L'algorithme est ensuite itéré sur  $m = M$  à 0.

On remarque qu'à la première itération (niveau  $M$ ), on a  $Z_M = Y_M$ . Ensuite  $Z_m \neq Y_m$  pour  $0 \leq m \leq M-1$ .

Les résultats que nous présentons concerne une image très bruitée ( $SNR_{\text{variance}} < 5$  dB).

Étant donné le niveau de bruit très important, il apparaît que lors de la dernière synthèse  $\hat{X}_1$  avec  $C_1^Y$ , l'image construite  $Z_0$  est très bruitée bien que les résolutions d'indices  $m$  avec  $M \leq m \leq 1$  aient déjà été restaurées. Cette image est presque aussi difficile à traiter que l'image brute d'origine, et les résultats de restauration mono et multirésolution sont semblables. Le problème est que le SNR de la sous-image de coefficients en ondelettes  $C_1^Y$  est très faible ( $SNR_{\text{énergie}} = -7$  dB). Ainsi à la synthèse de  $\hat{X}_1$  avec  $C_1^Y$ , la partie signal introduite est très faible et le bruit domine largement. En partie 3.2, l'algorithme est itéré jusqu'à la résolution 0 et en partie 3.3 nous présentons

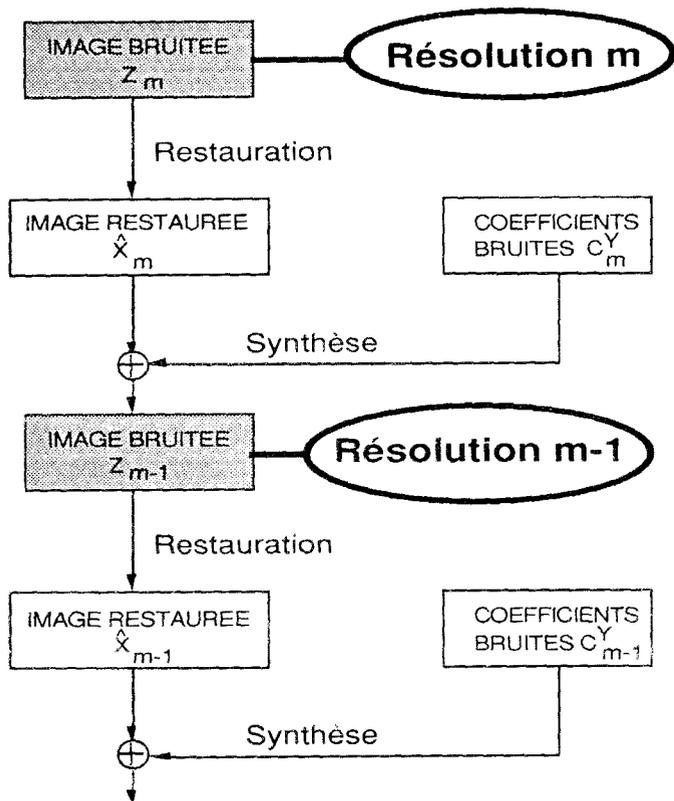


Figure 8. — Schéma d'une itération de l'algorithme de restauration multirésolution.

une méthode pour traiter d'abord la sous-image de coefficients en ondelettes  $C_1^Y$  avant la synthèse avec  $\hat{X}_1$ . Pour ce premier résultat, l'image présentée au niveau 0 est la simple interpolation de  $\hat{X}_1$ , par synthèse avec une image de coefficients nuls ( $C_1 = 0$ ), ceci pour pouvoir comparer plus facilement avec l'image d'origine, l'image bruitée et les autres résultats (images de dimension  $256 \times 256$ ). Les images restaurées par cet algorithme sont présentées image 5 a et 5 b, correspondant à deux jeux de paramètres  $\lambda$  et  $h$  différents. On remarque le flou introduit du fait de l'interpolation, surtout visible au niveau de la caméra.

### Choix des paramètres

Le choix des paramètres est crucial, et permet de pondérer les différents termes du critère défini en 1.7. Cependant, ces paramètres sont fixés de manière empirique actuellement. Quelques considérations permettent d'orienter ce choix : les paramètres doivent être adaptés en fonction de l'image cherchée et du bruit, donc ils sont fonction de la résolution. Ainsi le paramètre  $h$  augmente avec la résolution puisque le SNR de l'image diminue. Le paramètre  $\lambda$  est choisi constant. Le nombre de niveaux de décompositions  $M$  est égal à 2 pour cette application. Le  $SNR_{\text{énergie}}$  de la sous-image bruitée à la résolution d'indice 2 est de 22 dB (cf. fig. 7), ce qui correspond à une image pas trop bruitée, c'est pourquoi  $M$  n'est pas supérieur à 2.

Le temps CPU est diminué d'un facteur 5 par rapport à l'algorithme en monorésolution ( $= T_{ref}/5$ ). Cependant, la



a)



b)

Images 5 a et 5 b. — Images restaurées par l'algorithme GNC sur les résolutions  $m = 2$  et  $m = 1$  avec deux jeux de paramètres différents : le seuil  $h$  d'introduction d'un contour est plus petit en 5 a qu'en 5 b (cf. table 1).

qualité de la restauration reste médiocre. Le seul réglage des paramètres  $\lambda$  et  $h$  ne permet pas de diminuer le bruit sans dégrader certains éléments importants de l'image, comme par exemple la tour blanche à droite du cameraman (image 5 b).

### 3.2. AUTRE MODÈLE DES CONTOURS

La modélisation d'un contour par un processus de ligne booléen  $L$  est mal adaptée à la restauration d'image en multirésolution. En effet, le fait d'utiliser des valeurs booléennes implique que la décision de mettre un contour à un endroit de l'image est tranchée. Or sur des images de basses résolutions il n'est pas utile et peut être dangereux de prendre une telle décision. Une erreur sur une basse résolution peut être catastrophique sur le résultat final. L'algorithme est très sensible aux valeurs des paramètres dont le choix est critique, surtout quand  $m$  est proche de  $M$ . C'est pourquoi nous proposons de modéliser un contour non pas par un champ booléen mais par des variables  $l_{i,j}$  et  $m_{i,j}$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

L'approximation convexe  $E^*$  de  $E$  dans l'algorithme GNC présenté en 1.1, suppose elle-même les variables  $l_{i,j}$  et  $m_{i,j}$  dans  $[0, 1]$ , puis dans la suite des minimisations de  $E^{(p)}$  ( $p$  variant de  $1 \rightarrow 0$ ) l'estimation de  $l_{i,j}$  et  $m_{i,j}$  est affinée pour prendre finalement la valeur 0 ou 1. Nous avons donc uniquement minimisé l'approximation convexe  $E^* = E^{(1)}$ .  $E^*$  devient alors le critère, et la valeur finale de  $p$  est  $p_f = 1$ . Il en résulte que les temps de calcul sont évidemment réduits. De plus, cette modélisation des contours est mieux adaptée et les résultats sont de meilleure qualité. Ceci permet d'appliquer la restauration jusqu'à la résolution  $2^0$  et de restaurer ainsi des détails plus fins.

Ces résultats sont présentés images 6 a et 6 b.

En 6 a, seules les résolutions  $m = 2$  et  $m = 1$  sont traitées (l'image est interpolée en 0). Le temps CPU est de  $T_{réf}/40$ .

En 6 b, la résolution 0 est aussi traitée. Le temps CPU est de  $T_{réf}/7$  avec cette nouvelle modélisation. De plus la qualité de l'image 6 b est meilleure visuellement que les images présentées en 3 a-b et 4 a-b : le bruit est lissé et les contours sont préservés.

### 3.3. RESTAURATION DES COEFFICIENTS D'ONDE-LETTES

Revenons au problème évoqué en partie 3.1, dû au niveau de bruit important de la sous-image de coefficients  $C_1^Y$  (de  $SNR_{\text{énergie}} = -7$  dB). Dans la restauration multirésolution par GNC (Partie 3.1), on perd à la dernière synthèse ( $Z_0 = \hat{X}_1$  synthétisé avec  $C_1^Y$ ), les bénéfices de la restauration de  $\hat{X}_1$ , car l'image  $Z_0$  est presque aussi difficile à traiter que l'image bruitée  $Y_0$  elle-même.

C'est pourquoi nous avons tenté de traiter l'image  $C_1^Y$  pour la synthétiser ensuite avec  $\hat{X}_1$  et donner directement l'image finale restaurée  $\hat{X}_0$ .

Nous utilisons dans cette partie une décomposition en quinconce pour n'avoir qu'une seule image de coefficients  $C_1^Y$ .

Cette sous-image représente l'information haute fréquence, de détails. En pratique, tous les détails sont noyés dans le bruit, seuls quelques contours francs ont une énergie supérieure à celle du bruit. Ce sont ces contours que nous cherchons à restaurer. Pour cela on effectue une restauration avec modélisation par champ de Markov, les processus



a)



b)

Images 6 a et 6 b. — Images restaurées utilisant la fonction de régularisation  $g^{(0)}$ . Le critère minimisé est le critère convexe  $E^{(0)}$ . Les paramètres sont en table 1.

de lignes sauvegardant les contours francs, les autres parties de l'image étant considérées comme homogènes. Notons qu'on ne cherche pas à modéliser une sous-image de coefficients provenant d'une image réelle, mais bien à modéliser les seuls contours importants qui peuvent être extraits de l'image bruitée  $C_1^Y$ .

La restauration s'obtient donc en minimisant le critère (1.7) sur la sous-image de coefficients, par l'algorithme GNC. Les paramètres sont adaptés à cette image de coefficients d'ondelettes : le facteur de lissage  $\lambda$  est choisi égal à un pour que deux discontinuités proches puissent être considérées comme « isolées » selon [2] ; le paramètre  $h$  est égal à 60, car le niveau de bruit est important.

L'image restaurée est l'image 7. Elle est égale à l'image 5 a en  $m = 1$  puis l'image finale est obtenue par synthèse avec l'image des coefficients restaurés à la place de zéro (voir table 1 et fig. 9).

Le temps CPU pour traiter cette image est  $T_{réf}/6,7$ .



Image 7. — Image de résolution 0 restaurée par GNC sur la sous-image de basses fréquences à la résolution 1 et GNC sur la sous-image de coefficients à la résolution 1 (voir les paramètres en table 1).

## Conclusion

Nous avons présenté différents schémas de restauration utilisant des champs de Markov en analyse multirésolution. La multirésolution permet d'améliorer la qualité des résultats et de diminuer les temps de calculs. L'analyse multirésolution est obtenue par décomposition en ondelettes biorthogonales successives, qui fournissent à chaque niveau de résolution des composantes basses et hautes fréquences de l'image. Dans un premier temps, seule la restauration des sous-images de basses fréquences est considérée. Il est ensuite montré qu'un traitement complémentaire de la composante haute fréquence augmente la qualité des résultats.

Un modèle des contours différents du modèle booléen proposé dans [1] a été introduit. Ce modèle donnant des meilleurs résultats, notre objectif est de définir de nouvelles fonctions  $g_{\alpha\lambda}$  mieux adaptées à la modélisation des

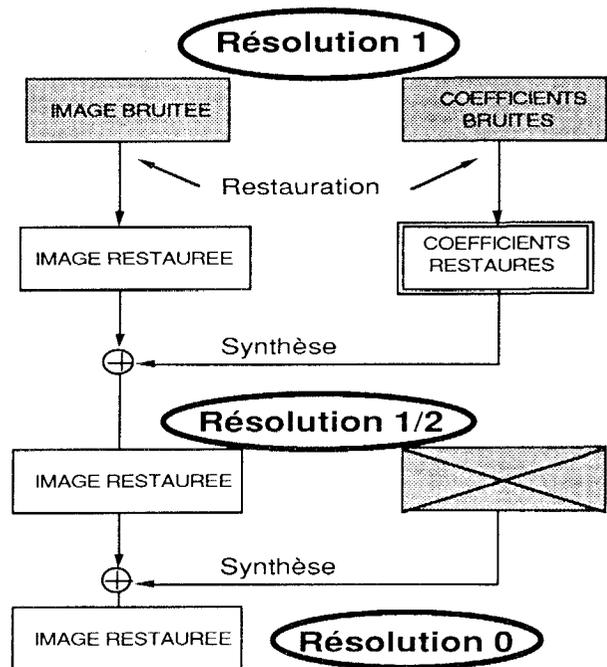


Figure 9. — Schéma de la dernière itération de l'algorithme multirésolution avec traitement de la sous-image de coefficients en ondelettes  $C_1'$ .

contours d'une image en multirésolution, tels que ceux introduits dans [14] par exemple, ainsi qu'un algorithme déterministe de restauration associé [15].

Manuscrit reçu le 18 décembre 1991.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. GEMAN, D. GEMAN, « Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian restoration of Images », *IEEE Trans. on Pattern Analysis, Mach. Intel.*, Vol. PAMI-6, November, 1984, pp. 721-741.
- [2] A. BLAKE, A. ZISSERMAN, « Visual Reconstruction », *MIT Press*, 1987.
- [3] J. BESAG, « Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems », *J. Royal statist. Soc., série B*, vol. 36, 1974, pp. 192-236.
- [4] A. ANTONINI, M. BARLAUD, P. MATHIEU, I. DAUBECHIES, « Image Coding Using Vector Quantization in the Wavelet transform Domain », *IEEE ICASSP 90, Albuquerque, USA*, pp. 2297-2300.
- [5] J. ZERUBIA, R. CHELAPPA, « Mean Field Approximation using compound Gauss-Markov random field for edge detection and image restoration », *IEEE ICASSP 90, Albuquerque, USA*, pp. 2193-2196.
- [6] F.-C. JENG, J. W. WOODS, « Image Estimation by Stochastic Relaxation in the Compound Gaussian Case », *IEEE ICASSP 88*, pp. 1016-1019.
- [7] D. TERZOPOULOS, « Multiresolution algorithms in computational vision », in *IMAGE UNDERSTANDING*, Ablex Publishing Corporation, 1984, pp. 225-263.
- [8] A. COHEN, I. DAUBECHIES, J.-C. FEAUVEAU, « Biorthogonal bases of compactly supported Wavelets », *AT&T Bells Laboratories, Technical report, n° TM 11217-900529-07*.

- [9] S. MALLAT, « A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation », *IEEE Trans. on PAMI*, vol. 11, n° 7, July 1989.
- [10] Y. MEYER, « Ondelettes et Opérateurs », *Tomes I, II et III*, Hermann, 1990.
- [11] B. CHALMOND, « Image restauration using an estimated Markov model », *Signal Processing*, vol. 15, n° 2, sept. 1988, pp. 115-129.
- [12] S. GEMAN, D. GEMAN, C. GRAFFIGNE and P. DONG, « Boundary detection by constrained optimization », *IEEE Trans. on PAMI*, vol. 12, 1990, pp. 609-628.
- [13] G. DEMOMENT, « Image Reconstruction and restoration : overview of Common Estimation Structures and Problems », *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 37, n° 12, December 1989, pp. 2024-2036.
- [14] D. GEMAN, G. REYNOLDS, « Constrained Restoration and the Recovery of Discontinuities », *IEEE Trans. on PAMI*, vol. 14, n° 3, mars 1992, pp. 367-383.
- [15] P. CHARBONNIER, L. BLANC-FÉRAUD, M. BARLAUD, « Noisy image restauration using multiresolution Markov random field », *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 3, n° 4, December 1992, pp. 338-346.
- [16] Sridhar LAKSHMANAN, Haluk DERIN, « Gaussian Markov Random Fields At Multiple Resolutions », à paraître dans *MARKOV RANDOM FIELDS : Theory and Applications*, Eds Chellappa and Jain, Academic Press 1990, soumis en juillet 1990.
- [17] G. BEYLKIN, R. COIFMAN, V. ROKHLIN, « Fast wavelet transform and numerical algorithms », *Comm. Pure and Appl. Math* 44, pp. 141-183, 1991.
- [18] L. BLANC-FÉRAUD, M. BARLAUD, P. CHARBONNIER, « Problèmes inverses et multirésolution », *Conférence Internationale Ondelettes et Applications*, Toulouse, juin 1990, actes à paraître.