

Ondelette tridimensionnelle adaptée au filtrage de structures allongées

Tridimensional Wavelet Designed For the Filtering of Oblong Structures

L. PLANTIÉ

Laboratoire d'Automatique et
d'Analyse des Systèmes du CNRS,
7 Avenue du colonel Roche,
31077 Toulouse Cedex

Laurent Plantié, diplômé ENSICA en 1991. DEA de traitement du signal de l'ENSICA en 1991. Thèse en cours au LAAS sur l'étude de la « triple couche », en mécanique des fluides.

RÉSUMÉ

Notre étude se situe dans le cadre de l'analyse par transformée en ondelettes continue de signaux dépendant de trois variables spatiales. Nous présentons une ondelette adaptée au filtrage de structures allongées. Nous testons finalement cette ondelette sur un champ de turbulence homogène.

MOTS CLÉS

Transformée en ondelettes, ondelettes tridimensionnelles, filtrage, turbulence.

SUMMARY

This paper deals mainly with the analysis of 3-D signals by means of the continuous wavelet transform. We present a wavelet designed for the filtering of oblong structures. We finally apply this wavelet to a field of homogeneous turbulence.

KEY WORDS

Wavelet transform, three-dimensional wavelet, filtering, turbulence.

1. Introduction

La transformée en ondelettes fut initialement introduite au début des années 80 par A. Grossmann et J. Morlet, dans le but de répondre à un problème de représentation temps-fréquence. Son domaine d'utilisation s'étend des mathématiques, avec l'étude d'objets fractals ou la résolution d'équations aux dérivées partielles, jusqu'au traitement du signal, en passant par la mécanique quantique ou la compression d'information.

La transformée en ondelettes permet une analyse des signaux en espace et échelle. Sa lecture est difficile du fait du compromis entre résolution spatiale et fréquentielle. Cette difficulté apparaît déjà en dimension un [5], et est amplifiée pour les signaux dépendant de plusieurs variables à cause des problèmes de représentation. D'autre part, la transformée en ondelettes s'est révélée particulièrement

bien adaptée à l'étude de la turbulence homogène, en mécanique des fluides. En effet, les structures apparaissant expérimentalement sont bien localisées spatialement et se présentent à des échelles très différentes [3]. En dimension trois, ces structures ont une forme allongée [8] [16]. Il est donc intéressant de définir une ondelette adaptée au filtrage de structures allongées, permettant alors de faire une analyse du signal en position, échelle et direction.

Dans un premier temps, nous rappelons et commentons la définition de la transformée en ondelettes pour les signaux dépendant de trois variables spatiales. Nous rappelons également l'expression de deux ondelettes bien connues : le *chapeau mexicain radial*, et l'*ondelette de Morlet*, et l'interprétation des paramètres de la transformée en ondelettes. Nous construisons finalement une ondelette répondant à notre objectif, et nous testons cette ondelette sur un champ d'écoulement de turbulence homogène, sans chercher à faire une analyse physique des résultats obtenus.

2. Transformée en ondelettes pour les signaux de $L^2(\mathbb{R}^3, d^3M)$

Nous reprenons la démarche de A. Grossmann et J. Morlet, et nous renvoyons à [6] et [7] pour une présentation complète de la théorie de la transformée en ondelettes, basée sur la notion de représentation des groupes. Nous utilisons les travaux de R. Murenzi [10] sur la généralisation de la définition de la transformée en ondelettes aux cas des signaux dépendant de n variables ($n \geq 2$ quelconque). La transformée en ondelettes est définie, de façon générale, sur $L^2(\mathbb{R}^n, d^n M)$, espace des fonctions complexes à n variables réelles dont le module est de carré intégrable.

Nous souhaitons une transformée capable de nous renseigner sur la position, la taille et l'orientation des structures présentes dans un signal. Il est alors normal de penser faire intervenir les groupes suivants : $(\mathbb{R}^3, +)$, l'ensemble des translations de \mathbb{R}^3 muni de l'addition, (\mathbb{R}_+^*, \cdot) , le groupe multiplicatif des réels positifs, et (\mathfrak{R}, \circ) , l'ensemble des rotations de \mathbb{R}^3 muni de la loi de composition usuelle. Le groupe utilisé est une combinaison des trois groupes précédents que l'on appelle IG(3) [10]. Notons a, r , et b , respectivement, les éléments de \mathbb{R}_+^* , \mathfrak{R} , et \mathbb{R}^3 . On appellera a la dilatation ou le facteur d'échelle, r la rotation, et b la translation. r dépend de trois paramètres ; nous choisissons les angles d'Euler classiques : θ, χ, η (r est la rotation associée à ces trois angles).

Ce groupe permet de définir une représentation de carré intégrable sur $L^2(\mathbb{R}^3, d^3M)$. Dans ce cas, on montre [10] que la condition d'admissibilité pour une fonction Φ devient : $\int \frac{|\widehat{\Phi}(k)|^2}{\|k\|^3} d^3k < \infty$ ($\widehat{\Phi}$ désignant la transformée de Fourier de Φ), ce qui se ramène, comme en dimension 1, et dans le cas où Φ est suffisamment régulière, à : $\widehat{\Phi}(0) = 0, \left(\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(M) d^3M = 0 \right)$, soit Φ est de moyenne nulle.

On définit alors la transformée en ondelettes d'une fonction f par :

$$(I) \quad F(a, r, b) = \frac{1}{\sqrt{C_\Phi}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{a^{3/2}} \Phi^* \left(\frac{1}{a} r^{-1}(M - b) \right) f(M) d^3M,$$

C_Φ étant une constante normalisatrice. (z^* désigne le conjugué complexe de z). La transformée de Fourier étant une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^3, d^3M)$ (transformée de Fourier-Plancherel [13]), on peut aussi écrire :

$$(II) \quad F(a, r, b) = \frac{1}{\sqrt{C_\Phi}} \int_{\mathbb{R}^3} a^{3/2} \widehat{\Phi}^*(ar^{-1}k) e^{ibk} \widehat{f}(k) d^3k.$$

Afin de pouvoir interpréter la transformée en ondelettes d'un signal comme une représentation espace-fréquence de celui-ci, on se limite en général à 6 paramètres. 3 paramètres, les composantes de b , représentent les paramètres

d'espace ; le facteur d'échelle et 2 angles d'Euler doivent pouvoir représenter la fréquence en polaires. On élimine le troisième angle d'Euler, η , en prenant une fonction Φ à symétrie cylindrique autour de (Oz) . θ et χ correspondent alors aux angles des coordonnées polaires, à condition d'avoir pris les bonnes orientations. Une isosurface de la fonction $M \rightarrow \Phi \left(\frac{1}{a} r^{-1}(M - b) \right)$ correspond à une isosurface de la fonction Φ translatée de b , dilatée de a et ayant subi une rotation d'angles θ et χ .

On utilise également les formules :

$$(I') \quad F(a, r, b) = \frac{1}{\sqrt{C_\Phi}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{a^3} \Phi^* \left(\frac{1}{a} r^{-1}(M - b) \right) f(M) d^3M,$$

et

$$(II') \quad F(a, r, b) = \frac{1}{\sqrt{C_\Phi}} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\Phi}^*(ar^{-1}k) e^{ibk} \widehat{f}(k) d^3k.$$

Les formules (I) et (II) correspondent à la normalisation L^2 : la norme L^2 de la fonction $M \rightarrow \frac{1}{a^{3/2}} \Phi \left(\frac{1}{a} r^{-1}(M - b) \right)$ est indépendante de a, r , et b . Les formules (I') et (II') correspondent à la normalisation L^1 . Nous utilisons désormais celle-ci.

3. Ondelettes

Les formules (I') et (II') sont utilisées conjointement dans le choix d'une ondelette adaptée à un type de problème donné. Ainsi, pour une analyse espace-fréquence, il est naturel de considérer des ondelettes Φ telle que Φ et $\widehat{\Phi}$ soient des fonctions à décroissance rapide autour d'un point. De telles ondelettes sont alors dites bien localisées en espace et en fréquence.

Les ondelettes les plus connues sont le chapeau mexicain radial :

$$\Phi(x, y, z) = [3 - (x^2 + y^2 + z^2)] e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$\widehat{\Phi}(k_x, k_y, k_z) = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) e^{-\frac{1}{2}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}$$

et l'ondelette de Morlet :

$$\Phi_{k_0}(x, y, z) = e^{ik_0 \cdot z} e^{-(x^2 + y^2 + z^2)/2} - e^{-k_0^2/2} e^{-(x^2 + y^2 + z^2)/2}$$

$$\widehat{\Phi}_{k_0}(k_x, k_y, k_z) = e^{-\frac{1}{2}(k_x^2 + k_y^2 + (k_z - k_0, z)^2)} - e^{-\frac{1}{2}(k_0, z^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}$$

Notons k_0 le vecteur $(0, 0, k_0, z)$. En dimension 1, la

condition d'admissibilité est : $\int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\Phi}(k)|^2}{|k|} dk < \infty$. Nous rappelons, figure 1, l'équivalent en dimension 1 des ondelettes que nous venons de présenter.

La formule (II') permet alors, pour l'une ou l'autre de ces deux ondelettes, d'interpréter le triplet (a, θ, χ) comme une représentation de la fréquence en polaire. Considérons par exemple le signal $s(M) = \exp(ik_s \cdot OM)$. Sa transformée en ondelettes par l'ondelette de Morlet s'écrit :

$$F(a, r, b) = \frac{1}{\sqrt{C_\Phi}} \int \widehat{\Phi}_{k_0}^*(ar^{-1}k) e^{ikh} \delta_{k_s} d^3k.$$

Pour a et r fixés, $F(a, r, b)$ est la transformée de Fourier inverse de la distribution de Dirac en k_s de poids $\widehat{\Phi}_{k_0}^*(ar^{-1}k_s) = \widehat{\Phi}_{k_0}(ar^{-1}k_s)$. La fonction $\widehat{\Phi}_{k_0}$ atteint son maximum en k_0 ; donc, le module de la transformée en ondelettes de ce signal est maximum pour a_s et r_s tels que $a_s r_s^{-1} k_s = k_0$. Cette relation simple est due à la normalisation L^1 . Le facteur d'échelle a_s représente l'inverse du module de la pulsation à un facteur multiplicatif près : $\|k_s\| = \frac{\|k_0\|}{a_s}$; les angles θ_s et χ_s correspondant au maxi-

mum sont les angles des coordonnées polaires de k_s . Soit u_z le vecteur $(0, 0, 1)$. En coordonnées polaires, k_s s'écrit : $k_s = \|k_s\| r(\theta_s, \chi_s) u_z$, et l'on a : $k_s = \frac{k_{0,z}}{a_s} r(\theta_s, \chi_s) u_z$.

Ainsi, à tout triplet (a, θ, χ) peut être associée une pulsation spatiale, et, dans cette mesure, (a, θ, χ) peut être interprété, par analogie, comme une représentation de la fréquence en polaire. Pour a, θ , et χ donnés, la transformée en ondelettes fera apparaître avec un poids plus grand les fréquences spatiales localisées autour de $\frac{k_{0,z}}{a} r(\theta, \chi) u_z$.

Une analyse identique peut être menée pour toute ondelette bien localisée en fréquence, la relation liant les fréquences spatiales à (a, θ, χ) dépendant de l'ondelette choisie.

Toutefois, le triplet (a, θ, χ) et b interviennent différemment dans les équations, et ils ne peuvent pas être interprétés exactement de la même façon. Des différences existent notamment en ce qui concerne les résolutions spatiale et fréquentielle. Ainsi, si le signal comporte plusieurs fréquences spatiales, le repérage des fréquences se révèle à nouveau délicat.

4. Les ondelettes en mécanique des fluides

La turbulence est l'un des grands domaines d'étude en mécanique des fluides. En dimension trois, si l'on représente uniquement les vecteurs du champ du rotationnel des vitesses de norme supérieure à un certain seuil, on constate, pour certains écoulements, que l'on obtient des structures allongées (non forcément rectilignes) que l'on appelle tubes de vorticit   [16] (cf. fig. 6). En dimension deux, on observe aussi des zones o   les vecteurs de fort module sont bien localis  s [4] [8]. Ce type de signal se pr  sente en particulier dans le cas de la turbulence homog  ne (homog  ne signifiant qu'il n'existe pas, en moyenne sur tout le signal, de direction d'alignement privil  gi  e pour les

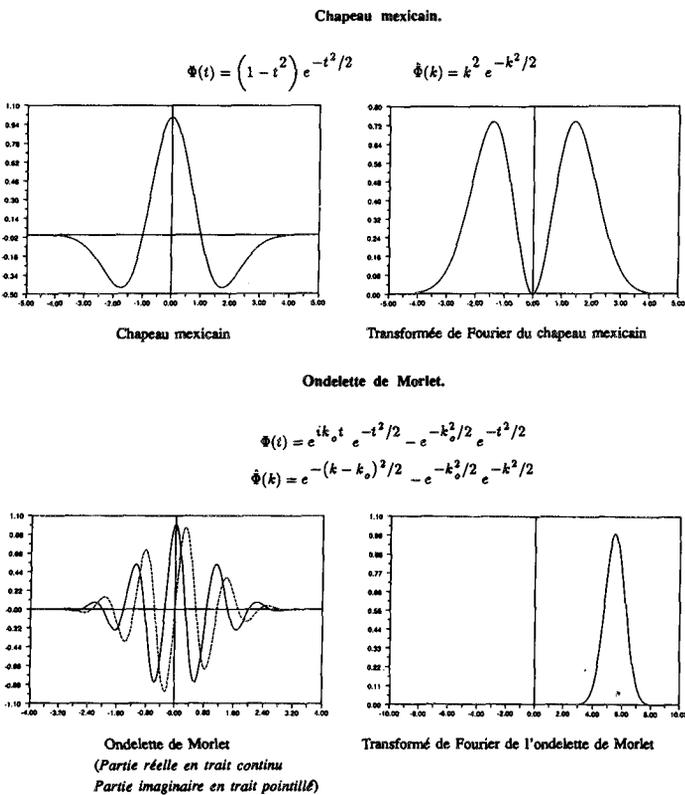


Figure 1.

Ces deux ondelettes ont un comportement de gaussienne, et sont centr  es en 0. La formule (I') permet donc d'interpr  ter directement b en tant que param  tre d'espace.

Le chapeau mexicain est une fonction    sym  trie sph  rique, donc, les rotations n'ayant pas d'influence, la transform  e en ondelettes    l'aide de cette ondelette est une fonction de 4 variables seulement. L'ensemble des points o   la transform  e de Fourier du chapeau mexicain atteint son maximum est une sph  re, et la fonction est    d  croissance rapide autour de cet ensemble. Cette ondelette permet de recueillir une information sur la norme des fr  quences pr  sentes dans un signal, mais non sur leur direction. L'ondelette de Morlet, quant    elle, n'est rigoureusement de moyenne nulle que si l'on conserve le second membre (contre-terme), mais le choix de $k_{0,z}$ permet justement de rendre ce contre-terme num  riquement n  gligeable ($k_{0,z} = 5$ ou 6). Moyennant cette approximation, la transform  e de Fourier de l'ondelette de Morlet est une gaussienne centr  e en $k_x = k_y = 0, k_z = k_{0,z}$.

vecteurs du champ). L'étude de la turbulence consiste, entre autre, à expliquer l'apparition et le comportement de telles structures.

Les études ont principalement été menées en 2-D, à cause du nombre de points et du volume de calcul nécessaires en 3-D pour simuler correctement les écoulements. Il existe cependant des différences d'ordre physique entre les écoulements bidimensionnels et tridimensionnels [8].

Diverses méthodes d'analyse ont été utilisées ayant chacune leur intérêt :

— Une technique de seuillage (évoquée au début de cette section) permet de repérer et de définir morphologiquement les structures à étudier.

— La transformée de Fourier a permis de mettre en évidence des phénomènes tels que la cascade de Richardson.

— Les méthodes statistiques [16]...

Plus récemment, d'autres techniques plus spécifiques aux écoulements tridimensionnels ont été développées :

— Un algorithme d'extraction de tubes permet d'isoler un tube de vorticité dans un écoulement tridimensionnel, et de le suivre au cours du temps, afin de pouvoir l'étudier de sa naissance à sa mort [15].

— Une autre méthode permet de visualiser les lignes de champ dans un écoulement tridimensionnel : elle consiste à représenter d'une couleur particulière les positions successives d'une particule fluide, choisie en un lieu de l'écoulement jugé intéressant a priori [14].

Ces deux dernières techniques présentent un intérêt immédiat car le nombre de tubes de vorticité est souvent élevé, et la visualisation est un problème important en 3-D [15].

De façon générale, les structures observées en écoulement turbulent possèdent la propriété d'être très localisées, et d'apparaître à des échelles très différentes. Elles ne présentent pas de périodicité, même locale [3]. La transformée en ondelettes est donc particulièrement bien adaptée à l'étude de tels phénomènes. Marie Farge [4] montra à l'aide de la transformée en ondelettes par l'ondelette de Morlet que les petites structures des écoulements de turbulence homogène bidimensionnels se localisent de plus en plus au cours du temps en se concentrant au centre de « structures cohérentes ». La transformée en ondelettes par le chapeau mexicain tridimensionnel a été utilisée par J. G. Brasseur et Q. Wang [1] pour l'étude de la turbulence homogène à différentes échelles. Ils ont ainsi étudié la création de zones intermittentes dans lesquelles se concentrent les tubes de vorticité, et le processus par lequel la turbulence devient anisotrope du fait d'un cisaillement global.

Les structures apparaissant dans la turbulence homogène sont des structures allongées, mais non forcément rectilignes, la direction d'un tube de vorticité pouvant varier de plus de 90 degrés. Il est cependant intéressant de profiter de la liberté de choix de l'ondelette dans la transformée en ondelettes, pour choisir une fonction adaptée au filtrage de structures allongées rectilignes. Nous ne pourrions donc pas extraire ainsi un tube particulier, mais seulement chercher quelles sont les structures, ou parties de structures, allongées dans une direction donnée.

5. Construction d'une « ondelette directionnelle »

Les renseignements que nous souhaitons pouvoir recueillir sur les structures allongées à l'aide de la transformée en ondelettes sont leur position, taille et orientation. Par choix, seule la direction principale d'allongement de ces structures nous intéresse ; une ondelette   symétrie cylindrique convient donc pour répondre à cet objectif. Le chapeau mexicain et l'ondelette de Morlet présentent des caractéristiques intéressantes pour la recherche des fréquences présentes dans un signal. Cependant, ces caractéristiques ne sont pas forcément celles qui conviennent le mieux à l'étude de structures allongées.

En effet, nous pouvons penser intuitivement qu'une ondelette adaptée au filtrage de structures allongées devra présenter uniquement des valeurs positives sur son axe de symétrie, et négatives et positives dans un plan perpendiculaire, ceci afin d'obtenir une fonction de moyenne nulle. Ainsi, lorsque les régions, de formes allongées, où le signal présente de fortes valeurs, toutes de même signe, seront superposées à la zone de l'ondelette, localisée autour de son axe de symétrie, où celle-ci présente de fortes valeurs positives, l'intégrale (I) (ou I') prendra une valeur importante, et ce d'autant plus que l'ondelette sera allongée selon son axe. Dans le cas contraire, la valeur de la transformée en ondelettes au même point b sera moindre. La condition d'admissibilité (moyenne nulle) nous permet d'avoir une formule d'inversion, et ainsi d'être sûr de ne pas perdre d'information.

Consid rions une fonction à symétrie cylindrique d'axe (Oz) vérifiant les conditions ci-dessus, et supposons que la décroissance de cette fonction selon cet axe soit faible par rapport à celle selon une direction orthogonale. La décroissance de sa transformée de Fourier (qui sera aussi à symétrie cylindrique) sera donc rapide selon l'axe (Ok_z). Par contre, les oscillations de la fonction dans le plan (xy) correspondent à des valeurs importantes de sa transformée de Fourier en des points relativement éloignés de l'origine dans le plan (k_x, k_y). Si de plus cette fonction vérifie la condition d'admissibilité $\widehat{\Phi}(0) = 0$, les valeurs importantes de sa transformée de Fourier seront vraisemblablement prises en des points appartenant à un ensemble ressemblant à un tore, situé dans le plan (k_x, k_y).

Par ailleurs, les gaussiennes sont, de par leurs propriétés, des fonctions intéressantes pour construire des ondelettes, et si l'on veut connaître l'expression de l'ondelette dans l'espace physique, il est important de se rappeler les relations liant l'espace physique à l'espace spectral. Par exemple, le chapeau mexicain, dans l'espace spectral, est la gaussienne multipliée par un polynôme en k_x, k_y, k_z , ce qui, dans l'espace physique, correspond à des dérivations.

On peut alors essayer de concilier toutes les conditions énumérées précédemment en prenant comme expression de l'ondelette :

$$\widehat{\Phi}(k_x, k_y, k_z) = (k_x^2 + k_y^2) e^{-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)/2}$$

La transformée de Fourier inverse de cette ondelette s'écrit :

$$\int \int (k_x^2 + k_y^2) e^{-(k_x^2 + k_y^2)/2} e^{i(k_x x + k_y y)} \times \\ \times dk_x dk_y \int e^{-k_z^2/2} e^{i(k_z z)} dk_z.$$

On reconnaît la transformée de Fourier du Laplacien de la Gaussienne en dimension deux, et la transformée de Fourier de la Gaussienne en dimension un. L'expression de l'ondelette dans l'espace physique est donc :

$$\Phi(x, y, z) = [2 - (x^2 + y^2)] e^{-(x^2 + y^2 + z^2)/2}.$$

On peut cependant apporter une amélioration. Il est possible de modifier le terme en z de l'ondelette sans modifier les termes en k_x, k_y de sa transformée de Fourier, en prenant comme terme en z : $e^{-z^2/2f}$, f étant un réel positif quelconque. La transformée de Fourier de ce terme sera :

$\sqrt{f} e^{-f \cdot k_z^2/2}$. Plus f sera grand et plus l'ondelette sera allongée et sélective selon la direction (Oz) (la direction privilégiée étant ici la direction (Oz)). Il est alors légitime d'appeler f le facteur de forme de l'ondelette.

Remarques : 1. Il ne faut cependant pas que f soit trop grand ; en effet, dans un tel cas, le calcul de la transformée en ondelettes aurait pour effet de moyenniser le signal sur une trop grande distance selon (Oz), et l'on pourrait ainsi croire déceler, par exemple, un segment de droite là où il n'y a en fait qu'une succession de pointillés.

2. Le facteur de forme ne varie pas au cours d'une analyse par ondelette, de même que le paramètre k_0 pour l'ondelette de Morlet qui fixe, pour $a = 1$, la pulsation autour de laquelle est centrée la transformée de Fourier de celle-ci. Une ondelette subit seulement des translations, homothéties, ou rotations.

Nous avons choisi expérimentalement $f = 3$. Nous avons donc :

$$\Phi(x, y, z) = [2 - (x^2 + y^2)] e^{-(x^2 + y^2 + (z^2/3))/2}.$$

L'ondelette construite est le chapeau mexicain bidimensionnel modulé par un terme exponentiel selon l'axe (Oz). Nous pouvons donc en déduire que la sensibilité de cette ondelette vis-à-vis de l'échelle des structures d'un signal doit être semblable à celle du chapeau mexicain bidimensionnel. Nous allons étudier plus particulièrement ce qui fait l'originalité de cette ondelette, c'est-à-dire son aptitude à filtrer des structures en fonction de leur direction principale d'allongement.

Nous voyons, figures 2 et 3, deux isosurfaces de cette ondelette, et figure 4, une isosurface de sa transformée de Fourier. Cette ondelette vérifie bien toutes les conditions que nous nous étions imposées. Sur ces trois figures, les orientations sont identiques. L'axe (Oz) est l'axe de symétrie de révolution, axe selon lequel l'ondelette est allongée (fig. 2).

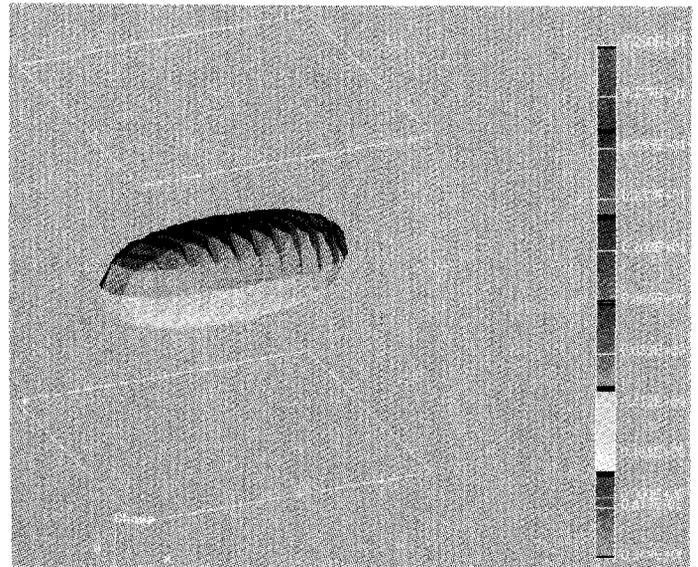


Figure 2. — « Ondelette directionnelle ». Isosurface pour la valeur 0,3.

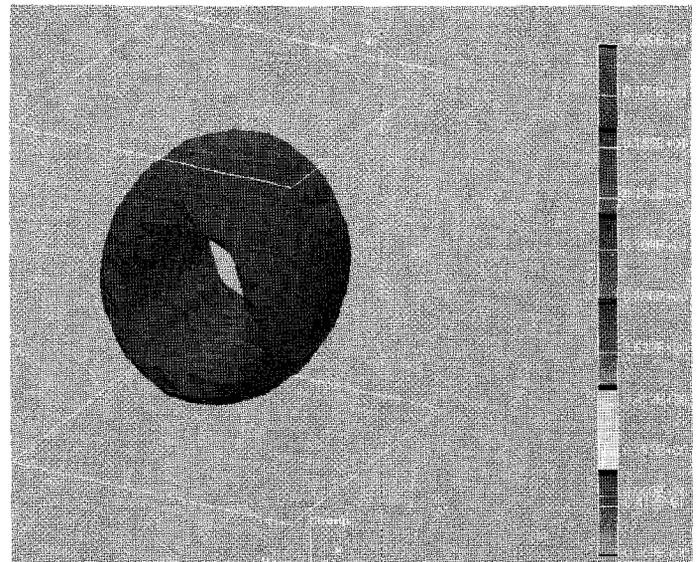


Figure 3. — « Ondelette directionnelle ». Isosurface pour la valeur -0,1.

Comme seule la direction principale d'allongement nous intéresse, il suffit de tester l'ondelette sur des signaux dont les structures sont à symétrie cylindriques. L'ondelette étant aussi à symétrie cylindrique, l'étude peut se faire dans un plan. La figure 5 montre une coupe de la transformée en ondelettes (a, θ , et χ fixés) passant par un plan contenant 5 segments (que l'on peut considérer comme des cylindres de rayon très faible) inclinés à 0, 30, 45, 60, et 90°. On peut constater une assez bonne sélectivité de l'ondelette.

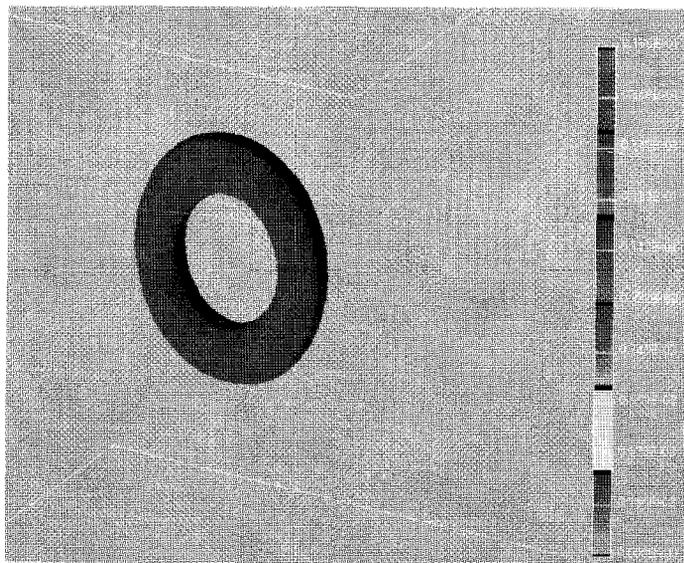


Figure 4. — Transformée de Fourier de l'« ondelette directionnelle ». Isosurface 1,5.

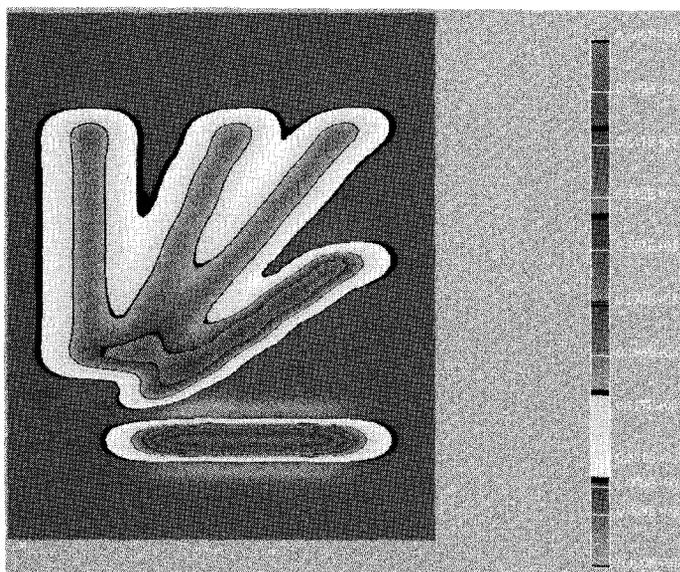


Figure 5. — Transformée en ondelettes, à l'aide de l'« ondelette directionnelle », de 5 segments inclinés à 0, 30, 45, 60 et 90° (a , θ , et fixés). L'ondelette est orientée selon le segment horizontal.

6. Application à la détection de structures cohérentes en turbulence

L'ondelette définie ci-dessus présente un intérêt dans les cas où l'on cherche à connaître les directions des structures d'un signal. Elle peut ainsi être utilisée pour la détection d'une anisotropie globale (cas de la convection, ou de

l'écoulement dans un tuyau), pour l'étude des conséquences d'un cisaillement global [1], ou dans l'étude des « structures cohérentes » [8].

Le champ que nous allons considérer dans cette section est issu d'une simulation numérique en trois dimensions d'un problème de mécanique des fluides [16]. Il s'agit du champ d'un écoulement de turbulence homogène forcée. Ce que l'on observe est analogue à de la turbulence de grille. C'est ce que l'on obtiendrait expérimentalement si l'on faisait passer un fluide à travers une grille, la vitesse globale de l'écoulement étant supérieure aux fluctuations locales dues à la turbulence. Le nombre de Reynolds vaut environ 1 000. Notre objet d'étude étant la direction des tubes de vorticité, nous pouvons donc nous ramener à l'étude du champ du module du rotationnel des vitesses.

La figure 6 montre une isosurface du champ du module du rotationnel. On voit apparaître des tubes de vorticité : ce sont des structures allongées, donc susceptibles d'être filtrées par l'ondelette que nous avons choisie. On peut remarquer, en bas à gauche sur l'image, une structure assez nette. De même, au-dessus, et alignées dans la même direction que le tube de vorticité précédent, on peut discerner un ensemble de petites structures parallèles. La direction choisie pour l'ondelette est celle de ces structures. Le paramètre a a été choisi en fonction de la taille des tubes de vorticité majoritairement présents, notre objectif étant avant tout de vérifier la sélectivité de l'ondelette par rapport à la forme des tubes, et leur direction.

La figure 7 montre une isosurface de la transformée en ondelette du champ précédent (paramètres a , θ et χ fixés). Les structures précédemment citées ont bien été filtrées. Les structures qui n'avaient pas la même direction que l'ondelette ressortent beaucoup moins.

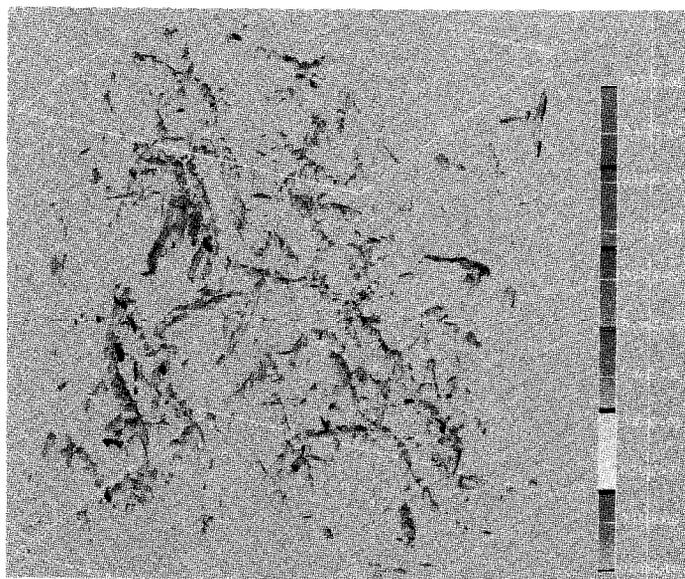


Figure 6. — Écoulement de turbulence homogène. Isosurface du module du rotationnel du champ des vitesses.

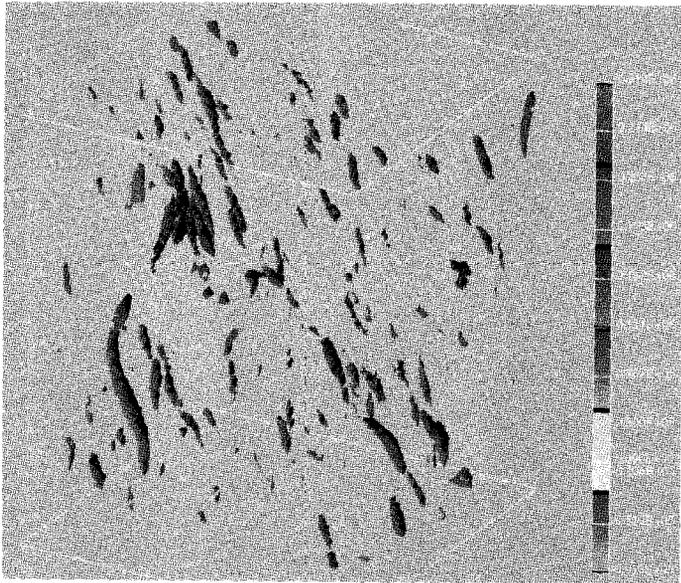


Figure 7. — Transformée en ondelettes du champ précédent (a , θ , et χ fixés).
Isosurface de ce champ.

7. Conclusion

La théorie de la transformée en ondelettes laisse une grande liberté dans le choix de l'ondelette analysante, et nous avons pu profiter de cette liberté afin de trouver une ondelette répondant à notre objectif. Ce travail pourra être poursuivi par une étude plus précise de l'ondelette vis-à-vis de certains signaux tests. On pourra ainsi chercher à caractériser la sélectivité de l'ondelette en fonction des paramètres d'orientation ou d'échelle. Les applications physiques évoquées à la section 6 pourront également être développées.

L'inconvénient majeur de la transformée en ondelettes est son coût en calcul, surtout en dimension trois, mais l'utilisation de la formule ((II')) et d'algorithmes de FFT permet de réaliser ces calculs assez rapidement. Il existe des algorithmes de calculs rapides [2], [12], mais on peut également profiter du caractère local de la transformée en ondelettes pour réaliser de façon interactive la transformation sur un petit nombre de points. Cette méthode peut être envisagée pour une étude ultérieure.

Manuscrit reçu le 20 novembre 1991.
Dernière révision le 6 novembre 92.

Remerciements

Le travail présenté ici a été réalisé au CERFACS en collaboration avec l'ENSICA. Le logiciel de visualisation

utilisé dans cette étude s'appelle VISUO ; il a été écrit par D. Astruc au Centre d'Étude et de Recherche de l'ONERA à Toulouse.

Je remercie vivement M. Murenzi pour ses conseils concernant la transformée en ondelettes, M. Vincent pour les nombreux renseignements relatifs aux écoulements turbulents, ainsi que M. Astruc et Barrère pour les discussions fructueuses que nous avons eues. Je remercie enfin M. Montseny du LAAS pour l'aide apportée à la rédaction de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. G. BRASSEUR and Q. WANG, Structural evolution of homogeneous turbulence at different scales analysed using 3D wavelet transforms. Submitted to *Phys. Fluids A*, August 1991.
- [2] P. DUTILLEUX, An implementation of the « algorithme à trous » to compute the wavelet transform. Wavelet, time-frequency methods and phase space, Springer-Verlag, 1989.
- [3] M. FARGE, Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, pp. 395-457, 1992.
- [4] M. FARGE, G. RABREAU, Transformée en Ondelette pour détecter et analyser les structures cohérentes dans les écoulements turbulents 2D. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences. Mécaniques des fluides, série II*, N° 13, octobre 1988.
- [5] A. GROSSMANN, P. GUILLEMAIN, R. KRÖNLAND-MARTINET, Arête associée à la transformée en ondelettes de signaux présentant des singularités isolées. *International Conference, Wavelets and Applications*, juin 1992. A paraître.
- [6] A. GROSSMANN, J. MORLET and T. PAUL, Transforms associated to square integrable group representations. I. General results. *J. Math. Phys.*, vol. 26, N° 10, pp. 2473-2479, October 1985.
- [7] A. GROSSMANN, J. MORLET and T. PAUL, Transforms associated to square integrable group representations. II. Examples. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Vol. 45, N° 3, pp. 293-3099, 1986.
- [8] Y. MEYER, M. FARGE, Les ondelettes. *Journée Annuelle de la Société Mathématique de France*, mai 1990.
- [9] Y. MEYER, Ondelettes et Opérateurs, tomes I et II. Actualités mathématiques, Hermann, 1990.
- [10] R. MURENZI, Ondelettes Multidimensionnelles et Applications à l'Analyse d'Images. Thèse de Doctorat, Université Catholique de Louvain, janvier 1990.
- [11] L. PLANTÉ, Application des ondelettes à la détection d'objets tridimensionnels. DEA de l'ENSICA, septembre 1991.
- [12] O. RIOUL and P. DUHAMEL, « Fast algorithms for the continuous wavelet transform », ICASSP' 91, pp. 2213-2216.
- [13] F. RODDIER, Distributions et Transformations de Fourier, McGraw-Hill.
- [14] Z. S. SHE, E. JACKSON and S. A. ORSZAG, Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence. *Nature*, 334, pp. 226-228, 1990.
- [15] J. VILLASENOR and A. VINCENT, An algorithm for space recognition and time tracking of vorticity tubes in turbulence. *CVGIP*, Vol. 55, No. 1, January, pp. 27-35, 1992.
- [16] A. VINCENT, M. MENEGUZZI, The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, Vol. 225, April 1991.