

*L*a calibration d'antenne

Influence d'erreurs de modèles sur diverses méthodes d'analyse spatiale

Influence of Model Errors on Some Spatial Analysis Methods

par **A. MARSAL, S. MARCOS**

Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNR-ESE,
Plateau de Moulon, F-91192 Gif-sur-Yvette Cedex.

Résumé

Nous étudions dans cet article l'influence d'erreurs de modèle sur les performances de certaines méthodes d'analyse spatiale. Une unification des méthodes ainsi que des perturbations considérées nous permet de donner une formule générale pour l'erreur d'estimation des directions d'arrivées, en fonction de la perturbation et de la méthode utilisée. Cette formule, obtenue au premier ordre et dans le cas non-asymptotique, est ensuite dérivée pour chaque méthode et pour chaque perturbation.

Mots clés : Traitement d'antenne, Localisation de sources, Méthodes haute résolution, Erreurs de modèle, Analyse de perturbation, Analyse non-asymptotique.

Abstract

The purpose of this article is to study the influence of model errors on the performances of some spatial analysis methods. We present a unification of both the concerned methods and perturbations. This leads to a general expression of the estimation error on the sources bearings as a function of both the perturbation and the method. This expression, calculated at the first order and in the non-asymptotic case, is then derived for each method and each perturbation.

Key words : Array processing, Sources bearings estimation, High resolution methods, Modelling errors, Perturbation analysis, Non-asymptotic analysis.

INTRODUCTION

Les méthodes de recherche des directions d'arrivée (DDA) utilisent des modèles et des hypothèses sur le bruit, les sources, le canal de propagation ou l'antenne; elles supposent généralement la connaissance de la variété à laquelle appartiennent les vecteurs directionnels (antenne calibrée) et un temps de mesure infini.

Dans la pratique, comme ces modèles et ces hypothèses sont rarement vérifiés (on parlera alors de perturbations), les DDA ne sont pas estimées exactement. Si les conditions sont vraiment mauvaises, il est nécessaire de mettre en œuvre des techniques permettant de tenir compte des perturbations, voire même de les estimer. L'inconvénient majeur de ces techniques est la complexité qu'elles rajoutent aux calculs déjà lourds nécessaires à l'estimation des DDA.

Ceci justifie l'étude de la sensibilité des méthodes d'analyse spatiale aux diverses perturbations possibles. Des seuils d'acceptabilité des estimations pourront être établis à la suite à cette étude, en deçà desquels une correction sera indispensable.

De nombreux auteurs [FJM88, Fr89, Ho92, KFP92, Li91, Porat88, Rendas92, Soon92, Stoica89, Swindlehurst92] ont étudiés l'effet de certaines de ces perturbations (temps de mesure fini, bruit coloré ou corrélation entre les sources) notamment pour la méthode Music et ses dérivées (Min-Norm et MD-Music) mais aussi pour la méthode du maximum de vraisemblance et pour la méthode Esprit [Roy89]. Dans un but de généralité, certains de ces auteurs ont introduit un cadre commun unifiant l'étude de la sensibilité des estimateurs [Ho92, Li91, Swindlehurst92], et étendu l'étude à des perturbations affectant aussi le modèle de propagation et de réception des signaux.

Nous allons dans un premier temps étendre ces cadres à différentes versions de la méthode du propagateur et à la formation de voies, puis, après avoir recensé et classé les diverses sources de perturbations, nous allons en quantifier l'erreur d'estimation des DDA fournies respectivement par les méthodes Music, Propagateur et formation de voies.

1. Introduction du pseudo-spectre généralisé

Dans cette section, les méthodes Music, Propagateur et formation de voies, pour la détermination des DDA, sont considérées comme des méthodes recherchant les arguments des *extrema* d'une fonction appelée « pseudo-spectre généralisé » et définie par

$$F(\theta) = \mathbf{a}^*(\theta) \mathbf{M} \mathbf{a}(\theta), \quad (1)$$

où $\mathbf{a}(\theta)$ est un modèle de vecteur directionnel et θ un paramètre angulaire. \mathbf{M} est une matrice carrée de dimension (M, M) , hermitienne et définissant une application linéaire.

Il est à noter qu'indépendamment de \mathbf{M} , la construction de (1) nécessite de connaître le modèle de propagation (antenne calibrée).

1.1. LA MÉTHODE MUSIC

Il a été montré dans la partie I que la méthode Music consiste à trouver les DDA des fronts d'ondes sur l'antenne comme arguments des *minima* de la fonction

$$\begin{aligned} F_{Mus}(\theta) &= \|\mathbf{V}_B^* \mathbf{a}(\theta)\|^2 \\ &= \mathbf{a}^*(\theta) \mathbf{V}_B \mathbf{V}_B^* \mathbf{a}(\theta), \quad \theta \in]-\pi, \pi], \end{aligned} \quad (2)$$

où θ est un paramètre de localisation, $\mathbf{a}(\theta)$ un vecteur d'analyse de dimension M modélisant la propagation et où \mathbf{V}_B est la matrice de dimension $(M, M-P)$ dont les colonnes sont les vecteurs propres orthonormés de $\mathbf{\Gamma}$, associés à la valeur propre σ^2 (de multiplicité $M-P$). \mathbf{V}_B étant une matrice unitaire, (2) représente la norme au carré de la projection orthogonale du vecteur d'analyse $\mathbf{a}(\theta)$ sur le sous-espace bruit.

Par conséquent, la méthode Music est bien définie par le pseudo-spectre généralisé (1) dont il faudra chercher les *minima*, avec

$$\mathbf{M} = \mathbf{V}_B \mathbf{V}_B^*. \quad (3)$$

Il est à noter que si θ_p est une DDA et si le modèle de vecteur directionnel est le bon, alors

$$F_{Mus}(\theta_p) = F_{Mus}'(\theta_p) = 0, \quad (4)$$

où F_{Mus}' désigne la dérivée première de la fonction $F_{Mus}(\theta)$, par rapport à θ .

1.2. LA MÉTHODE DU PROPAGATEUR, AVEC OU SANS ORTHONORMALISATION

La méthode du propagateur pour la détermination des DDA a été introduite par J. Munier [Munier87, Munier91], et depuis, de nombreuses variantes sont apparues dans la littérature [Marcos90a,

Marcos90b, Marsal91]; son utilisation s'étend à d'autres domaines du traitement d'antenne, notamment à la reconstruction d'une antenne déformée [Marcos89, Marcos93].

La définition du propagateur repose sur la partition de la matrice des vecteurs directionnels suivant

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} P \\ M-P \end{array}, \quad (5)$$

où \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 sont des matrices de dimensions respectives (P, P) et $(M-P, P)$.

Sous l'hypothèse que la matrice \mathbf{A}_1 , de dimension (P, P) est non singulière, le propagateur est l'opérateur linéaire unique \mathbf{P} de \mathbb{C}^{M-P} dans \mathbb{C}^P , défini de façon équivalente par les deux propositions suivantes :

$$\mathbf{P}^* \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2, \quad (6)$$

ou

$$\left[\mathbf{P}^*, -\text{Id}_{M-P} \right] \mathbf{A} \triangleq \mathbf{Q}^* = \mathbf{0}, \quad (7)$$

où Id_{M-P} est la matrice identité de dimension $(M-P)$ et \mathbf{Q} une matrice de dimension $(M, M-P)$.

On déduit de (7) que l'estimation des DDA peut se réaliser de manière analogue à Music [Marcos90a, Munier91] : étant donné un modèle de vecteur directionnel $\mathbf{a}(\theta)$ dépendant d'un paramètre angulaire de localisation θ , les DDA sont les arguments des *minima* de

$$F_{Pro}(\theta) = \|\mathbf{Q}^* \mathbf{a}(\theta)\|^2 = \mathbf{a}^*(\theta) \mathbf{Q} \mathbf{Q}^* \mathbf{a}(\theta), \quad \theta \in]-\pi, \pi]. \quad (8)$$

Contrairement à \mathbf{V}_B , la matrice \mathbf{Q} n'est pas unitaire. Ainsi, bien que $\mathcal{I}(\mathbf{Q}^*)$, le sous-espace image de la transformation associée à la matrice \mathbf{Q}^* , soit inclus dans le sous-espace bruit, $\mathbf{Q}^* \mathbf{a}(\theta)$ ne constitue pas la projection orthogonale du vecteur d'analyse sur ce sous-espace [Marsal91]. Mais rien n'empêche de construire $\mathbf{\Pi}_Q$, le projecteur orthogonal sur le sous-espace bruit en fonction de la matrice \mathbf{Q} :

$$\mathbf{\Pi}_Q \triangleq \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^* \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^* \triangleq \mathbf{Q}_{ON} \mathbf{Q}_{ON}^*, \quad (9)$$

avec

$$\mathbf{Q}_{ON} = \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^* \mathbf{Q})^{-\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

où \mathbf{Q}_{ON} est une matrice de dimension $(M, M-P)$, dont les colonnes forment une base orthonormée du sous-espace bruit qui ne fait intervenir que le propagateur (par l'intermédiaire de la matrice \mathbf{Q}).

Par analogie à (8) on peut chercher les DDA arguments des *minima* de

$$F_{ProON}(\theta) = \|\mathbf{Q}_{ON}^* \mathbf{a}(\theta)\|^2 = \mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{Q}_{ON} \mathbf{Q}_{ON}^* \mathbf{a}(\theta). \quad (11)$$

En conclusion, les deux variantes de la méthode du propagateur sont bien définies par un pseudo-spectre généralisé (1), avec respectivement

$$M = QQ^*, \quad (12)$$

ou

$$M = Q_{ON}Q_{ON}^*. \quad (13)$$

Il est à noter que si θ_p est une DDA et si le modèle de vecteur directionnel est le bon, alors

$$\begin{aligned} F_{Pro}(\theta_p) &= F_{Pro}(\theta_p) = F_{ProON}(\theta_p) \\ &= F_{ProON}(\theta_p) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

1.3. LA FORMATION DE VOIES

La méthode de formation de voies consiste à calculer l'énergie reçue pour chaque direction d'observation. Le calcul s'apparente à une technique de transformée de Fourier spatiale. On montre que cela revient à calculer la fonction suivante :

$$F_{FV}(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{\Gamma} \mathbf{a}(\theta). \quad (15)$$

A la différence des deux méthodes précédemment citées, (15) constitue un spectre d'énergie et représente la répartition de l'énergie selon les directions spatiales. Les arguments de ses *maxima* donneront une estimée des DDA.

Il est à noter que si le nombre de sources est supérieur à un, cette méthode est biaisée. C'est à dire que si θ_p est une DDA, alors, en présence de bruit, $F_{FV}(\theta_p)$ sera différente de zéro.

2. Préliminaires

2.1. APPROCHE NON-ASYMPTOTIQUE

Le cas non-asymptotique correspond au cas pratique où l'on ne possède qu'un nombre fini K de vecteurs observations $\mathbf{x}(k)$.

En l'absence de bruit, et pour une modélisation idéale des conditions de propagation, on a

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S}, \quad (16)$$

où

$$\mathbf{S} \triangleq [\mathbf{s}(1), \mathbf{s}(2), \dots, \mathbf{s}(K)], \quad (17)$$

est la matrice de dimension (P, K) des vecteurs des amplitudes complexes des sources aux divers instants d'observation.

On notera la MIS des signaux reçus sur l'antenne par

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \frac{1}{K} \mathbf{X} \mathbf{X}^*. \quad (18)$$

b. Factorisation de la matrice interspectrale

D'après (18), il est clair que les vecteurs singuliers à gauche de la matrice \mathbf{X} sont les vecteurs propres de $\hat{\mathbf{\Gamma}}$. C'est à dire que l'on peut faire apparaître la matrice \mathbf{V}_B dans la décomposition en valeurs singulières de la matrice \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{V}_S \mid \mathbf{V}_B] \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_S^* \\ \mathbf{U}_B^* \end{bmatrix}, \quad (19)$$

où $\mathbf{\Sigma}_S$ est une matrice carrée, diagonale, de dimension P et contenant les valeurs singulières de \mathbf{X} ; \mathbf{V}_S et \mathbf{V}_B sont une partition des vecteurs singuliers à gauche de \mathbf{X} , respectivement de dimensions (M, P) et $(M, M - P)$; \mathbf{U}_S et \mathbf{U}_B sont une partition des vecteurs singuliers à droite de \mathbf{X} , respectivement de dimensions (K, P) et $(K, M - P)$.

De la même manière, le propagateur se déduit directement de la matrice \mathbf{X} . En effet, d'après (6) et (16), si l'on considère la partition

$$\mathbf{X} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{array} \right] \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{array}} \right\}^P \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{array}} \right\}^{M-P} \end{matrix}, \quad (20)$$

on a bien

$$\mathbf{P}^* \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2. \quad (21)$$

On en déduit comme solution optimale au sens des moindres carrés

$$\mathbf{P}_X = (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1^*)^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2^*, \quad (22)$$

où \mathbf{P}_X désigne le propagateur calculé directement à partir des données.

Si l'on souhaite tout de même calculer le propagateur à l'aide d'une partition de la matrice interspectrale [Munier91], on peut montrer que, dans le cas non-asymptotique, on aboutit à :

$$\mathbf{P} = (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}^* \mathbf{X} \mathbf{X}_1^*)^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{X}^* \mathbf{X} \mathbf{X}_2^*. \quad (23)$$

3. Calcul des erreurs sur le pseudo-spectre en fonction des erreurs sur les données

En présence de bruit de mesure ou d'erreurs sur le modèle de propagation, la matrice des observations ne vérifie plus (16), on note

$$\tilde{\mathbf{X}} \triangleq (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \mathbf{S} + \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{S} + \underbrace{\Delta \mathbf{A} \mathbf{S} + \mathbf{B}}_{\Delta \mathbf{X}}, \quad (24)$$

la matrice d'observation obtenue en présence de perturbations modélisées de façon additive par ΔX . D'une manière générale, dans ce chapitre, la notation ΔQ représente une perturbation additive subie par la quantité Q , \tilde{Q} étant la version perturbée correspondante.

Comme nous le verrons par la suite, ce modèle additif correspond à la plupart des perturbations réelles (bruit de mesure, couplage intercepteur, bruit sur les gains des capteurs). Pour ce qui est des autres types de perturbations (essentiellement le bruit de position) l'équation (24) peut être vue comme un développement limité au premier ordre de l'erreur d'observation (voir section 6).

Dans l'étude qui suit, nous nous limitons à une étude au premier ordre de l'effet de ces perturbations. Ce choix, qui a été fait également par d'autres auteurs [Li91, Swindlehurst92], est validé par les simulations présentées dans la section 9. Nous analysons ainsi pour la formation de voies, la méthode Music et la méthode du propagateur, l'effet sur le pseudo-spectre des erreurs de modèles représentées, quelque soit leur origine, par une erreur additive ΔX sur la matrice des données X .

3.1. LA MÉTHODE MUSIC

Les erreurs de modèle génèrent des erreurs sur les vecteurs singuliers de celle-ci, (19), et par conséquent sur la matrice V_B à partir de laquelle est calculée la matrice M pour la méthode Music, (2) et (1). Soit \tilde{V}_B la version perturbée de V_B qui correspond à \tilde{X} ; si l'on se limite à des influences du premier ordre, il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{M} &\triangleq \tilde{V}_B \tilde{V}_B^* \triangleq (V_B + \Delta V_B)(V_B^* + \Delta V_B^*) \\ &\approx M + \underbrace{V_B \Delta V_B^* + \Delta V_B V_B^*}_{\triangleq \Delta M} \end{aligned} \quad (25)$$

Li et Vaccaro ont donné [Li91] une approximation au premier ordre de ΔV_B en fonction de ΔX :

$$\Delta V_B \approx -V_S \Sigma_S^{-1} U_S^* \Delta X^* V_B, \quad (26)$$

où les matrices U_S , Σ_S et V_S sont définies en (19). Le pseudo-spectre (2) devient alors

$$\tilde{F}_{Mus}(\theta) = F_{Mus}(\theta) + \Delta F_{Mus}(\theta), \quad (27)$$

avec

$$\Delta F_{Mus}(\theta) \triangleq \mathbf{a}^*(\theta) \Delta M \mathbf{a}(\theta). \quad (28)$$

3.2. LA MÉTHODE DU PROPAGATEUR

D'après la relation (22), le propagateur dépend directement de la matrice X . Si l'on partitionne la matrice \tilde{X} de manière analogue

à (20) :

$$\tilde{X} = X + \Delta X \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} X_1 + \Delta X_1 \\ X_2 + \Delta X_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

On peut donc calculer une estimation du propagateur en présence de perturbations sur la matrice des données, soit

$$\tilde{P}_X \triangleq (\tilde{X}_1 \tilde{X}_1^*)^{-1} \tilde{X}_1 \tilde{X}_2^* \quad (30)$$

En développant (30) selon (29), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{P}_X &= \left(X_1 X_1^* + X_1 \Delta X_1^* + \Delta X_1 X_1^* + \Delta X_1 \Delta X_1^* \right)^{-1} \\ &\cdot \left(X_1 X_2^* + X_1 \Delta X_2^* + \Delta X_1 X_2^* + \Delta X_1 \Delta X_2^* \right) \end{aligned} \quad (31)$$

Si ensuite on effectue un développement au premier ordre de (31), on obtient

$$\tilde{P}_X \approx P_X + (X_1 X_1^*)^{-1} X_1 (\Delta X_2^* - \Delta X_1^* P_X) \quad (32)$$

soit

$$\tilde{P}_X = P_X - \underbrace{(X_1 X_1^*)^{-1} X_1 \Delta X^* Q_X}_{\triangleq \Delta P_X} \quad (33)$$

où la matrice Q_X est définie en (7). De la même manière on déduit

$$\tilde{Q}_X = Q_X + \Delta Q_X, \quad (34)$$

avec

$$\Delta Q_X \approx \begin{bmatrix} -(X_1 X_1^*)^{-1} X_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta X^* Q_X \quad (35)$$

Si l'on avait estimé le propagateur à partir de la MIS, par la formule (23), on aurait obtenu de manière analogue :

$$\Delta Q \approx \begin{bmatrix} -(X_1 X^* X X_1^*)^{-1} X_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} X^* X \Delta X^* Q \quad (36)$$

On peut, dans les deux cas, d'après les équations (8) et (1), calculer les erreurs engendrées par les perturbations contenues dans ΔX sur la matrice M pour la méthode du propagateur :

$$\begin{aligned} \tilde{M} &\triangleq \tilde{Q} \tilde{Q}^* = (Q + \Delta Q)(Q^* + \Delta Q^*) \\ &\approx M + \underbrace{Q \Delta Q^* + \Delta Q Q^*}_{\triangleq \Delta M} \end{aligned} \quad (37)$$

3.3. LA MÉTHODE DU PROPAGATEUR AVEC ORTHONORMALISATION

D'après les équations (11) et (1), on peut calculer l'erreur introduite sur la matrice M pour cette méthode :

$$\begin{aligned} \widetilde{M} &\triangleq \Pi_{\widetilde{Q}} \triangleq \widetilde{Q}(\widetilde{Q}^* \widetilde{Q})^{-1} \widetilde{Q}^* \\ &= (Q + \Delta Q) \left[(Q^* + \Delta Q^*)(Q + \Delta Q) \right]^{-1} (Q^* + \Delta Q^*) \\ &\approx M + \underbrace{Q(Q^*Q)^{-1} \Delta Q^* \Pi_Q^\perp + \Pi_Q^\perp \Delta Q (Q^*Q)^{-1} Q^*}_{\triangleq \Delta M} \end{aligned} \quad (38)$$

où $\Pi_Q^\perp \triangleq \text{Id}_M - \Pi_Q$ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace source.

Une formule analogue peut être obtenue pour \widetilde{M} , en fonction de ΔQ_X .

3.4. LA FORMATION DE VOIES

Pour ce qui est de cette méthode, la matrice M dépend directement de Γ (15) et donc de la matrice de données X (18). On peut écrire

$$\begin{aligned} \widetilde{M} &\triangleq \widetilde{F} = \frac{1}{K} (X + \Delta X)(X^* + \Delta X^*) \\ &\approx M + \frac{1}{K} \underbrace{(X \Delta X^* + \Delta X X^*)}_{\triangleq \Delta M} \end{aligned} \quad (39)$$

4. Calcul des erreurs d'estimation en fonction des erreurs sur le pseudo-spectre

En présence de bruit ou d'erreur de modèle, on note

$$\tilde{\theta}_p = \theta_p + \Delta\theta_p, \quad (40)$$

l'estimée de θ_p à partir du pseudo-spectre perturbé :

$$\widetilde{F}'(\theta) = \mathbf{a}^*(\theta) \widetilde{M} \mathbf{a}(\theta). \quad (41)$$

Autrement dit, $\tilde{\theta}_p$ est un *extremum* de (41), donc

$$\widetilde{F}'(\tilde{\theta}_p) = 0. \quad (42)$$

Avec une approximation au premier ordre en $\Delta\theta_p$, sous l'hypothèse que les perturbations n'influent que faiblement l'estimation des DDA, c'est à dire que θ_p se trouve dans un voisinage de $\tilde{\theta}_p$, on écrit :

$$\widetilde{F}'(\tilde{\theta}_p) \approx \widetilde{F}'(\theta_p) + (\tilde{\theta}_p - \theta_p) \widetilde{F}''(\theta_p), \quad (43)$$

d'où on déduit, en tenant compte de (40) et (42)

$$\Delta\theta_p = -\frac{\widetilde{F}'(\theta_p)}{\widetilde{F}''(\theta_p)}. \quad (44)$$

Exprimons maintenant les dérivées première et seconde du pseudo-spectre perturbé (41), au point θ_p . D'après (41), et parce que M est hermitienne, on a

$$\widetilde{F}'(\theta_p) = 2 \text{Re} \left[\mathbf{a}^*(\theta_p) \widetilde{M} \mathbf{a}'(\theta_p) \right], \quad (45)$$

où \mathbf{a}' est le vecteur dont les composantes sont les dérivées respectives des composantes de \mathbf{a} par rapport à θ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'(\theta) &= \left[0, j \frac{d\varphi_2}{d\theta} e^{j\varphi_2}, \dots, j \frac{d\varphi_M}{d\theta} e^{j\varphi_M} \right]^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j \frac{d\varphi_2}{d\theta} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & j \frac{d\varphi_M}{d\theta} \end{bmatrix} \mathbf{a}(\theta) \triangleq \Phi_1(\theta) \mathbf{a}(\theta). \end{aligned} \quad (46)$$

A partir de (45) et de (46), sachant que dans les cas qui nous intéressent ΔM est hermitienne (voir les équations (25), (37), (38) et (39)), on obtient facilement

$$\widetilde{F}'(\theta_p) \approx F'(\theta_p) + 2 \text{Re} \left[\mathbf{a}^*(\theta_p) \underbrace{\Delta M \Phi_1(\theta_p) \mathbf{a}(\theta_p)}_{\triangleq \Delta F'} \right]. \quad (47)$$

De la même manière,

$$\widetilde{F}''(\theta_p) = 2 \text{Re} \left[\mathbf{a}^*(\theta_p) \widetilde{M} \mathbf{a}''(\theta_p) \right] + 2 \mathbf{a}'^*(\theta_p) \widetilde{M} \mathbf{a}'(\theta_p), \quad (48)$$

où \mathbf{a}'' est le vecteur dont les composantes sont les dérivées secondes respectives des composantes de \mathbf{a} , par rapport à θ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}''(\theta) &= \left[0, \left[j \frac{d^2\varphi_2}{d\theta^2} - \left(\frac{d\varphi_2}{d\theta} \right)^2 \right] e^{j\varphi_2}, \dots, \right. \\ &\quad \left. \left[j \frac{d^2\varphi_M}{d\theta^2} - \left(\frac{d\varphi_M}{d\theta} \right)^2 \right] e^{j\varphi_M} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j \frac{d^2\varphi_2}{d\theta^2} - \left(\frac{d\varphi_2}{d\theta} \right)^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & j \frac{d^2\varphi_M}{d\theta^2} - \left(\frac{d\varphi_M}{d\theta} \right)^2 \end{bmatrix} \mathbf{a}(\theta) \\ &\triangleq \Phi_2(\theta) \mathbf{a}(\theta). \end{aligned} \quad (49)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & \tilde{F}''(\theta_p) \\ & + 2\text{Re}[\mathbf{a}^*(\theta_p)\Delta\mathbf{M}\Phi_2(\theta_p)\mathbf{a}(\theta_p)] \\ & + 2\mathbf{a}^*(\theta_p)\Phi_1^*(\theta_p)\Delta\mathbf{M}\Phi_1(\theta_p)\mathbf{a}(\theta_p) \\ & \triangleq F''(\theta_p) + \Delta F'' \end{aligned} \quad (50)$$

Soit enfin

$$\begin{aligned} \Delta\theta_p &= -\frac{F'(\theta_p) + \Delta F'(\theta_p)}{F''(\theta_p) + \Delta F''(\theta_p)} \\ &\approx -\frac{F'(\theta_p)}{F''(\theta_p)} + \frac{F'(\theta_p)\Delta F''(\theta_p) - F''(\theta_p)\Delta F'(\theta_p)}{F''(\theta_p)^2} \end{aligned} \quad (51)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (51) est lié au biais inhérent à la méthode, c'est à dire l'erreur d'estimation en l'absence de toute perturbation. Ce terme est nul en ce qui concerne les méthodes à haute résolution, pour lesquelles $F'(\theta_p) = 0$. Mais ce n'est pas le cas pour la formation de voies lorsqu'il y a plusieurs sources.

Dans la suite du document, l'argument θ_p sera omis pour alléger les notations. Nous arrivons finalement à l'expression de l'erreur d'estimation en fonction du pseudo-spectre généralisé et de ses dérivées :

$$\Delta\theta_p \approx \frac{1}{F''^2} (F'\Delta F'' - F''\Delta F' - F'F'') \quad (52)$$

Il ne reste plus qu'à faire apparaître dans cette formule les quantités \mathbf{M} et $\Delta\mathbf{M}$, avant d'en déduire l'erreur d'estimation provoquée par des perturbations quelconques. D'après (47) et (50), on trouve :

$$\begin{aligned} \Delta\theta_p &= \frac{1}{F''^2} \left(\mathbf{a}^* \left[\Delta\mathbf{M}(F'\Phi_2 - F''\Phi_1) \right. \right. \\ & \left. \left. + (F'\Phi_2^* - F''\Phi_1^*)\Delta\mathbf{M}^* + 2F'\Phi_1^*\Delta\mathbf{M}\Phi_1 \right] \mathbf{a} - F'F'' \right) \end{aligned} \quad (53)$$

où F' et F'' sont des scalaires réels et où le vecteur \mathbf{a} , ainsi que les matrices Φ_1 et Φ_2 sont calculés en $\theta = \theta_p$. Si l'on pose

$$\Phi_3 = F'\Phi_2 - F''\Phi_1 \quad (54)$$

il vient finalement

$$\Delta\theta_p = \frac{2}{F''^2} (\text{Re}[\mathbf{a}^*\Delta\mathbf{M}\Phi_3\mathbf{a}] + F'\mathbf{a}^*\Phi_1^*\Delta\mathbf{M}\Phi_1\mathbf{a}) - \frac{F'}{F''} \quad (55)$$

5. Expressions générales de l'erreur d'estimation

5.1. LA MÉTHODE MUSIC

Pour cette méthode, $F'(\theta_p) = 0$, tandis que la dérivée seconde en θ_p s'écrit

$$F''(\theta_p) = 2\text{Re}[\mathbf{a}^*\mathbf{V}_B\mathbf{V}_B^*\mathbf{a}''] + 2\mathbf{a}'^*\mathbf{V}_B\mathbf{V}_B^*\mathbf{a}' \quad (56)$$

De plus, $\mathbf{a}^*(\theta_p)\mathbf{V}_B = \mathbf{0}$, et

$$F''(\theta_p) = 2\mathbf{a}^*\Phi_1^*\mathbf{V}_B\mathbf{V}_B^*\Phi_1\mathbf{a} \quad (57)$$

Si on reporte les formules (25), (26), (54) et (57) dans (55), on obtient

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re}[\mathbf{a}^*\mathbf{V}_S\Sigma_S^{-1}\mathbf{U}_S^*\Delta\mathbf{X}^*\mathbf{V}_B\mathbf{V}_B^*\Phi_1\mathbf{a}]}{\mathbf{a}^*\Phi_1^*\mathbf{V}_B\mathbf{V}_B^*\Phi_1\mathbf{a}} \quad (58)$$

Et en introduisant, comme Li et Vaccaro [Li91], les notations suivantes

$$\alpha_M = \mathbf{V}_B\mathbf{V}_B^*\Phi_1\mathbf{a}, \quad (59a)$$

$$\beta_M = \mathbf{U}_S\Sigma_S^{-1}\mathbf{V}_S^*\mathbf{a}, \quad (59b)$$

$$\gamma_M = \mathbf{a}^*\Phi_1^*\alpha_M, \quad (59c)$$

on retrouve la formule [Li91]

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re}[\beta_M^*\Delta\mathbf{X}^*\alpha_M]}{\gamma_M} \quad (60)$$

Cette formule représente l'erreur (au premier ordre), due aux perturbations $\Delta\mathbf{X}$, sur l'estimée d'une DDA par l'algorithme Music. Elle tend à laisser croire que pour des perturbations centrées, l'estimateur considéré n'est pas biaisé. Ceci n'est toutefois vrai qu'au premier ordre [Porat88, Xu92].

5.2. LA MÉTHODE DU PROPAGATEUR

Pour cette méthode, de la même manière que pour la méthode Music, sachant que $F'(\theta_p) = 0$ et que $\mathbf{a}^*(\theta_p)\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, on obtient

$$F''(\theta_p) = 2\mathbf{a}^*\Phi_1^*\mathbf{Q}\mathbf{Q}^*\Phi_1\mathbf{a}, \quad (61)$$

et si on reporte les formules (35), (37), (54) et (61) dans (55) :

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} \left[\mathbf{a}^* \left[\frac{(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^*)^{-1}\mathbf{X}_1}{\mathbf{0}} \right] \Delta\mathbf{X}^*\mathbf{Q}\mathbf{Q}^*\Phi_1\mathbf{a} \right]}{\mathbf{a}^*\Phi_1^*\mathbf{Q}\mathbf{Q}^*\Phi_1\mathbf{a}}, \quad (62)$$

1. les formules correspondant au propagateur calculé à partir de la MIS ne seront pas données ici par souci de concision. Seule l'expression de β_p est différente dans ce cas; elle se déduit de l'équation (36).

dans le cas où le propagateur est calculé à partir des données¹ (22).

Enfin si on pose

$$\alpha_P = Q Q^* \Phi_1 a, \quad (63a)$$

$$\beta_P^* = a^* \begin{bmatrix} (X_1 X_1^*)^{-1} X_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (63b)$$

$$\gamma_P = a^* \Phi_1^* \alpha_P, \quad (63c)$$

on déduit une formule analogue à (60), soit

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} [\beta_P^* \Delta X^* \alpha_P]}{\gamma_P}. \quad (64)$$

5.3. LA MÉTHODE DU PROPAGATEUR AVEC ORTHONORMALISATION

Les formules, pour cette méthode, s'établissent de manière rigoureusement identique au développement précédent. On a tout d'abord

$$F''(\theta_p) = 2a^* \Phi_1^* \Pi_Q \Phi_1 a, \quad (65)$$

puis si on reporte les formules (35), (38), (54), et (65) dans (55) :

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} \left[a^* \begin{bmatrix} (X_1 X_1^*)^{-1} X_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta X^* \Pi_Q \Phi_1 a \right]}{a^* \Phi_1^* \Pi_Q \Phi_1 a}. \quad (66)$$

Enfin si on pose

$$\alpha_O = \Pi_Q \Phi_1 a, \quad (67a)$$

$$\beta_O = \beta_P, \quad (67b)$$

$$\gamma_O = a^* \Phi_1^* \alpha_O, \quad (67c)$$

on déduit une formule analogue à (64), soit

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} [\beta_P^* \Delta X^* \alpha_O]}{\gamma_O}. \quad (68)$$

5.4. LA FORMATION DE VOIES

Pour cette méthode, ni la dérivée première, ni aucun des termes de la dérivée seconde, ne s'annulent en θ_p . On a donc

$$F''(\theta_p) = \frac{2}{K} \text{Re} [a^* X X^* \Phi_1 a], \quad (69)$$

et

$$F''(\theta_p) = \frac{2}{K} \left(\text{Re} [a^* X X^* \Phi_2 a] + a^* \Phi_1^* X X^* \Phi_1 a \right). \quad (70)$$

Si on reporte les formules (39), (54), (69) et (70) dans (55), on obtient

$$\Delta\theta_p = \frac{2 \left(\text{Re} [a^* X \Delta X^* \Phi_3 a + a^* \Delta X X^* \Phi_3 a] + F' a^* \Phi_1^* X \Delta X^* \Phi_1 a \right)}{K F''^2} \frac{F'}{F''}, \quad (71)$$

et si on pose

$$\alpha'_F = \Phi_3 a, \quad \alpha_F = X^* \alpha'_F, \quad (72a)$$

$$\alpha''_F = \Phi_1 a, \quad \beta'_F = X^* a, \quad (72b)$$

$$\beta_F = a, \quad \beta''_F = F' X^* \Phi_1 a, \quad (72c)$$

$$\gamma_F = K F''^2, \quad (72d)$$

on déduit

$$\Delta\theta_p = \frac{2}{\gamma_F} \text{Re} \left[\beta_F'^* \Delta X^* \alpha_F'' + \beta_F'^* \Delta X^* \alpha_F' + \beta_F^* \Delta X \alpha_F - \frac{K F' F''}{2} \right]. \quad (73)$$

6. Expressions de l'erreur d'estimation en présence de bruit de mesure

Le bruit de mesure est ici modélisé, sur chaque capteur, par une variable aléatoire centré, spatialement et temporellement blanche et de variance σ^2 . Dans ce cas d'un bruit de mesure, la perturbation additive ΔX a une signification réelle :

$$\Delta X = B, \quad (74)$$

où la matrice B , de dimension (M, K) contient les K échantillons du bruit correspondant aux K mesures sur les M capteurs.

A partir de la formule (60), Li et Vaccaro ont obtenu, dans ce cas précis de perturbation, une expression au premier ordre de l'erreur en moyenne quadratique de l'estimation des DDA pour la méthode Music [Li91] :

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{\|\alpha_M\|^2 \|\beta_M\|^2 \sigma^2}{2\gamma_M^2}. \quad (75)$$

De part la ressemblance entre les relations (60) et (64), on en déduit une expression analogue à (75) pour la méthode du propagateur :

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{\|\alpha_P\|^2 \|\beta_P\|^2 \sigma^2}{2\gamma_P^2}, \quad (76)$$

et pour la méthode du propagateur avec orthonormalisation :

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{\|\alpha_O\|^2 \|\beta_O\|^2 \sigma^2}{2\gamma_O^2}. \quad (77)$$

Nous établissons enfin dans l'annexe A une formule analogue pour la formation de voies :

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{1}{\gamma_F^2} E + \frac{(KF'F'')^2}{\gamma_F^2}, \quad (78)$$

où E est définie par

$$E = 2\sigma^2 \left(\|\alpha_F''\|^2 \|\beta_F''\|^2 + \|\alpha_F'\|^2 \|\beta_F'\|^2 + \|\alpha_F\|^2 \|\beta_F\|^2 \right. \\ \left. + 2\text{Re}[\alpha_F^* \alpha_F'' \beta_F''^* \beta_F'] + 2\text{Re}[\beta_F^* \alpha_F'' \beta_F''^* \alpha_F] \right. \\ \left. + 2\text{Re}[\beta_F^* \alpha_F' \beta_F'^* \alpha_F] \right). \quad (79)$$

7. Expressions de l'erreur d'estimation en présence de perturbations sur les gains des capteurs ou de bruit de couplage

Dans le cas d'un bruit de modèle, les perturbations agissent directement sur les éléments de la matrice des vecteurs directionnels. Choisir dans ce cas un modèle additif n'est pas forcément adapté à l'origine physique des perturbations. Nous allons voir notamment (section 8) que des déformations sur la position des capteurs n'induisent une perturbation additive sur les éléments de la matrice des vecteurs directionnels qu'au prix d'une approximation au premier ordre. Cette approximation n'est pas nécessaire pour des perturbations dues au couplage inter-capteurs ou aux différences de gain d'un capteur à l'autre.

7.1. BRUIT DE COUPLAGE

Deux capteurs sont dits couplés quand la réponse de l'un influe sur la réponse de l'autre. Si C est la matrice de couplage, alors le couplage perturbe la matrice des vecteurs directionnels de la manière suivante

$$\tilde{A} = CA, \quad (80)$$

où \tilde{A} est la matrice des vecteurs directionnels perturbée par rapport à celle supposée connue (A), avec

$$C = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & C^{(1)} \\ & & \ddots & \\ C^{(1)*} & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = I_M + \Delta C, \quad (81)$$

où $C^{(1)}$ est la sous-matrice contenant les coefficients de couplage inter-capteurs et où la matrice ΔC est obtenue à partir de la matrice C en mettant des zéros sur la diagonale principale. On a donc

$$\tilde{A} = A + \Delta CA = A + \Delta A. \quad (82)$$

On obtient bien, d'après (16), une perturbation additive sur la matrice des données

$$\Delta X = \Delta AS = \Delta AA^\# X, \quad (83)$$

où $^\#$ représente le pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose.

En reportant (83) respectivement dans (26) et dans (35), on obtient aisément des expressions simplifiées pour ΔV_B [Li91] et pour ΔQ (voir annexe C) :

$$\Delta V_B = -A^\# \Delta A^* V_B, \quad (84)$$

et

$$\Delta Q = - \begin{bmatrix} (A_1^*)^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta A^* Q. \quad (85)$$

Il est à noter que la formule (85) est la même, que le propagateur soit calculé à partir des données, par l'équation (22), ou à partir des éléments de la MIS, par l'équation (23).

7.2. BRUIT SUR LES GAINS DES CAPTEURS

Généralement les gains complexes des capteurs peuvent être inconnus ou du moins non égaux d'un capteur à l'autre. On modélise le gain du capteur m par $g_m \triangleq 1 + \Delta g_m$.

Le vecteur directionnel est donc perturbé de façon additive par rapport à son modèle nominal. Il s'écrit :

$$\tilde{\alpha}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 + \Delta g_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 + \Delta g_M \end{bmatrix} \alpha(\theta) \triangleq \mathcal{G} \alpha(\theta), \quad (86)$$

où, si la matrice $\Delta \mathcal{G}$ est la matrice diagonale des perturbations sur les gains complexes des capteurs, on a

$$\mathcal{G} = \text{Id}_M + \Delta \mathcal{G}. \quad (87)$$

On obtient finalement

$$\tilde{A} = A + \Delta A = A + \Delta \mathcal{G} A, \quad (88)$$

2. Cette remarque est valable pour tout le reste de la section, où l'on ne considère plus que des perturbations affectant directement la matrice A des vecteurs directionnels.

c'est à dire, comme pour le bruit de couplage, une perturbation additive ΔX sur les données qui s'exprime de manière analogue à (83). Les formules (84) et (85) restent donc valables, ce qui permet d'étudier les effets des deux types de perturbations (bruit de couplage et bruit sur les gains des capteurs) de manière commune.

Effet sur la méthode Music : si on reporte les formules (25) et (84) dans (55), on obtient [Li91]

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} \left[\mathbf{a}^* \mathbf{A}^{\#*} \Delta \mathbf{A}^* \mathbf{V}_B \mathbf{V}_B^* \Phi_1 \mathbf{a} \right]}{\gamma_M}, \quad (89)$$

et si on pose

$$\beta_{M_1} = \mathbf{A}^{\#} \mathbf{a}, \quad (90)$$

on en déduit

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} \left[\beta_{M_1}^* \Delta \mathbf{A}^* \alpha_M \right]}{\gamma_M}. \quad (91)$$

Effet sur la méthode du propagateur : si on reporte les formules (83) et (85) dans (62), on obtient

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} \left[\mathbf{a}^* \left[\begin{array}{c} (\mathbf{A}_1^*)^{-1} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \Delta \mathbf{A}^* \mathbf{Q} \mathbf{Q}^* \Phi_1 \mathbf{a} \right]}{\gamma_P}, \quad (92)$$

et si on pose

$$\beta_{P_1} = \left[\mathbf{A}_1^{-1} \mid \mathbf{0} \right] \mathbf{a}, \quad (93)$$

on en déduit

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} \left[\beta_{P_1}^* \Delta \mathbf{A}^* \alpha_P \right]}{\gamma_P}. \quad (94)$$

De même, en utilisant les formules (66) et (83), on obtient l'erreur d'estimation commise par la méthode du propagateur avec orthonormalisation :

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} \left[\beta_{P_1}^* \Delta \mathbf{A}^* \alpha_O \right]}{\gamma_O}. \quad (95)$$

Effet sur la formation de voies : si on reporte les formules (39) et (83) dans (71), on obtient

$$\Delta\theta_p = \frac{2}{\gamma_F} \left\{ \text{Re} \left[\mathbf{a}^* \mathbf{X} \mathbf{X}^* \mathbf{A}^{\#*} \Delta \mathbf{A}^* \Phi_3 \mathbf{a} + \mathbf{a}^* \mathbf{F}' \Phi_1^* \mathbf{X} \mathbf{X}^* \mathbf{A}^{\#*} \Delta \mathbf{A}^* \Phi_1 \mathbf{a} + \mathbf{a}^* \Delta \mathbf{A} \mathbf{A}^{\#} \mathbf{X} \mathbf{X}^* \Phi_3 \mathbf{a} \right] - \frac{K \mathbf{F}' \mathbf{F}''}{2} \right\}, \quad (96)$$

et si on pose

$$\alpha_{F_1} = \mathbf{A}^{\#} \mathbf{X} \alpha_F, \quad (97a)$$

$$\beta'_{F_1} = \mathbf{A}^{\#} \mathbf{X} \beta'_F, \quad (97b)$$

$$\beta''_{F_1} = \mathbf{A}^{\#} \mathbf{X} \beta''_F, \quad (97c)$$

on en déduit

$$\Delta\theta_p = \frac{2}{\gamma_F} \text{Re} \left[\beta_{F_1}^{\prime\prime*} \Delta \mathbf{A}^* \alpha_{F_1}'' + \beta_{F_1}^{\prime*} \Delta \mathbf{A}^* \alpha_{F_1}' + \beta_{F_1}^* \Delta \mathbf{A} \alpha_{F_1} - \frac{K \mathbf{F}' \mathbf{F}''}{2} \right]. \quad (98)$$

7.3. EXEMPLE D'UN COUPLAGE ENTRE CAPTEURS VOISINS À COEFFICIENT C DÉTERMINISTE ET RÉEL

Dans ce cas,

$$\Delta \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & c & \dots & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \dots & c & 0 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \triangleq c \mathbf{J}. \quad (99)$$

Il suffit alors de reporter (99) dans les expressions (91), (94) et (98) pour obtenir l'erreur d'estimation générée respectivement par les méthodes Music, propagateur et Formation de voies, soient

• **Music :**

$$\Delta\theta_p = \frac{c \text{Re} \left[\beta_{M_1}^* \mathbf{J} \alpha_M \right]}{\gamma_M}. \quad (100)$$

• **Propagateur :**

$$\Delta\theta_p = \frac{c \text{Re} \left[\beta_{P_1}^* \mathbf{J} \alpha_P \right]}{\gamma_P}. \quad (101)$$

• **Propagateur avec orthonormalisation :**

$$\Delta\theta_p = \frac{c \text{Re} \left[\beta_{P_1}^* \mathbf{J} \alpha_O \right]}{\gamma_O}. \quad (102)$$

• **Formation de voies :**

$$\Delta\theta_p = \frac{2c}{\gamma_F} \text{Re} \left[\beta_{F_1}^{\prime\prime*} \mathbf{J} \alpha_{F_1}'' + \beta_{F_1}^{\prime*} \mathbf{J} \alpha_{F_1}' + \beta_{F_1}^* \mathbf{J} \alpha_{F_1} - \frac{K \mathbf{F}' \mathbf{F}''}{2} \right]. \quad (103)$$

7.4. EXEMPLE D'UNE ERREUR SUR LE GAIN COMPLEXE DES CAPTEURS, ALÉATOIRE, CENTRÉE, BLANCHE, DE VARIANCE σ_g^2

Dans ce cas, la perturbation est définie par la matrice

$$\Delta \mathcal{G} = \text{diag}([0, \Delta \mathbf{g}^T]), \quad (104)$$

où les éléments de $\Delta \mathbf{g}$ sont $M - 1$ variables aléatoires complexes, centrées, indépendantes et de variance σ_g^2 .

Comme le premier capteur n'est, par hypothèse, pas affecté par la perturbation, on est amené à introduire la notation suivante : soit \mathbf{v} un vecteur quelconque, on notera $\mathbf{v} \downarrow$ le vecteur déduit de \mathbf{v} en remplaçant sa première composante par zéro. Il suffit alors de reporter (104) dans les expressions (88) d'une part, puis dans (91), (94) et (98) d'autre part, pour obtenir, par un calcul proche de celui présenté dans l'annexe A l'erreur d'estimation générée respectivement par la méthode Music, les méthodes du propagateur et la formation de voies, soient

• **Music :**

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{\|\alpha_{M\downarrow}\|^2 \|\beta_{M_1\downarrow}\|^2 \sigma_g^2}{2 \gamma_M^2}. \quad (105)$$

• **Propagateur :**

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{\|\alpha_{P\downarrow}\|^2 \|\beta_{P_1\downarrow}\|^2 \sigma_g^2}{2 \gamma_P^2}. \quad (106)$$

• **Propagateur avec orthonormalisation :**

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{\|\alpha_{O\downarrow}\|^2 \|\beta_{P_1\downarrow}\|^2 \sigma_g^2}{2 \gamma_O^2}. \quad (107)$$

• **Formation de voies :** nous établissons maintenant une formule pour la formation de voies par analogie avec (78)

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{1}{\gamma_F^2} E_1 + \frac{(KF'F'')^2}{\gamma_F^2}, \quad (108)$$

avec

$$\begin{aligned} E_1 = & 2\sigma_g^2 \left(\|\alpha_{F\downarrow}'\|^2 \|\beta_{F_1\downarrow}'\|^2 \right. \\ & + \|\alpha_{F\downarrow}'\|^2 \|\beta_{F_1\downarrow}'\|^2 + \|\alpha_{F_1\downarrow}'\|^2 \|\beta_{F\downarrow}'\|^2 \\ & + \alpha_{F\downarrow}' \alpha_{F\downarrow}'' \beta_{F_1\downarrow}' \beta_{F_1\downarrow}'' + \beta_{F\downarrow}' \alpha_{F\downarrow}'' \beta_{F_1\downarrow}' \alpha_{F_1\downarrow}'' + \beta_{F\downarrow}' \alpha_{F\downarrow}' \beta_{F_1\downarrow}' \alpha_{F_1\downarrow}'' \\ & + \beta_{F_1\downarrow}' \beta_{F_1\downarrow}'' \alpha_{F\downarrow}' \alpha_{F\downarrow}'' + \alpha_{F_1\downarrow}' \beta_{F_1\downarrow}' \alpha_{F\downarrow}' \beta_{F\downarrow}' \\ & \left. + \alpha_{F_1\downarrow}' \beta_{F_1\downarrow}' \alpha_{F\downarrow}' \beta_{F\downarrow}' \right). \end{aligned} \quad (109)$$

7.5. EXEMPLE D'UNE ERREUR DÉTERMINISTE SUR LE GAIN COMPLEXE DES CAPTEURS

Dans ce cas, les éléments de $\Delta \mathbf{g}$ (104) sont $M - 1$ tirages d'une variable aléatoire complexe, centrée, gaussienne, de variance σ_g^2 . Le vecteur ainsi obtenu est fixé pour toutes les mesures; il s'agit donc bien d'une perturbation déterministe. Il suffit alors de reporter (104) dans les expressions (91), (94) et (98) pour obtenir les erreurs d'estimation générées respectivement par la méthode Music, les méthodes du propagateur et la formation de voies, soient

• **Music :**

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} [\beta_{M_1}^* \Delta \mathcal{G}^* \alpha_M]}{\gamma_M}. \quad (110)$$

• **Propagateur :**

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} [\beta_{P_1}^* \Delta \mathcal{G}^* \alpha_P]}{\gamma_P}. \quad (111)$$

• **Propagateur avec orthonormalisation :**

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} [\beta_{P_1}^* \Delta \mathcal{G}^* \alpha_O]}{\gamma_O}. \quad (112)$$

• **Formation de voies :**

$$\begin{aligned} \Delta\theta_p = & \frac{2}{\gamma_F} \text{Re} \left[\beta_{F_1}''^* \Delta \mathcal{G}^* \alpha_{F\downarrow}' + \beta_{F_1}'^* \Delta \mathcal{G}^* \alpha_{F\downarrow}'' \right. \\ & \left. + \beta_{F\downarrow}'^* \Delta \mathcal{G}^* \alpha_{F_1} - \frac{KF'F''}{2} \right]. \end{aligned} \quad (113)$$

8. Expressions de l'erreur d'estimation en présence d'erreurs sur de positionnement des capteurs

Avant de traiter directement les perturbations sur les positions des capteurs, dont le modèle est moins facile à mettre en place. Considérons, dans un premier temps, que de telles déformations amènent simplement une perturbation additive sur les éléments de la matrice des vecteurs directionnels sans se soucier de la réalité physique de celle-ci. Appelons alors $\Delta \mathcal{A}$ la matrice contenant ces déformations; les formules (83), (84) et (85) restent valables et on obtient directement l'effet d'une telle perturbation sur les DDA estimées par la méthode Music, les méthodes du propagateur et la formation de voies respectivement à partir des formules (91), (94) et (98).

8.1. EXEMPLE D'UNE PERTURBATION ALÉATOIRE, COMPLEXE, CENTRÉE, BLANCHE ET DE VARIANCE σ_u^2 SUR LES ÉLÉMENTS DE LA MATRICE DES VECTEURS SOURCES

En utilisant l'analogie entre les formules (91), (94), (98) d'une part, et les formules (60), (64), (73), on obtient directement :

• **Music :**

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{\|\alpha_M\|^2 \|\beta_{M_1}\|^2 \sigma_u^2}{2\gamma_M^2}. \quad (114)$$

• **Propagateur :**

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{\|\alpha_P\|^2 \|\beta_{P_1}\|^2 \sigma_u^2}{2\gamma_P^2}. \quad (115)$$

• **Propagateur avec orthonormalisation :**

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{\|\alpha_O\|^2 \|\beta_{P_1}\|^2 \sigma_u^2}{2\gamma_O^2}. \quad (116)$$

• **Formation de voies :**

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{1}{\gamma_F^2} E_2 + \frac{(KF'F'')^2}{\gamma_F^2}, \quad (117)$$

avec

$$E_2 = 2\sigma_u^2 \left(\|\alpha_F''\|^2 \|\beta_{F_1}''\|^2 + \|\alpha_F'\|^2 \|\beta_{F_1}'\|^2 + \|\alpha_{F_1}\|^2 \|\beta_F\|^2 + 2\text{Re}[\alpha_F^* \alpha_F'' \beta_{F_1}''^* \beta_{F_1}'] + 2\text{Re}[\beta_F^* \alpha_F'' \beta_{F_1}''^* \alpha_{F_1}] + 2\text{Re}[\beta_F^* \alpha_F' \beta_{F_1}'^* \alpha_{F_1}] \right). \quad (118)$$

8.2. PRISE EN COMPTE DE PERTURBATIONS SUR LES POSITIONS DES CAPTEURS

Nous avons supposé, dans le paragraphe précédent, que des déformations sur les positions des capteurs engendraient une perturbation additive (ΔA) sur les éléments de la matrice des vecteurs sources (A). Nous relierons ici les éléments de la matrice ΔA aux déformations présentes sur les coordonnées des capteurs.

Le terme général de la matrice A s'écrit (pour la source j et le capteur i), dans le cas où l'antenne et les sources sont coplanaires et où la demi-longueur d'onde est choisie comme unité de mesure :

$$a_{ij} = e^{j\pi(x_i \sin \theta_j + y_i \cos \theta_j)} = e^{j\varphi_{ij}}. \quad (119)$$

Dans le cas où les coordonnées (x_i, y_i) subissent une déformation $(\Delta x_i, \Delta y_i)$, le terme général de la matrice perturbée \tilde{A} s'écrit (au premier ordre) :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= e^{j\pi((x_i + \Delta x_i) \sin \theta_j + (y_i + \Delta y_i) \cos \theta_j)} = e^{j(\varphi_{ij} + \Delta \varphi_{ij})} \\ &\approx e^{j\varphi_{ij}} (1 + j\Delta \varphi_{ij}) = a_{ij} + j\pi(\Delta x_i \sin \theta_j + \Delta y_i \cos \theta_j) a_{ij} \\ &= a_{ij} + \Delta a_{ij}. \end{aligned} \quad (120)$$

On en déduit l'expression de ΔA en fonction des erreurs sur les coordonnées des capteurs :

$$\Delta A = \Delta_x S_a + \Delta_y C_a, \quad (121)$$

où Δ_x et Δ_y sont des matrices carrées et diagonales de dimensions M , dont les termes diagonaux sont respectivement les erreurs Δx_i et Δy_i . Par ailleurs,

$$S_a \triangleq +j\pi [\sin \theta_1 \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \sin \theta_p \mathbf{a}(\theta_p)], \quad (122a)$$

$$C_a \triangleq +j\pi [\cos \theta_1 \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \cos \theta_p \mathbf{a}(\theta_p)]. \quad (122b)$$

En reportant l'équation (121) dans les formules (89), (92) et (96), on obtient l'expression de l'erreur d'estimation des DDA par la méthode Music, les méthodes du propagateur et la formation de voies, en fonction des erreurs sur les coordonnées des capteurs.

• **Music :** si on pose

$$\beta_{M_s} = S_a A^\# \mathbf{a}, \quad (123a)$$

$$\beta_{M_c} = C_a A^\# \mathbf{a}, \quad (123b)$$

on en déduit

$$\Delta \theta_p = \frac{\text{Re}[\beta_{M_s}^* \Delta_x^* \alpha_M + \beta_{M_c}^* \Delta_y^* \alpha_M]}{\gamma_M}. \quad (124)$$

• **Propagateur :** si on pose

$$\beta_{P_s} = S_a [A_1^{-1} \mid \mathbf{0}] \mathbf{a}, \quad (125a)$$

$$\beta_{P_c} = C_a [A_1^{-1} \mid \mathbf{0}] \mathbf{a}, \quad (125b)$$

on en déduit

$$\Delta \theta_p = \frac{\text{Re}[\beta_{P_s}^* \Delta_x^* \alpha_P + \beta_{P_c}^* \Delta_y^* \alpha_P]}{\gamma_P}. \quad (126)$$

• **Propagateur avec orthonormalisation :**

$$\Delta \theta_p = \frac{\text{Re}[\beta_{P_s}^* \Delta_x^* \alpha_O + \beta_{P_c}^* \Delta_y^* \alpha_O]}{\gamma_O}. \quad (127)$$

• **Formation de voies :** si on pose

$$\alpha_{F_s} = S_a A^\# X \alpha_F, \quad \alpha_{F_c} = C_a A^\# X \alpha_F, \quad (128a)$$

$$\beta'_{F_s} = S_a A^\# X \beta'_F, \quad \beta'_{F_c} = C_a A^\# X \beta'_F, \quad (128b)$$

$$\beta''_{F_s} = S_a A^\# X \beta''_F, \quad \beta''_{F_c} = C_a A^\# X \beta''_F, \quad (128c)$$

on en déduit

$$\Delta\theta_p = \frac{2}{\gamma_F} \operatorname{Re} \left[\beta_{F_s}''^* \Delta_x \alpha_F'' + \beta_{F_c}''^* \Delta_y \alpha_F'' + \beta_{F_s}''^* \Delta_x \alpha_F' + \beta_{F_c}''^* \Delta_y \alpha_F' + \beta_{F_s}''^* \Delta_x \alpha_{F_s}' + \beta_{F_c}''^* \Delta_y \alpha_{F_c}' - \frac{KF'F''}{2} \right] \quad (129)$$

8.3. EXEMPLE OÙ LES COORDONNÉES DES $M - 1$ DERNIERS CAPTEURS SONT PERTURBÉES PAR DES VARIABLES ALÉATOIRES, RÉELLES, CENTRÉES, INDÉPENDANTES ET DE VARIANCE σ_p^2

Les perturbations sur les abscisses sont indépendantes de celles sur les ordonnées. Le calcul se mène donc d'une manière analogue à celui présenté dans la sous-section 6, en tenant compte du fait que les matrices de perturbations (Δ_x et Δ_y) sont diagonales et réelles. Si l'indice i désigne le i^e élément des vecteurs concernés, on obtient finalement (voir annexe B) l'expression de l'erreur quadratique moyenne d'estimation commises par les méthodes suivantes :

• Music :

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{\sigma_p^2}{\gamma_M^2} \sum_{i=2}^M |\alpha_{M_i}|^2 (|\beta_{M_{s_i}}|^2 + |\beta_{M_{c_i}}|^2) \quad (130)$$

• Propagateur :

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{\sigma_p^2}{\gamma_P^2} \sum_{i=2}^M |\alpha_{P_i}|^2 (|\beta_{P_{s_i}}|^2 + |\beta_{P_{c_i}}|^2) \quad (131)$$

• Propagateur avec orthonormalisation :

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{\sigma_p^2}{\gamma_O^2} \sum_{i=2}^M |\alpha_{O_i}|^2 (|\beta_{P_{s_i}}|^2 + |\beta_{P_{c_i}}|^2) \quad (132)$$

• Formation de voies :

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{1}{\gamma_F^2} E_3 + \frac{(KF'F'')^2}{\gamma_F^2} \quad (133)$$

avec

$$E_3 = 2\sigma_p^2 \left[|\alpha_{F_i}''|^2 (|\beta_{F_{s_i}}''|^2 + |\beta_{F_{c_i}}''|^2) + |\alpha_{F_i}'|^2 (|\beta_{F_{s_i}}'|^2 + |\beta_{F_{c_i}}'|^2) + |\beta_{F_i}|^2 (|\alpha_{F_{s_i}}|^2 + |\alpha_{F_{c_i}}|^2) + \operatorname{Re} \left[\alpha_{F_i}''^2 (\beta_{F_{s_i}}''^{*2} + \beta_{F_{c_i}}''^{*2}) + \alpha_{F_i}'^2 (\beta_{F_{s_i}}'^2 + \beta_{F_{c_i}}'^2) + \beta_{F_i}^{*2} (\alpha_{F_{s_i}}^2 + \alpha_{F_{c_i}}^2) + 2\alpha_{F_i}' \alpha_{F_i}'' (\beta_{F_{s_i}}'' \beta_{F_{s_i}}'^2 + \beta_{F_{c_i}}'' \beta_{F_{c_i}}'^2) \right] \right]$$

$$\begin{aligned} &+ 2\alpha_{F_i}'' \beta_{F_i}^* \left(\alpha_{F_{s_i}} \beta_{F_{s_i}}''^2 + \alpha_{F_{c_i}} \beta_{F_{c_i}}''^2 \right) \\ &+ 2\alpha_{F_i}'^2 \alpha_{F_i}'' \left(\beta_{F_{s_i}}''^2 \beta_{F_{s_i}}' + \beta_{F_{c_i}}''^2 \beta_{F_{c_i}}' \right) \\ &+ 2\alpha_{F_i}'' \beta_{F_i} \left(\alpha_{F_{s_i}}^* \beta_{F_{s_i}}''^* + \alpha_{F_{c_i}}^* \beta_{F_{c_i}}''^* \right) \\ &+ 2\alpha_{F_i}' \beta_{F_i}^* \left(\alpha_{F_{s_i}} \beta_{F_{s_i}}'^* + \alpha_{F_{c_i}} \beta_{F_{c_i}}'^* \right) \\ &+ 2\alpha_{F_i}' \beta_{F_i} \left(\alpha_{F_{s_i}}^* \beta_{F_{s_i}}'^* + \alpha_{F_{c_i}}^* \beta_{F_{c_i}}'^* \right) \end{aligned} \quad (134)$$

8.4. EXEMPLE D'UNE ANTENNE RECTILIGNE QUI A SUBI UNE DÉFORMATION DÉTERMINISTE ARRONDIE

Soit une antenne rectiligne à capteurs équidistants, qui se déforme selon un arc de cercle de rayon R dont le centre (Ω) se situe sur un axe perpendiculaire à l'antenne nominale et passant par le premier capteur (voir figure 1).

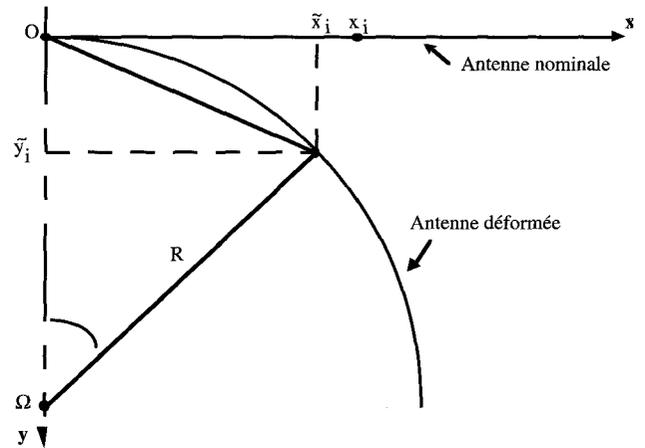


Figure 1.- Déformation circulaire

Il existe une relation entre les coordonnées des capteurs de l'antenne nominale et de l'antenne déformée. On choisit la distance inter-capteurs (demi-longueur d'onde) comme unité de mesure. Soient \tilde{x}_i et \tilde{y}_i les coordonnées du capteur i de l'antenne déformée, x_i et y_i les coordonnées du même capteur sur l'antenne nominale (voir figure 1). Si on suppose que la déformation ne modifie pas la distance intercapteur, alors x_i est bien la mesure de la longueur de l'arc entre le point O et la position du capteur i sur l'antenne déformée. On a donc

$$\tilde{x}_i = R \sin \frac{x_i}{R} = R \sin \frac{i-1}{R} \quad (135a)$$

$$\tilde{y}_i = R - R \cos \frac{x_i}{R} = R - R \cos \frac{i-1}{R} \quad (135b)$$

Si l'on procède à un développement au premier ordre de l'expression des coordonnées, en supposant $R \gg M$, il vient

$$\tilde{x}_i = i - 1 - \frac{(i-1)^3}{6R^2} = x_i + \Delta x_i \quad (136a)$$

$$\tilde{y}_i = 0 + R \frac{(i-1)^2}{2R} = y_i + \Delta y_i. \quad (136b)$$

On en déduit

$$\Delta_x = -\frac{1}{6R^2} \text{diag}[0, 1, \dots, (M-1)^3] \triangleq -\frac{M_{R_3}}{6R^2} \quad (137a)$$

$$\Delta_y = \frac{1}{2R} \text{diag}[0, 1, \dots, (M-1)^2] \triangleq -\frac{M_{R_2}}{2R}. \quad (137b)$$

En reportant les formules ci-dessus dans (124), (126) et (129), on obtient l'expression de l'erreur d'estimation des DDA en fonction du rayon de courbure de l'antenne pour les méthodes suivantes :

• **Music :**

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} \left[-\frac{1}{6R} \beta_{M_s}^* M_{R_3} \alpha_M + \frac{1}{2} \beta_{M_c}^* M_{R_2} \alpha_M \right]}{R \gamma_M}. \quad (138)$$

• **Propagateur :**

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} \left[-\frac{1}{6R} \beta_{P_s}^* M_{R_3} \alpha_P + \frac{1}{2} \beta_{P_c}^* M_{R_2} \alpha_P \right]}{R \gamma_P}. \quad (139)$$

• **Propagateur avec orthonormalisation :**

$$\Delta\theta_p = \frac{\text{Re} \left[-\frac{1}{6R} \beta_{P_s}^* M_{R_3} \alpha_O + \frac{1}{2} \beta_{P_c}^* M_{R_2} \alpha_O \right]}{R \gamma_O}. \quad (140)$$

• **Formation de voies :**

$$\begin{aligned} \Delta\theta_p = & \frac{2}{R\gamma_F} \text{Re} \left[-\frac{1}{6R} \left(\beta_{F_s}^* M_{R_3} \alpha_F' + \beta_{F_s}^* M_{R_3} \alpha_F' \right) \right. \\ & \left. + \beta_{F_s}^* M_{R_3} \alpha_{F_s} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\beta_{F_c}^* M_{R_2} \alpha_F' + \beta_{F_c}^* M_{R_2} \alpha_F' + \beta_F^* M_{R_2} \alpha_{F_c} \right) \\ & \left. - \frac{KF'F''}{2} \right]. \quad (141) \end{aligned}$$

8.5. EXEMPLE D'UNE ANTENNE LINÉAIRE QUI A SUBI UNE DÉFORMATION DÉTERMINISTE SINUSOÏDALE

Soit une antenne linéaire à capteurs équidistants, qui se déforme selon une sinusoïde de pulsation ω et d'amplitude d_m . On a donc, en utilisant des notations définies précédemment

$$\Delta y_i = d_m \sin \omega (x_i + \Delta x_i). \quad (142)$$

On impose de plus à l'antenne d'être simplement articulée, c'est à dire que l'écart entre deux capteurs consécutifs est conservé par rapport à l'écart nominal. On aboutit à la relation

$$\begin{aligned} (x_i + \Delta x_i - x_{i-1} - \Delta x_{i-1})^2 + (\Delta y_i - \Delta y_{i-1})^2 &= 1 \\ \iff (\Delta x_i - \Delta x_{i-1} + 1)^2 + (\Delta y_i - \Delta y_{i-1})^2 &= 1. \quad (143) \end{aligned}$$

Si on ne conserve que les termes d'erreur du premier ordre, (143) devient

$$\begin{aligned} 2\Delta x_i - 2\Delta x_{i-1} + 1 &= 1 \iff \Delta x_i = \Delta x_{i-1} \approx 0 \\ (\text{car } \Delta x_1 &\triangleq 0). \quad (144) \end{aligned}$$

Donc

$$\Delta x_i \approx 0, \quad (145a)$$

$$\Delta y_i = d_m \sin \omega (i-1). \quad (145b)$$

On en déduit que

$$\Delta_x \approx \mathbf{0}_M, \quad (146a)$$

$$\Delta_y = d_m \text{diag}[0, \sin \omega, \dots, \sin(M-1)\omega] \triangleq d_m M_{d_\omega}, \quad (146b)$$

où $\mathbf{0}_M$ est la matrice nulle, carrée, de dimension M . En reportant les formules ci-dessus dans (124), (126) et (129), on obtient l'expression de l'erreur d'estimation des DDA en fonction de l'amplitude et de la pulsation de la sinusoïde pour les méthodes suivantes :

– **Music :**

$$\Delta\theta_p = \frac{d_m}{\gamma_M} \text{Re} [\beta_{M_c}^* M_{d_\omega} \alpha_M]. \quad (147)$$

– **Propagateur :**

$$\Delta\theta_p = \frac{d_m}{\gamma_P} \text{Re} [\beta_{P_c}^* M_{d_\omega} \alpha_P]. \quad (148)$$

– **Propagateur avec orthonormalisation :**

$$\Delta\theta_p = \frac{d_m}{\gamma_O} \text{Re} [\beta_{P_c}^* M_{d_\omega} \alpha_O]. \quad (149)$$

– **Formation de voies :**

$$\begin{aligned} \Delta\theta_p = & \frac{2d_m}{\gamma_F} \text{Re} \left[\beta_{F_c}^* M_{d_\omega} \alpha_F' + \beta_{F_c}^* M_{d_\omega} \alpha_F' \right. \\ & \left. + \beta_F^* M_{d_\omega} \alpha_{F_c} - \frac{KF'F''}{2} \right]. \quad (150) \end{aligned}$$

9. Résultats et simulations

Nous illustrons ici les résultats obtenus ci-dessus, concernant l'influence de diverses perturbations prises séparément sur l'erreur d'estimation. Nous traçons, pour les perturbations définies ci-avant, à l'aide des formules obtenues, $\Delta\theta$ (voir figures 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14 et 15), ou $E\{|\Delta\theta|^2\}$ (ou plutôt la racine de l'erreur quadratique moyenne : REQM, exprimée en degrés) (voir figures 2, 3, 8, 9, 10) et 11, en « fonction de la perturbation ». Ces courbes théoriques (lignes) sont validées par des résultats issus de simulations (points). Nous nous intéressons plus particulièrement aux méthodes MPMCX (méthode du propagateur estimé par un processus des moindres carrés à partir de la matrice des données), MPMCM (MPMC estimé à l'aide de la MIS); MPMCOX (MPMCX avec orthonormalisation), MPMCOM (MPMCM avec orthonormalisation), Music et formation de voies.

Pour ces simulations, nous utilisons une antenne nominale rectiligne uniforme (la distance inter-capteur égale à une demi-longueur d'onde), de 20 capteurs. Cette antenne est éclairée par deux sources d'azimuts respectifs 10 et 20 degrés. Vingt réalisations du vecteur observation sont utilisées pour estimer la MIS et les résultats de simulations sont moyennés sur 100 essais. Nous nous intéressons à l'erreur d'estimation sur la première source.

Dans le cas du bruit de mesure, les courbes obtenues peuvent être comparées aux figures 2 à 5 de l'article [Li91].

D'une manière générale, on constate une bonne adéquation entre les formules théoriques approchées et les simulations, pour des perturbations faibles. D'autre part on observe que la formation de voies est souvent plus robuste que la méthode du propagateur et même parfois que la méthode Music. Enfin, il apparaît que la méthode du propagateur est moins sensible que les autres méthodes aux erreurs sur les positions des capteurs.

On vérifie aussi l'équivalence, démontrée dans [Marsal91], entre la méthode Music et la méthode MPMCO. D'autre part on constate que dans le cas non-asymptotique, il est indifférent d'estimer le propagateur à partir de la matrice des données ou de la MIS.

Ces résultats permettent aussi de comparer les influences respectives des différentes perturbations. Par exemple, en présence de bruit de mesure et d'erreurs aléatoires sur les coordonnées des capteurs, si ces deux perturbations sont supposées indépendantes, leurs contributions respectives sur la REQM vont s'ajouter. On constate, par exemple, d'après les figures 2 et 10, que pour

un RSB de 0 dB par source et par capteur, les déformations de l'antenne sont négligeables jusqu'à ce que l'erreur sur les coordonnées dépasse (en écart-type) 0,01 demi-longueur d'onde pour la méthode Music et 0,1 demi-longueur d'onde pour la méthode due propagateur. En ce qui concerne la formation de voies, on ne peut pas ajouter directement les REQM (puisque alors le biais serait compté deux fois) On peut toutefois remarquer qu'à 0 dB, l'influence du bruit est relativement minime, tandis que le biais est élevé. La figure 10 montre alors que l'erreur sur les coordonnées est négligeable jusqu'à 0,1 demi-longueur d'onde.

10. Conclusion

Nous avons analysé le comportement de diverses méthodes pour estimer les DDA en présence de perturbations d'origines physiques diverses. Nous avons établi un lien explicite entre les perturbations et l'erreur d'estimation sur les DDA qui en découle.

Nous avons ensuite montré comment les principales sources de perturbation (bruit de mesure, couplage, bruit sur les gains des capteurs ou bruit de position) génèrent une erreur additive sur les données.

Ces deux étapes nous ont permis d'établir une formule générale, valable au premier ordre, reliant la perturbation à l'erreur d'estimation.

Nous avons ensuite développé cette formule pour calculer l'effet sur chaque méthode des principales perturbations prises séparément. Des simulations ont validé, pour des gammes typiques de perturbations, les formules théoriques.

Les résultats obtenus étendent ceux présentés dans [Li91] à d'autres méthodes et à d'autres perturbations. Leur exploitation devrait permettre, d'une part de comparer les effets de chaque perturbation ainsi que la sensibilité de chaque méthode, et d'autre part, de définir des seuils empiriques pour détecter la présence ou non de perturbations afin d'envisager de les combattre.

Des prolongements à cette étude pourraient être de considérer :

- l'étude d'autres types de perturbations (corrélations partielles entre sources, les distorsions des fronts d'onde, ...),
- l'influence des perturbations sur d'autres critères que l'erreur d'estimation (pouvoir de séparation, performances en détection, ...)

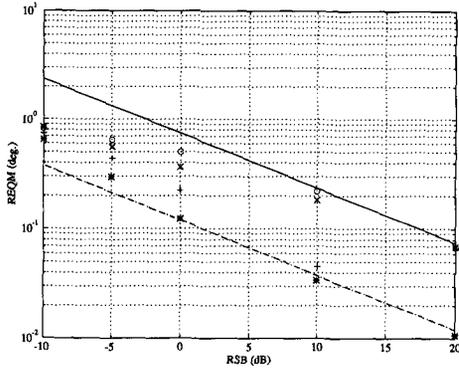


Figure 2. – Influence du bruit de mesure sur la REQM (degrés)

----- (x) : REQM théorique de la MPMCX (simulations); — (o) : REQM théorique de la MPMCM (simulations); (+) : REQM théorique de la MPMCOX (simulations); -.-.- (*) : REQM théorique de la MPMCOM (simulations)

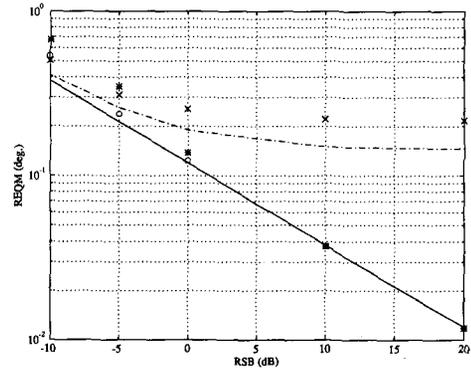


Figure 3. – Influence du bruit de mesure sur la REQM (degrés)

— (o) : REQM théorique de Music (simulations) -.-.- (*) : REQM théorique de la MPMCOM (simulations); -.-.- (x) : REQM théorique de la FV (simulations)

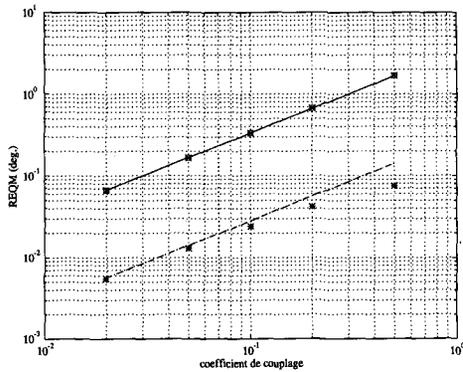


Figure 4. – Influence du bruit de couplage sur la REQM (degrés)

----- (x) : REQM théorique de la MPMCX (simulations); — (o) : REQM théorique de la MPMCM (simulations); (+) : REQM théorique de la MPMCOX (simulations); -.-.- (*) : REQM théorique de la MPMCOM (simulations)

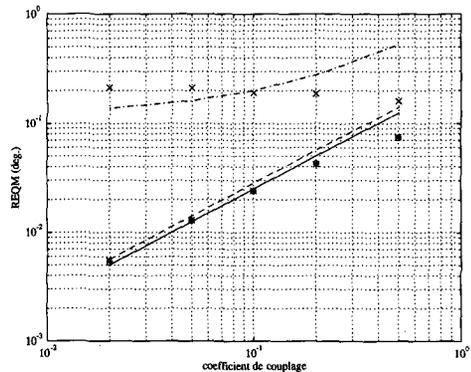


Figure 5. – Influence du bruit de couplage sur la REQM (degrés)

— (o) : REQM théorique de Music (simulations) -.-.- (*) : REQM théorique de la MPMCOM (simulations); -.-.- (x) : REQM théorique de la FV (simulations)

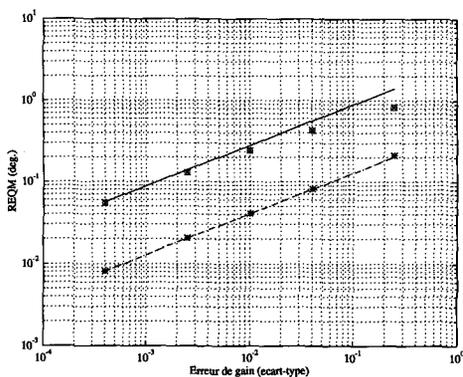


Figure 6. – Influence du bruit sur les gains des capteurs sur la REQM (degrés)

----- (x) : REQM théorique de la MPMCX (simulations); — (o) : REQM théorique de la MPMCM (simulations); (+) : REQM théorique de la MPMCOX (simulations); -.-.- (*) : REQM théorique de la MPMCOM (simulations)

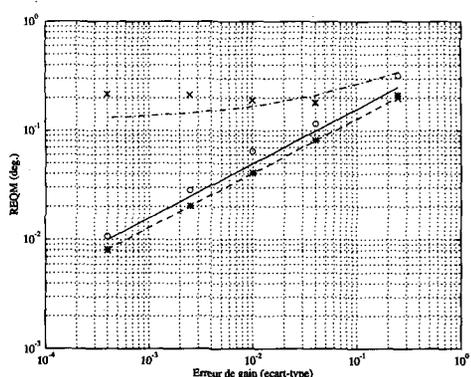


Figure 7. – Influence du bruit sur les gains des capteurs sur la REQM (degrés)

— (o) : REQM théorique de Music (simulations) -.-.- (*) : REQM théorique de la MPMCOM (simulations); -.-.- (x) : REQM théorique de la FV (simulations)

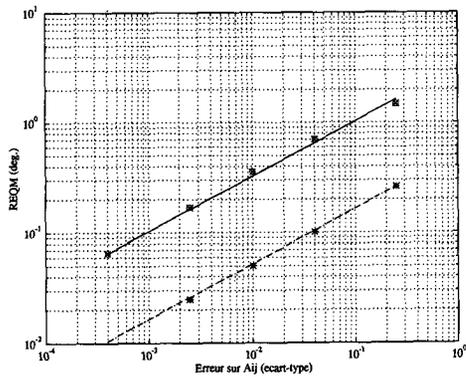


Figure 8. – Influence du bruit sur la matrice source sur la REQM (degrés)
 (x) : REQM théorique de la MPMCX (simulations); — (o) : REQM théorique de la MPMCM (simulations); (+) : REQM théorique de la MPM-COX (simulations); ---- (*) : REQM théorique de la MPMCOM (simulations)

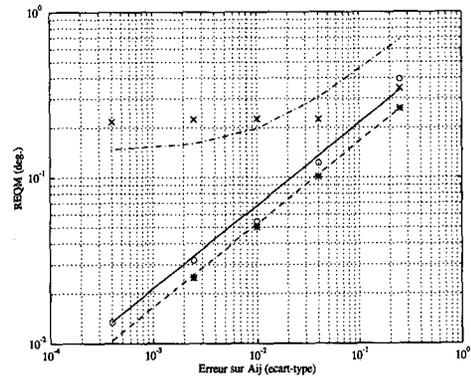


Figure 9. – Influence du Bruit sur la matrice source sur la REQM (degrés)
 — (o) : REQM théorique de Music (simulations) ---- (*) : REQM théorique de la MPMCOM (simulations); (x) : REQM théorique de la FV (simulations)

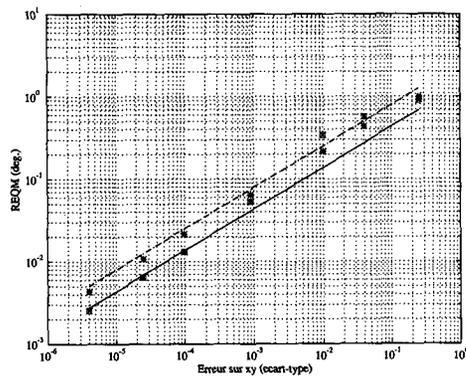


Figure 10. – Influence du bruit de position (coordonnées) sur la REQM (degrés)
 (x) : REQM théorique de la MPMCX (simulations); — (o) : REQM théorique de la MPMCM (simulations); (+) : REQM théorique de la MPM-COX (simulations); ---- (*) : REQM théorique de la MPMCOM (simulations)

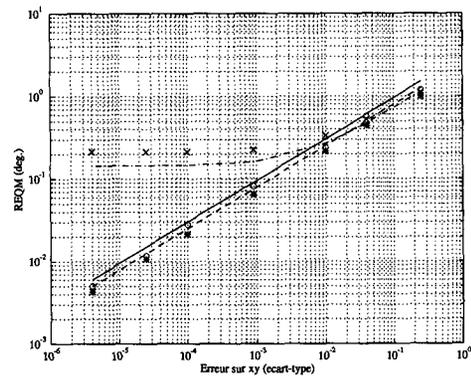


Figure 11. – Influence du bruit de position (coordonnées) sur la REQM (degrés)
 — (o) : REQM théorique de Music (simulations) ---- (*) : REQM théorique de la MPMCOM (simulations); (x) : REQM théorique de la FV (simulations)

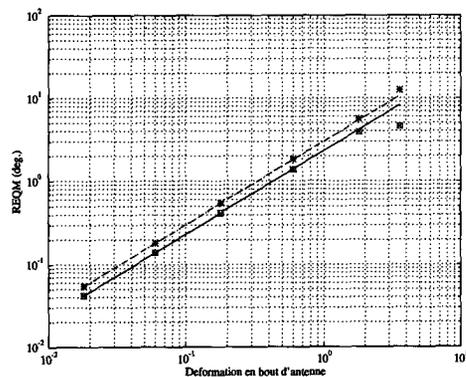


Figure 12. – Influence du bruit de position (rayon) sur la REQM (degrés)
 (x) : REQM théorique de la MPMCX (simulations); — (o) : REQM théorique de la MPMCM (simulations); (+) : REQM théorique de la MPM-COX (simulations); ---- (*) : REQM théorique de la MPMCOM (simulations)

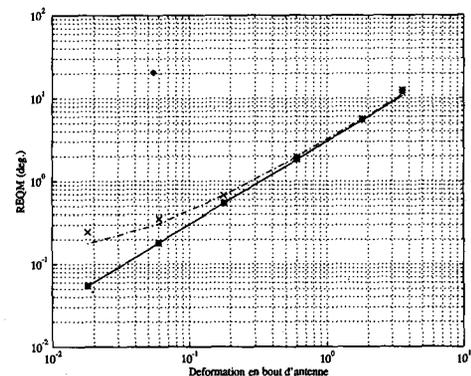


Figure 13. – Influence du bruit de position (rayon) sur la REQM (degrés)
 — (o) : REQM théorique de Music (simulations) ---- (*) : REQM théorique de la MPMCOM (simulations); (x) : REQM théorique de la FV (simulations)

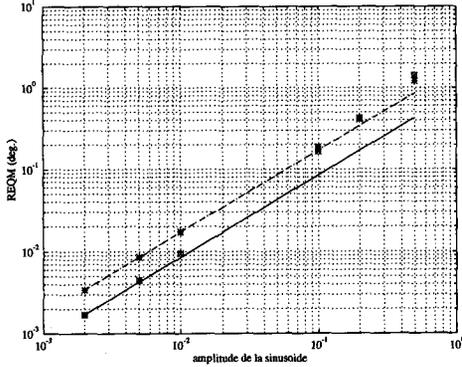


Figure 14. – Influence du bruit de position (sinusoïde) sur la REQM (degrés)
 - - - - (x) : REQM théorique de la MPMCX (simulations); — (o) : REQM théorique de la MPMCM (simulations); ····· (+) : REQM théorique de la MPMCOX (simulations); - - - - (*) : REQM théorique de la MPMCOM (simulations)

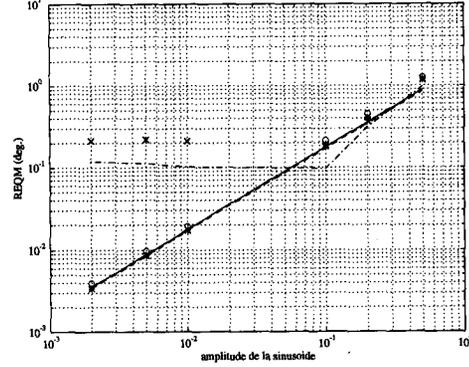


Figure 15. – Influence du bruit de position (sinusoïde) sur la REQM (degrés)
 — (o) : REQM théorique de Music (simulations) - - - - (*) : REQM théorique de la MPMCOM (simulations); - - - - (x) : REQM théorique de la FV (simulations)

Annexes

A ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE ET BRUIT DE MESURE

D'après (73) et (74) et d'après les hypothèses sur la matrice B , on peut écrire

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{1}{\gamma_F^2} E\left\{ \left| \beta_F''^* B^* \alpha_F'' + \alpha_F''^* B \beta_F'' + \beta_F^* B^* \alpha_F' + \alpha_F'^* B \beta_F' + \beta_F^* B \alpha_F + \alpha_F^* B^* \beta_F \right|^2 \right\} + \frac{(KF'F'')^2}{4\gamma_F^2}. \quad (A.2)$$

Il s'agit de développer l'espérance mathématique qui figure dans (A.2). Vont apparaître dans le calcul des termes aux structures suivantes :

– Première structure : $E\{Bxy^*B\}$

$$E\{Bxy^*B\} = E\left\{ \sum_i x_i b_i \sum_j y_j^* a_j^T \right\} = E\left\{ \sum_{i,j} x_i y_j^* b_i a_j^T \right\} = \sum_{i,j} x_i y_j^* E\left\{ b_i a_j^T \right\}, \quad (A.3)$$

D^{ij}

où les vecteurs x et y représentent indifféremment les vecteurs α et β , x_i (respectivement y_i) représente le i° élément de x (respectivement de y); b_i et a_j^T sont respectivement la i° colonne et la j° ligne de la matrice B .

Sous l'hypothèse que les colonnes de B sont des vecteurs aléatoires gaussiens et circulaire, la matrice D^{ij} est la matrice nulle.

– Deuxième structure : $E\{B^*xy^*B^*\}$

Ces termes sont nuls pour la même raison que ceux de la première structure.

– Troisième structure : $E\{Bxy^*B^*\}$ ou $E\{B^*xy^*B\}$

Par un calcul analogue à celui développé pour la première structure sachant que le bruit est blanc, on peut montrer que

$$E\{Bxy^*B^*\} = E\{B^*xy^*B\} = \sigma^2 y^* x I_M. \quad (A.4)$$

Si on pose

$$E \triangleq E\left\{ \left| \beta_F''^* B^* \alpha_F'' + \alpha_F''^* B \beta_F'' + \beta_F^* B^* \alpha_F' + \alpha_F'^* B \beta_F' + \beta_F^* B \alpha_F + \alpha_F^* B^* \beta_F \right|^2 \right\}, \quad (A.5)$$

il vient, en ne retenant que les termes non nuls :

$$E = 2\beta_F''^* E\{B^* \alpha_F'' \alpha_F''^* B\} \beta_F'' + 2\beta_F''^* E\{B^* \alpha_F' \alpha_F'^* B\} \beta_F'' + 2\beta_F''^* E\{B^* \alpha_F'' \beta_F''^* B\} \alpha_F + 2\alpha_F''^* E\{B \beta_F'' \beta_F''^* B^*\} \alpha_F' + 2\alpha_F''^* E\{B \beta_F'' \alpha_F^* B^*\} \beta_F + 2\beta_F^* E\{B^* \alpha_F' \alpha_F'^* B\} \beta_F + 2\beta_F^* E\{B^* \alpha_F' \beta_F^* B\} \alpha_F + 2\alpha_F^* E\{B \beta_F' \alpha_F^* B^*\} \beta_F + 2\alpha_F^* E\{B \beta_F' \alpha_F^* B^*\} \beta_F + 2\beta_F^* E\{B \alpha_F \alpha_F^* B^*\} \beta_F, \quad (A.6)$$

soit, en tenant compte de (A.4) :

$$E = 2\sigma^2 \left(\|\alpha''_F\|^2 \|\beta''_F\|^2 + \|\alpha'_F\|^2 \|\beta'_F\|^2 + \|\alpha_F\|^2 \|\beta_F\|^2 \right. \\ \left. + 2\operatorname{Re} \left[\alpha'^*_F \alpha''_F \beta''^*_F \beta'_F \right] + 2\operatorname{Re} \left[\beta'^*_F \alpha''_F \beta''^*_F \alpha_F \right] \right. \\ \left. + 2\operatorname{Re} \left[\beta'^*_F \alpha'_F \beta'^*_F \alpha_F \right] \right). \quad (\text{A.7})$$

On en déduit finalement une expression pour l'erreur en moyenne quadratique de l'estimation des DDA par formation de voies :

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{1}{\gamma_F^2} E + \frac{(KF'F'')^2}{\gamma_F^2}, \quad (\text{A.8})$$

où E est définie par l'équation (A.7).

B ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE ET ERREURS DE POSITIONNEMENT SUR LES COORDONNÉES DES CAPTEURS

Comme les perturbations sont réelles on peut écrire, d'après (124) et (126), en ôtant les indices \cdot_M et \cdot_P , relatifs aux méthodes :

$$\Delta\theta_p = \frac{\beta_s^* \Delta_x \alpha + \alpha^* \Delta_x \beta_s + \beta_c^* \Delta_y \alpha + \alpha^* \Delta_y \beta_c}{2\gamma}. \quad (\text{B.9})$$

En tenant compte du fait que les perturbations sur les abscisses sont indépendantes de celles sur les ordonnées, l'erreur d'estimation en moyenne quadratique s'écrit :

$$E(|\Delta\theta|^2) = \frac{1}{4\gamma^2} \left\{ \beta_s^* E \left\{ \Delta_x \alpha \beta_s^* \Delta_x \right\} \alpha \right. \\ \left. + \beta_s^* E \left\{ \Delta_x \alpha \alpha^* \Delta_x \right\} \beta_s \right. \\ \left. + \alpha^* E \left\{ \Delta_x \beta_s \beta_s^* \Delta_x \right\} \alpha + \alpha^* E \left\{ \Delta_x \beta_s \alpha^* \Delta_x \right\} \beta_s \right. \\ \left. + \beta_c^* E \left\{ \Delta_y \alpha \beta_c^* \Delta_y \right\} \alpha + \beta_c^* E \left\{ \Delta_y \alpha \alpha^* \Delta_y \right\} \beta_c \right. \\ \left. + \alpha^* E \left\{ \Delta_y \beta_c \beta_c^* \Delta_y \right\} \alpha + \alpha^* E \left\{ \Delta_y \beta_c \alpha^* \Delta_y \right\} \beta_c \right\}. \quad (\text{B.10})$$

Apparaissent dans le calcul des termes structurés de la manière suivante :

$$E\{Bxy^*B\} = E\left\{ \sum_i x_i b_i \sum_j y_j^* a_j^T \right\} = E\left\{ \sum_{i,j} x_i y_j^* b_i a_j^T \right\} \\ = \sum_{i,j} x_i y_j^* E\{b_i a_j^T\}, \quad (\text{B.11})$$

où les vecteurs x et y représentent indifféremment les vecteurs α et β , x_i (respectivement y_i) représente le i^{e} élément de x

(respectivement de y); b_i et a_j^T sont respectivement la i^{e} colonne et la j^{e} ligne de la matrice B .

Or comme dans tous les cas, la matrice B est diagonale, on a

$$b_i = [0, \dots, 0, b_i, 0, \dots, 0]^T, \quad (\text{B.12})$$

et

$$a_j^T = [0, \dots, 0, a_j, 0, \dots, 0]. \quad (\text{B.13})$$

Sachant d'autre part que le premier capteur n'est pas atteint par les perturbations et que celles-ci sont indépendantes d'un capteur à l'autre, on déduit que

$$E\{Bxy^*B\} = \sigma^2 \sum_{i=2}^M x_i y_i^* W_i, \quad (\text{B.14})$$

où la matrice W_i , de dimension (M, M) , a tous ses termes nuls excepté celui de rang (i, i) .

On en déduit finalement que

$$z^* E\{Bxy^*B\} t = \sigma^2 \sum_{i=2}^M z_i^* x_i y_i^* t_i. \quad (\text{B.15})$$

Donc, pour les méthodes Music et propagateur, l'erreur d'estimation en moyenne quadratique s'écrit

$$E\{|\Delta\theta|^2\} = \frac{\sigma^2}{\gamma^2} \sum_{i=2}^M |\alpha_i|^2 (|\beta_{s_i}|^2 + |\beta_{c_i}|^2). \quad (\text{B.16})$$

En utilisant le même procédé, on obtient une formule analogue pour la Formation de Voies (voir section 8.3).

C CALCUL DE L'ERREUR SUR LA MATRICE Q EN PRÉSENCE DE BRUIT DE MODÈLE

D'après (35), on a

$$\Delta Q = \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.17})$$

avec

$$\Delta Q_1 = -(X_1 X_1^*)^{-1} X_1 \Delta X^* Q. \quad (\text{C.18})$$

Si l'on considère la partition de la matrice des vecteurs directionnels introduite en (5), et en utilisant (20) et (83), on peut écrire

$$\Delta Q_1 = -\left(A_1 S S^* A_1^*\right)^{-1} A_1 S S^* \Delta A^* Q \\ = -\left(A_1 S S^* A_1^*\right)^{-1} A_1 S S^* A_1^* \left(A_1^*\right)^{-1} \Delta A^* Q. \quad (\text{C.19})$$

Soit finalement

$$\Delta Q_1 = -\left(A_1^*\right)^{-1} \Delta A^* Q. \quad (\text{C.20})$$

BIBLIOGRAPHIE

- [Bienvenu83] G. BIENVENU, L. KOPP, «Optimality of high resolution array processing using eigenstructure approach,» *IEEE Transactions on ASSP*, vol. 31, no. 5, October 1983, pp. 1235–1247.
- [Farrier88] D.R. FARRIER, D.J. JEFFRIES, R. MARDANI, «Theoretical performance prediction of the Music algorithm,» *IEE Proceedings F*, vol. 135, June 1988, pp. 216–224.
- [Friedlander89] B. FRIEDLANDER, «A sensitivity analysis of the Music algorithm,» *Proceedings of ICASSP*, Glasgow, 1989, pp. 2811–2814.
- [Hobbs92] S.L. HOBBS, «Asymptotic statistics for location estimates of acoustic signals,» *Journal of Acoustical Society of America*, vol. 91, no. 3, March 1992, pp. 1538–1544.
- [Krim92] H. KRIM, P. FORSTER, J.G. PROAKIS, «Operator approach to performance analysis of root–Music and root–min–norm,» *IEEE Transactions on ASSP*, SP–7, July 1992, pp. 1687–1696.
- [Li91] F. LI, R.J. VACCARO, «Unified analysis for DOA estimation algorithms in array signal processing,» *Signal Processing*, no. 25, 1991, pp. 147–169.
- [Marcos89] S. MARCOS, J. MUNIER, «Source localization using a distorted antenna,» *Proceedings of ICASSP*, Glasgow, 1989, pp. 2756–2759.
- [Marcos90a] S. MARCOS, M. BENIDIR, «On a high resolution array processing method non–based on the eigenanalysis approach,» *Proceedings of ICASSP*, Albuquerque, 1990, pp. 2955–2958.
- [Marcos90b] S. MARCOS, M. BENIDIR, «Source bearing estimation and sensor positioning with the propagator method,» *Proceedings of SPIE*, July 1990, pp. 312–323.
- [Marcos93] S. MARCOS, «Calibration of a distorted towed array using a propagation operator,» *Journal of Acoustical Society of America*, vol. 93, no. 4, March 1993, pp. 1987–1994.
- [Marsal91] A. MARSAL, S. MARCOS, «Rapprochement de la méthode du propagateur et de Music pour la localisation de sources,» *Actes du Colloque GRETSI*, pp. 681–684, Juan–les–Pins, Septembre 1991.
- [Munier87] J. MUNIER, «L'identification de fronts d'onde corrélés et distordus,» *Revue du Traitement du Signal*, vol. 4, no. 4, 1987, pp. 281–296.
- [Munier91] J. MUNIER, G.Y. DELISLE, «Spatial analysis using new properties of the cross–spectral matrix,» *IEEE Transactions on ASSP*, vol. 39, no. 3, March 1991, pp. 746–749.
- [Porat88] B. PORAT, B. FRIEDLANDER, «Analysis of the asymptotic relative efficiency of the Music algorithm,» *IEEE Transactions on ASSP*, vol. 36, no. 4, April 1988, pp. 532–543.
- [Roy89] R. ROY, T. KAILATH, «Esprit : estimation of signal parameters via rotational invariance techniques,» *IEEE Transactions on ASSP*, vol. 37, no. 7, July 1989, pp. 984–995.
- [Rendas92] N.J.D. RENDAS, J.M.F. MOURA, «Channel matched source location : sensitivity to the propagation model,» *European Conference on Underwater Acoustics*, Elsevier, September 1992, pp. 118–121.
- [Schmidt79] R.O. SCHMIDT, «Multiple emitter location and signal parameters estimation,» *Proc. of R. A. D. C. Spectrum Estimation Workshop*, October 1979.
- [Soon92] V.C. SOON, Y.F. HUANG, «An analysis of Esprit under random sensor uncertainties,» *IEEE Transactions on ASSP*, SP–9, September 1992, pp. 2353–2358.
- [Stoica89] P. STOICA, A. NEHORAI, «Music, maximum likelihood and Cramer–Rao bound,» *IEEE Transactions on ASSP*, vol. 37, no. 5, May 1989, pp. 720–741.
- [Swindlehurst92] A. L. SWINDLEHURST, T. KAILATH, «A performance analysis of subspace–based methods in the presence of model errors, Part I : the Music algorithm,» *IEEE Transactions on ASSP*, SP–7, July 1992, pp. 1758–1774.
- [Xu92] X. L. XU, K.M. BUCKLEY, «Bias analysis of the Music location estimator,» *IEEE Transactions on ASSP*, vol. 40, no. 10, October 1992, pp. 2559–2569.