

Transformée de Fourier discrète récursive avec fenêtre exponentielle dissymétrique

Discrete Recursive Fourier Transform with a Non-Symmetrical Exponential Window



Jean-François ROUX
LUTASP/CURISIS
Département de Physique
Faculté des Sciences et Techniques
37200 Tours

Né en 1942, Jean-François Roux est enseignant-chercheur à l'Université de Tours depuis 1965. Physicien de formation, il passe son Doctorat d'Etat en novembre 1986, sur un sujet de physique théorique, et s'oriente ensuite vers l'Automatique et le Traitement du Signal. Actuellement maître de conférence à la Faculté des Sciences et intervenant à l'Ecole d'Ingénieurs de Tours, il travaille au sein du Laboratoire Universitaire de Traitement du Signal et d'Automatisation des Systèmes de Production, à l'analyse et au diagnostic de signaux industriels.

RÉSUMÉ

L'étude du spectre à court terme d'un signal de longue durée non stationnaire échantillonné impose une fenêtre glissante dans laquelle est effectuée une transformation de Fourier discrète (TFD). Cette transformation, répétée à chaque pas, est forte consommatrice de temps de calcul malgré l'utilisation d'un algorithme de transformée de Fourier rapide (TFR). D'autre part, les informations spectrales obtenues concernent toute la fenêtre. L'utilisation d'une fenêtre exponentielle dissymétrique est proposée, afin de localiser les informations plus près de l'instant

d'analyse, et de gagner du temps de calcul. La perte de résolution en fréquence reste acceptable si un paramètre est bien choisi, et les calculs peuvent être faits récursivement, ce qui conduit à des temps réduits au moins d'un facteur 3.

MOTS CLÉS

Spectre, transformée de Fourier rapide, calcul récursif, fenêtre.

SUMMARY

The spectrum of a non-stationary long lasting signal is got in a sliding window, in which a discrete Fourier transform (DFT) is realized. The calculation of that transform at each step is heavily time consumer, although a fast Fourier transform (FFT) algorithm is generally used. Furthermore, the spectral informations concern the full window. We propose the use of a non-symmetrical exponential window, so that to localize the informations in the vicinity of the latest instant, and so that to

save time. The lost in frequency resolution is quite acceptable, and the recursive calculations are at least three times faster than with classical FFT.

KEY WORDS

Spectrum, fast Fourier transform, recursive calculation, window.

1. Introduction

La localisation des caractéristiques d'un signal $x(t)$, de longue durée et non stationnaire, est couramment réalisée à l'aide d'un spectre à court terme. Celui-ci est associé, au voisinage de l'instant t , à une restriction du signal sur un intervalle $[t, t + T]$; ainsi que le montre la figure 1, ce

spectre local est obtenu par transformation de Fourier du produit du signal $x(t)$ par une fenêtre $w(t)$ qui est traduite lorsque t varie, et qui annule toutes les contributions du signal qui n'appartiennent pas à l'intervalle $[t, t + T]$:

$$X_t(\nu) = \int_t^{t+T} w(u-t) x(u) e^{-j2\pi\nu u} du.$$

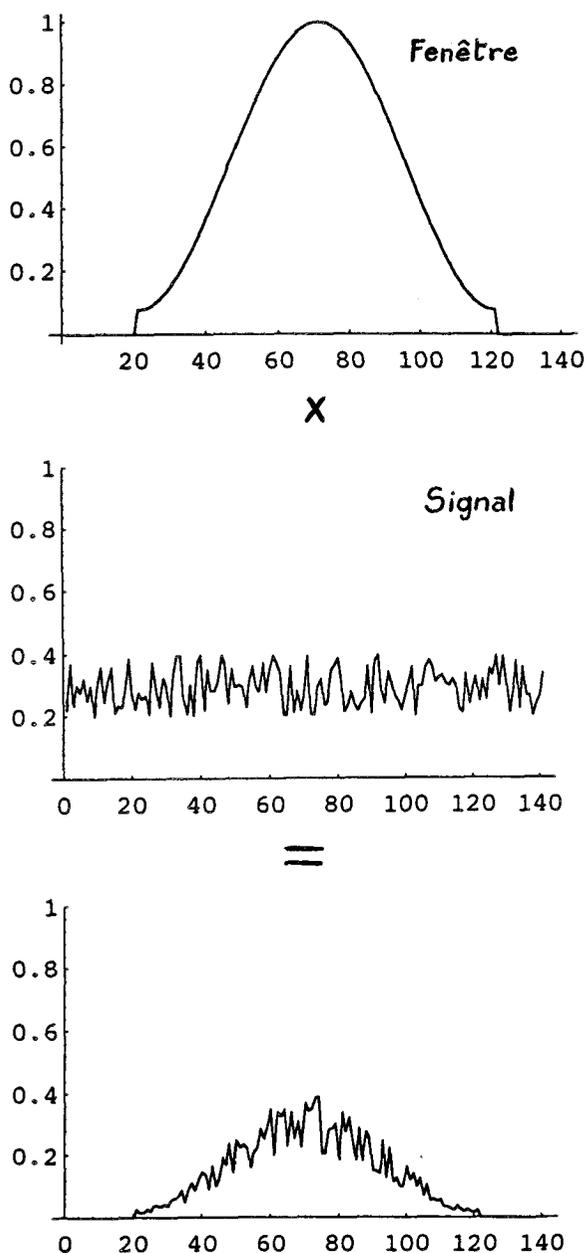


Figure 1. — Effet d'une fenêtre sur un signal : atténuation des effets de troncature.

Remarquons que l'expression précédente pourrait tout aussi bien, dans une analyse causale en temps réel, servir à définir le spectre local $X_{t+T}(v)$ à l'instant $(t+T)$, ou à un instant intermédiaire.

Lorsque le signal est échantillonné à la période T_e , on utilise la transformée de Fourier discrète (TFD), qui est alors définie en prenant les échantillons du signal et de la fenêtre aux instants pT_e :

$$X_p(k) = \sum_{n=p}^{p+N} w(n-p)x(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

Lorsque le temps t (ou p) évolue, tout se passe comme si le signal se déroulait derrière une fenêtre fixe ou, ce qui revient au même, comme si la fenêtre glissait en suivant le temps, d'où le nom d'analyse par fenêtre glissante (fig. 2).

La fenêtre rectangulaire, la plus simple, est évitée autant que possible pour les inconvénients qu'entraîne son spectre avec des lobes latéraux de forte amplitude. Quand on considère les différentes fenêtres utilisées habituellement, de celle Hamming à celle de Kaiser par exemple [1 à 5], on remarque que toutes sont symétriques. Or, de même que dans certaines méthodes récursives d'identification de processus [6, 7], il peut être intéressant de donner un poids moins important aux données les plus anciennes, grâce à un facteur d'oubli, d'où l'idée d'employer une fenêtre dissymétrique dans le calcul d'un spectre glissant (fig. 2, courbe en pointillés).

Par ailleurs, le calcul d'une transformée de Fourier discrète est déjà optimisé par l'emploi d'un algorithme dit de transformée rapide (TFR), qui minimise le nombre d'opérations à effectuer, mais il pourrait être amélioré si l'on pouvait, après un calcul classique d'initialisation, utiliser une formulation récursive.

Nous présentons ici un algorithme qui utilise conjointement les deux idées précédentes : fenêtre avec facteur d'oubli et calcul récursif. Cette méthode permet de réduire substantiellement les temps de calcul par rapport à une utilisation répétée pas à pas de la TFR, avec cependant une restriction sur la résolution spectrale et un déphasage, dus à la forme spécifique de la fenêtre.

Dans la suite, nous prendrons la période d'échantillonnage T_e comme unité de temps.

2. Calcul récursif d'une TFD

2.1. CAS D'UNE FENÊTRE RECTANGULAIRE

Nous considérerons dans la suite un signal discret, $x(n)$, commençant par exemple à l'instant $n=0$, et de durée indéfinie. On cherche à en définir le spectre local sur le signal tronqué de durée N , commençant à l'instant p . On a ainsi, en indexant par p la localisation du spectre correspondant, et par k ses composantes ($0 \leq k \leq N-1$) :

$$X_0(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+1) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n+1) e^{-j2\pi \frac{(n+1)k}{N}} e^{j2\pi \frac{k}{N}}$$

.....

$$(1) \quad X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+p) e^{-j2\pi \frac{(n+p)k}{N}} e^{j2\pi \frac{kp}{N}}$$

$$(2) \quad X_{p+1}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+p+1) \times e^{-j2\pi \frac{(n+p+1)k}{N}} e^{j2\pi \frac{(p+1)k}{N}} = e^{\frac{j2\pi k}{N}} [X_p(k) - x(p) + x(N+p)].$$

La TFD à l'étape $(p+1)$ est donc obtenue à partir de la TFD à l'étape p , par soustraction du terme le plus ancien $x(p)$, addition du nouveau terme $x(N+p)$, et multiplication par un terme de phase. Il faut remarquer que les termes ajoutés et retranchés sont indépendants de la composante k calculée ; d'autre part, le terme de phase dépend de cette composante mais ne dépend pas de la position p de la transformée calculée, et peut donc être calculé préalablement une fois pour toutes.

Sous forme vectorielle, la TFD récursive peut donc s'écrire :

$$(3) \quad X_{p+1} = F_N * [X_p - (x(p) - x(N+p)) \mathbf{1}],$$

où F_N représente le vecteur de composantes $e^{j2\pi k/N}$, $\mathbf{1}$ le vecteur de composantes toutes égales à 1, et le signe * représente la multiplication terme à terme de deux vecteurs.

2.2. INTRODUCTION D'UNE FENÊTRE EXPONENTIELLE DISSYMMÉTRIQUE

Notons tout d'abord qu'une fenêtre exponentielle symétrique se prête bien à l'analyse de transitoires plus longs que la durée de l'enregistrement du signal [8]. Bien qu'elle ait été envisagée pour cette étude, nous allons voir qu'elle ne permettrait pas de réaliser les objectifs que nous nous sommes fixés.

Nous supposons maintenant que l'on applique au signal $x(n)$ une fenêtre $w(n)$, différente de la fenêtre rectangulaire, mais de même durée N .

Les TFD aux étapes p et $(p+1)$ s'écrivent alors respectivement :

$$(4) \quad X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) x(n+p) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$X_p(k) = w(0)x(p) + \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n+p) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$(5) \quad X_{p+1}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n+p+1) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} = \sum_{n=1}^N w(n-1)x(n+p) e^{-j2\pi \frac{(n-1)k}{N}}.$$

On obtient donc finalement, à l'étape $p+1$:

$$(6) \quad X_{p+1}(k) = w(N-1)x(N+p) e^{-j2\pi \frac{(N-1)k}{N}} + e^{j2\pi \frac{k}{N}} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{w(n-1)}{w(n)} w(n)x(n+p) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}.$$

On remarque la ressemblance avec le résultat de l'étape p , mais le rapport $w(n-1)/w(n)$ intervient dans la sommation.

Si ce rapport peut être rendu indépendant de l'indice de sommation n , l'expression se simplifie ; supposons donc cette condition réalisée et posons :

$$(7) \quad w(n-1)/w(n) = K, \quad \forall n.$$

Alors, on obtient :

$$(8) \quad X_{p+1}(k) = e^{j2\pi \frac{k}{N}} [KX_p(k) - K^{N-1}x(p) + x(N+p)],$$

soit, sous forme vectorielle :

$$(9) \quad X_{p+1} = F_N * [KX_p - (K^{N-1}x(p) - x(N+p)) \mathbf{1}].$$

Cette expression récursive de la TFD présente la même structure que l'expression (3) obtenue avec la fenêtre rectangulaire, avec seulement deux multiplications supplémentaires.

La seule possibilité de satisfaire la condition (7) portant sur la définition du coefficient K , et donc d'obtenir l'expression récursive précédente, consiste à définir la fenêtre par une exponentielle. Afin de ne pas modifier les termes les plus récents du signal analysé, tout en donnant une importance réduite aux termes anciens, nous choisissons la fenêtre suivante :

$$(10) \quad w(n) = K^{N-1-n}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

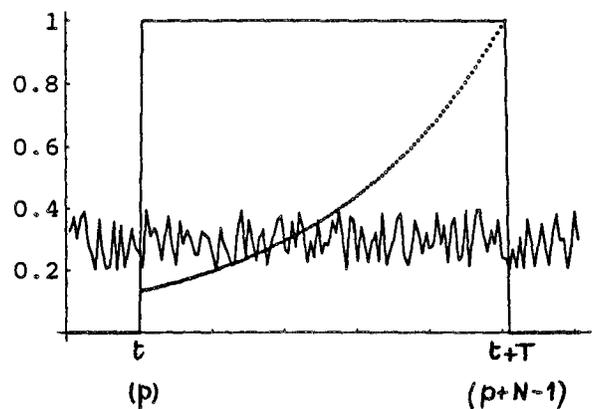


Figure 2. — Localisation d'un signal de longue durée : fenêtre rectangulaire (traits pleins), et fenêtre exponentielle (traits pointillés).

La figure 2 montre l'allure de cette fenêtre. Le coefficient K , inférieur à 1, représente un facteur d'oubli : le facteur de pondération est toujours égal à l'unité pour l'échantillon le plus récent ; il diminue avec K ainsi que lorsque N croît, ce qui modère l'effet de la troncature à gauche.

3. Effet de la fenêtre sur le spectre

Pour analyser l'effet de la fenêtre sur le spectre du signal tronqué, nous considérons la fenêtre définie (en temps continu) par :

$$(11) \quad w(t) = e^{\alpha(t-T)} \quad \text{si } 0 < t < T \\ w(t) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Cette fenêtre de largeur T prend les mêmes valeurs aux instants $t = nT/(N-1)$ que la fenêtre à temps discret utilisée précédemment (fig. 2), si l'on pose :

$$(12) \quad e^{-\alpha T} = K^{(N-1)}.$$

La transformée de Fourier de la fenêtre (11) admet pour expression :

$$(13) \quad W(\nu) = e^{-j2\pi\nu T} \frac{1 - e^{(j2\pi\nu - \alpha)T}}{\alpha - j2\pi\nu}.$$

La densité spectrale de puissance correspondante s'écrit :

$$(14) \quad |w(\nu)|^2 = \frac{1 - 2e^{-\alpha T} \cos 2\pi\nu T + e^{-2\alpha T}}{\alpha^2 + 4\pi^2\nu^2}.$$

Par rapport à la fenêtre rectangulaire, qui présente des lobes entre lesquels le spectre s'annule, cette fenêtre présente les particularités suivantes (cf. fig. 3 et tableau I) :

- les minima ne sont plus nuls et croissent avec α ;
- le lobe central s'aplatit et sa largeur (à mi-hauteur) augmente avec α , ce qui était prévisible ; cependant cet élargissement reste faible si α reste inférieur à 2,5 ;
- l'intensité relative des lobes secondaires croît lentement avec α ;
- les variations sont régularisées et, en accroissant α , on peut faire disparaître les minima successifs, liant ainsi le pic central aux lobes latéraux voisins. Un tel effet serait néfaste s'il ne s'accompagnait de l'oubli exponentiel des données les plus anciennes. Il y a donc lieu de rechercher un compromis pour α . Après examen, la valeur $\alpha = 2,1$ a été choisie ; en effet, pour cette valeur, la pondération exponentielle est seulement de 12,25 % (les valeurs les plus anciennes ont peu de poids), alors que le premier minimum a juste disparu ; pour des valeurs de α supérieures, le 2^e lobe joint au lobe central contribuerait à un élargissement spectral croissant rapidement.

Le tableau II donne, pour ce choix de α et pour $T = 1$, les valeurs à donner au paramètre K pour différentes longueurs N, toujours dans le cas de signaux échantillonnés.

On remarque, bien entendu, que le spectre est complexe, mais les représentations données sur les figures ne donnent que la répartition spectrale énergétique de la fenêtre.

Tableau I. — Caractéristiques spectrales de la fenêtre exponentielle dissymétrique.

Les valeurs entre parenthèses donnent l'atténuation des maxima, en dB, par rapport au pic central. La deuxième colonne donne le facteur de pondération des données temporelles les plus anciennes. Les cases vides correspondent à la disparition d'un extremum.

α	Exp $(-\alpha)$ ($T = 1$)	demi-largeur à mi-hauteur du pic central	valeur à l'origine	Extrema				
				1 ^{er} mini	1 ^{er} maxi	2 ^e mini	2 ^e maxi	3 ^e mini
0,1	0,9048	0,443	0,9056	0,00023	0,043 (13,2)	0,000057	0,015 (17,8)	0,000025
0,5	0,6065	0,446	0,6193	0,00387	0,0315 (12,9)	0,000977	0,011 (17,5)	0,000435
1	0,3679	0,456	0,3996	0,00962	0,0221 (12,6)	0,00249	0,0077 (17,1)	0,001118
1,5	0,2231	0,474	0,2682	0,01360	0,0178 (11,8)	0,00370	0,0062 (16,4)	0,001675
2	0,1353	0,498	0,1869	0,01528	0,0136 (11,4)	0,00446	0,0054 (15,4)	0,002049
2,1	0,1225	0,504	0,1746	0,01533	0,0153 (10,6)	0,00457	0,0052 (15,2)	0,002104
2,2	0,1108	0,513	0,1634	—3	—	0,00465	0,0051 (15)	0,002153
2,5	0,082	0,530	0,1348	—	—	0,00482	0,0049 (14,4)	0,002265

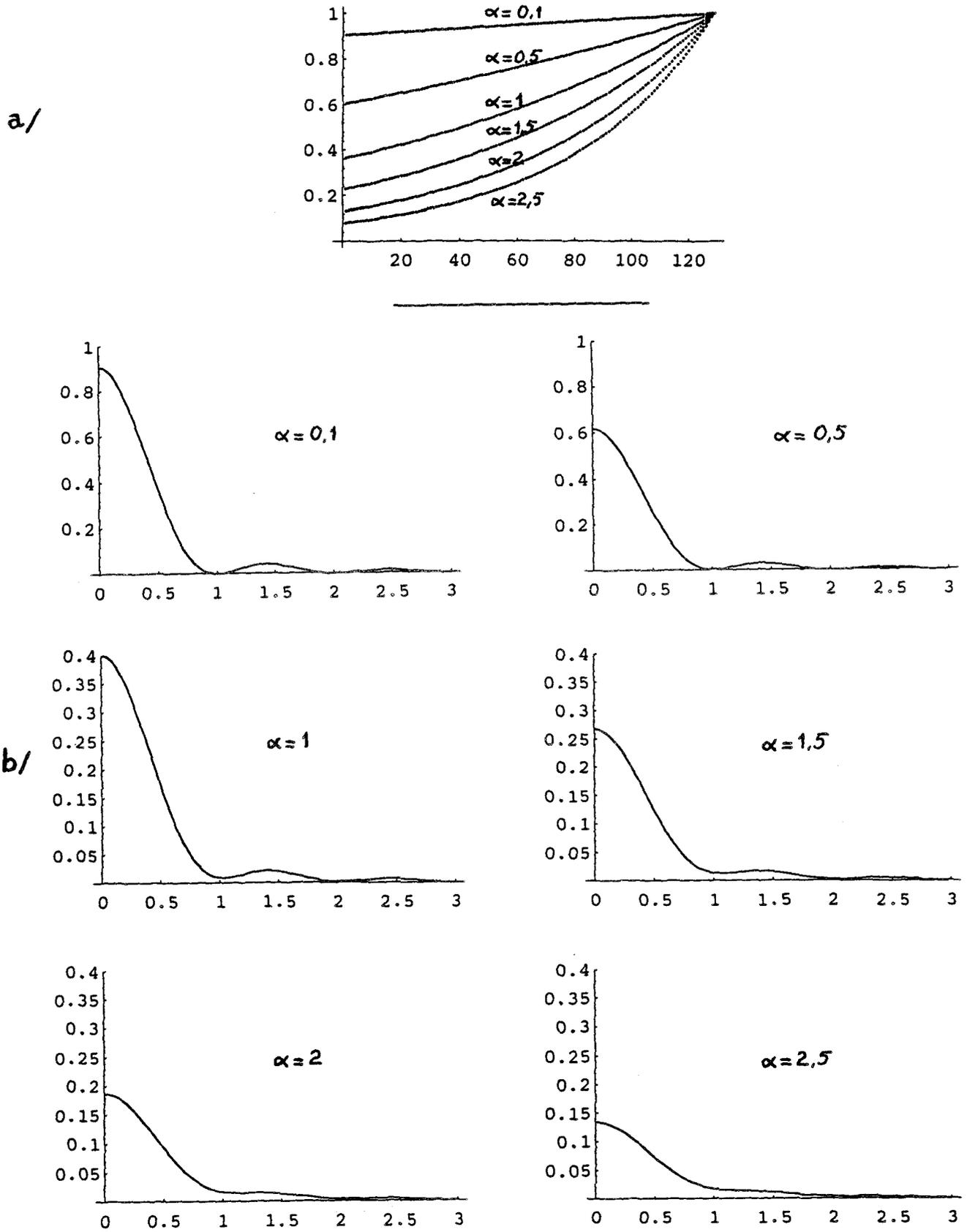


Figure 3. — Fenêtre exponentielle dissymétrique : a) allure générale selon les valeurs du paramètre d'atténuation α ; b) spectres d'énergie correspondants. Le premier spectre montre que, pour de faibles valeurs de α , la différence avec la fenêtre rectangulaire est négligeable.

Tableau II. — Valeurs du facteur d'oubli K en fonction du nombre d'échantillons dans la fenêtre, pour $\alpha = 2,1$.

N	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048
K	0,8694	0,9345	0,9672	0,9836	0,9918	0,9959	0,9979	0,9990

4. Conséquence de la méthode récursive sur les temps de calcul

Dans le cas d'une TFR, on sait que le temps de calcul, dû essentiellement aux multiplications, est proportionnel à $0,5 \cdot N \cdot \text{Log}_2 N$ pour une transformée sur N valeurs. Si l'on calcule n transformées successives, comme on le fait quand la fenêtre est glissante, le temps est multiplié par ce même facteur.

Le temps nécessaire pour effectuer n transformées successives par itération, en prenant en compte les multiplications et l'initialisation par TFR, est de la forme :

$$0,5 \cdot N \cdot \text{Log}_2 N + (n - 1)(2n + 1).$$

Dans ces conditions, la méthode itérative conduit à des temps de calcul favorables si :

$$\frac{N \text{Ln}_2 N + 2(n - 1)(2n + 1)}{nN \text{Ln}_2 N} < 1.$$

Le rapport précédent passe d'ailleurs par une valeur minimale, qui définit le nombre optimum d'itérations pour une fenêtre de longueur N donnée. Ainsi, la valeur du rapport de temps minimum diminue lorsque la largeur de la fenêtre augmente, allant de 46 % pour N = 16 et 4 itérations, à 3 % pour N = 1 024 et 128 itérations.

En fait, ces résultats théoriques très intéressants doivent être modérés dans la pratique, car il faut tenir compte des autres opérations : les additions ne sont pas en nombre négligeable, et les données doivent être acquises et mémorisées en vue de leur utilisation. Finalement, les essais réalisés sur micro-ordinateur avec des données stockées sur disque dur montrent que la méthode itérative conduit à un rapport de temps optimal qui lui reste favorable, et qui varie très peu en fonction de N en restant de l'ordre de 30 % ; en revanche, le nombre d'itérations successives optimum reste dépendant de la largeur N de la fenêtre, variant de 64 à 1 024 lorsque N diminue de 1 024 à 32.

Autrement dit, pour un signal de longue durée, il est souhaitable d'opérer de la façon suivante pour obtenir le spectre à court terme, par exemple sur 512 points :

- calcul initial par TFR,
- calcul récursif sur 128 itérations,
- calcul par TFR, etc...

En ce qui concerne la précision des calculs, la méthode itérative est encore favorable, puisque la limitation est due essentiellement aux multiplications qui sont moins nombreuses.

5. Quelques applications

Les figures 4 et 5 donnent l'exemple du spectre d'énergie glissant obtenu avec une fenêtre de largeur N = 128, pour le signal défini de la façon suivante :

$$x(p) = x_1(p) + x_2(p),$$

$$\text{avec } \begin{cases} x_1(p) = 0,8 \cos(2\pi p/19) & \text{pour } 0 < p < 140, \\ x_2(p) = \cos(2\pi p/11) & \text{pour } p > 130 \end{cases}$$

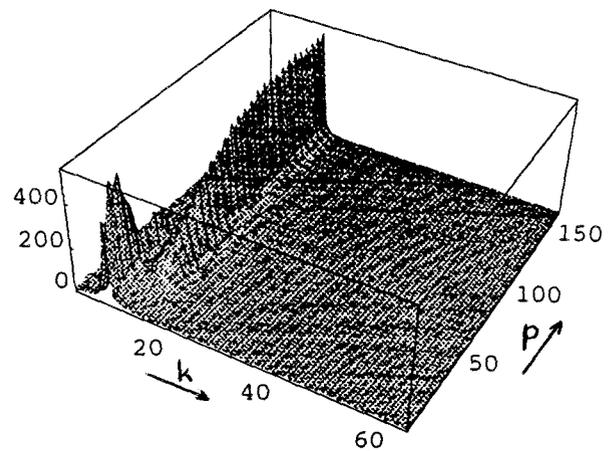


Figure 4. — Spectre glissant d'un signal harmonique de fréquences $f_1 = 1/19$ pour $n < 140$, et $f_2 = 1/11$ pour $n > 130$ (fenêtre exponentielle dissymétrique, N = 128, K = 0.9836).

La figure 4 montre que, pour les tous premiers spectres, le signal x_1 est seul présent ; l'amplitude du pic spectral correspondant à sa fréquence reste constante pendant les premières analyses, puis diminue puisque le signal n'apparaît plus que dans la queue de la fenêtre. Le signal x_2 , quant à lui, apparaît très rapidement mais progressivement ; le pic correspondant à sa fréquence reste d'amplitude constante à partir de $p = 65$ environ, c'est-à-dire la moitié de la largeur de la fenêtre.

La figure 5 représente une projection verticale du diagramme à 3 dimensions de la figure 4.

Une section de la figure 4 a été réalisée pour $p = 40$: la figure 6 montre que les deux signaux, qui coexistent alors, sont bien distincts ; les lobes secondaires, voisins des pics, sont peu importants.

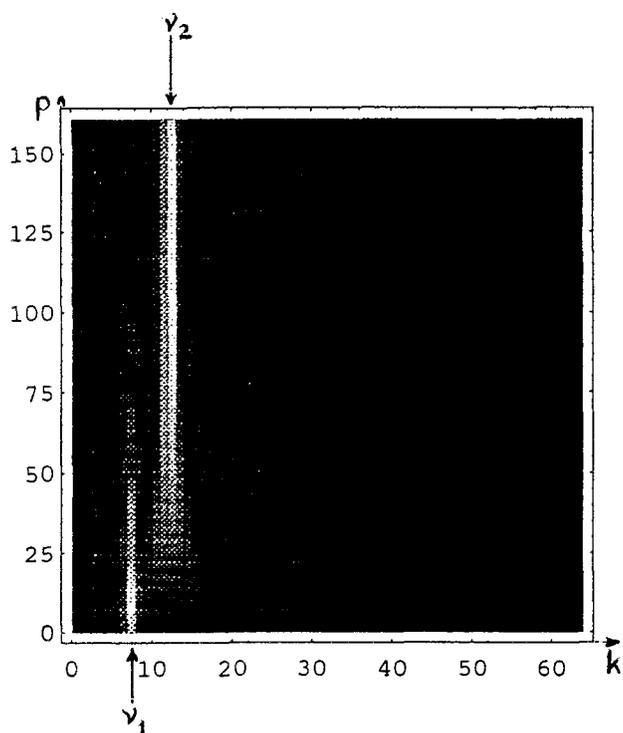


Figure 5. — Projection verticale du spectre glissant de la figure 4.

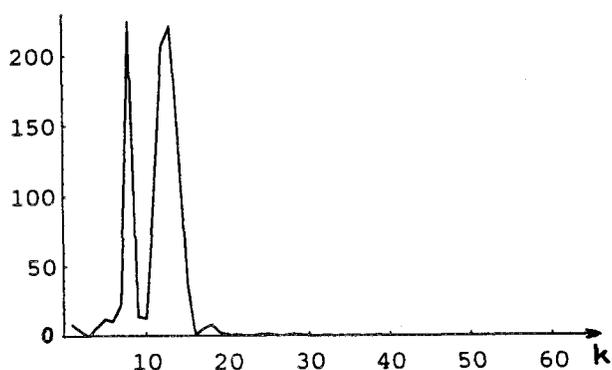


Figure 6. — Section du spectre glissant de la figure 4 pour $p = 40$.

Pour comparaison, nous avons effectué le calcul avec une fenêtre rectangulaire (fig. 7) ; le signal x_1 se manifeste sur une plus grande durée qu'en réalité alors que l'apparition du signal x_2 est peu modifiée ; les pics spectraux sont plus étroits. La largeur des pics est encore plus faible si l'on utilise une fenêtre de Kaiser et s'accompagne d'une meilleure localisation temporelle des transitions (fig. 8) ; mais l'obligation de travailler avec une TFR classique à chaque étape multiplie pratiquement par 7 le temps de calcul.

La figure 9 donne le résultat de l'analyse par spectre d'énergie à court terme récursif pour le même signal, mais avec une fenêtre de largeur $N = 32$. La deuxième compo-

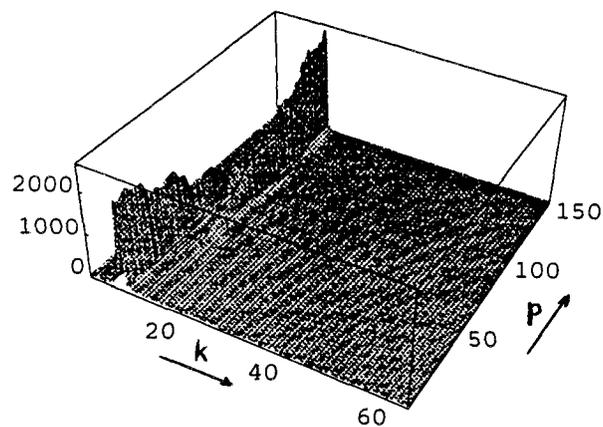


Figure 7. — Spectre glissant du même signal qu'à la figure 4 (fenêtre rectangulaire, $N = 128$).

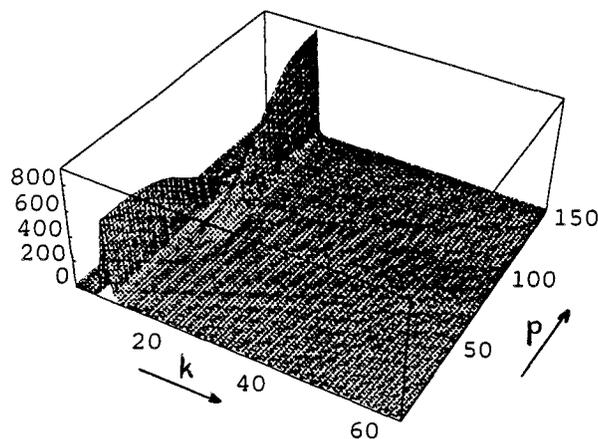


Figure 8. — Spectre glissant du même signal qu'à la figure 4 (fenêtre de Kaiser, $N = 128$).

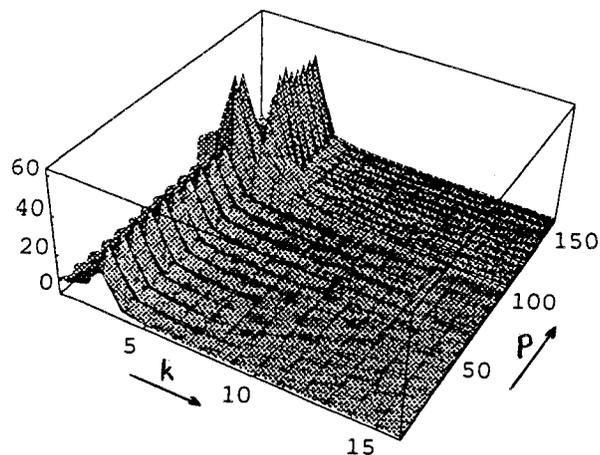


Figure 9. — Spectre glissant du même signal qu'à la figure 4 (fenêtre exponentielle dissymétrique, $N = 32$, $K = 0.9345$).

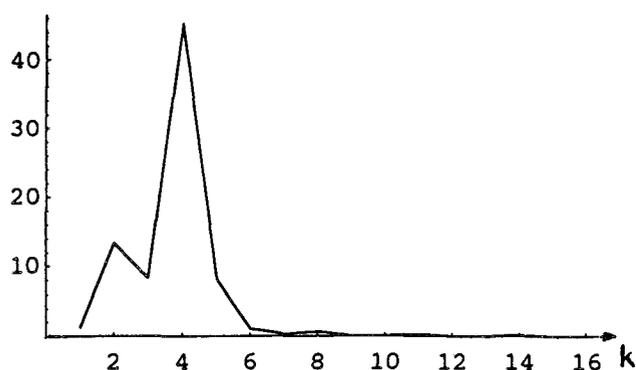


Figure 10. — Section du spectre glissant de la figure 9 pour $p = 120$.

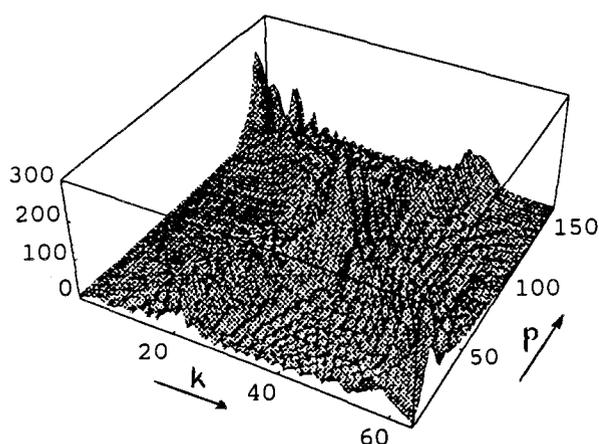


Figure 11. — Spectre glissant d'un signal non stationnaire composé de deux composantes de fréquences variant linéairement, l'une croissante et l'autre décroissante :

$$x(p) = 0,8 \cos(14 \pi 10^{-4} p^2) + \cos(38 \pi 10^{-4}(51,2 - p^2)).$$

sante apparaît évidemment plus tardivement et l'effet de pondération sur la première composante est plus long à se manifester. La zone où les deux composantes coexistent est mieux cernée dans le temps mais, comme le montre la coupe réalisée pour $p = 120$ donnée en figure 10, la résolution devient insuffisante ; on voit de plus clairement en figure 9 un phénomène d'ondulation de l'amplitude des pics, à peine sensible avec la première fenêtre, attribuable à la sensibilité de la fenêtre aux phases (ce phénomène étant lié à sa dissymétrie).

Enfin la figure 11 correspond à l'analyse, avec $N = 128$, d'un signal non stationnaire composé de deux fréquences variant linéairement dans le temps, l'une croissante et l'autre décroissante :

$$x(p) = 0,8 \cos(14 \pi 10^{-4} p^2) + \cos(38 \pi 10^{-4}(51,2 - p^2)).$$

Les phénomènes décrits précédemment y sont visibles : ondulations des pics, résolution faible lorsque les fréquences sont voisines.

Conclusion

Nous avons montré qu'un calcul itératif des transformées de Fourier nécessaires à la détermination du spectre local d'un signal de longue durée permet une réduction significative de la charge en temps de calcul par rapport à l'utilisation pas à pas de la TFR. L'inconvénient réside dans l'impossibilité d'utiliser une fenêtre quelconque, puisque, hormis la fenêtre rectangulaire et ses inconvénients, on ne peut utiliser qu'une fenêtre exponentielle ; celle-ci introduit un facteur d'oubli qui permet une bonne localisation temporelle des transitions dans le cas de signaux non stationnaires, mais entraîne une réduction de la résolution fréquentielle ; cette dernière peut être néanmoins admissible quand une grande résolution ne fait pas partie des objectifs principaux de l'analyse, comme par exemple dans le cas de signaux périodiques simples (analyse d'harmoniques).

Enfin, le gain de temps de calcul pourrait être mis à profit pour réaliser une analyse multiéchelle afin de mieux cerner les transitions temporelles tout en conservant une bonne résolution spectrale. Une telle analyse serait obtenue en modifiant la longueur de la fenêtre et en ajustant en conséquence le facteur de pondération. Elle présenterait les caractères d'une analyse en ondelettes ; cependant la fenêtre exponentielle ne possède pas les propriétés nécessaires à une ondelette et les conditions d'application d'une telle analyse doivent être d'abord précisées.

L'auteur est reconnaissant aux experts ayant examiné la première version de cet article : leurs remarques pertinentes qui ont permis d'en préciser plusieurs points.

Manuscrit reçu le 9 septembre 1992.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. R. RABINER, B. GOLD, *Theory and application of digital processing*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1975, p. 88 à 105.
- [2] M. KUNT, *Traitement numérique des signaux*, 3^e ed., Presses Polytechniques Romandes, Dunod, Paris, 1981, p. 107 à 124.
- [3] R. B. RANDALL, *Frequency analysis*, Brüel & Kjaer eds., Copenhagen, 1987.
- [4] S. D. STEARNS, R. A. DAVID, *Signal processing algorithms*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1988.
- [5] A. V. OPPENHEIM, R. W. SCHAFER, *Discrete time signal processing*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1989.
- [6] I. D. LANDAU, *Identification et commande des systèmes*, Hermès, Paris, 1988, p. 203 à 208.
- [7] M. NAJIM, *Modélisation et identification en traitement du signal*, Masson, Paris, 1988, p. 43 à 46.
- [8] S. GADE, H. HERLUFSEN, Use of weighting function in DFT/FFT Analysis, Brüel & Kjaer, Technical Review, n° 3, 1987.