

Utilisation de l'analyse multirésolution en holographie acoustique champ proche.

Acoustic Holography Using Wavelet Transform.

par Ziad EL-KHOURY, Claude NOUALS

École Nationale Supérieure d'Ingénieurs
de Constructions Aéronautiques - 49, avenue Léon Blum
F-31056 Toulouse cedex

Résumé

Nous traitons dans cet article d'une nouvelle méthode permettant d'améliorer les performances de l'holographie acoustique champ proche. L'holographie présente en effet une limitation importante liée à la troncature du plan hologramme qui, créant des effets de bords, pose des problèmes en ce qui concerne la rétropropagation des ondes évanescentes en particulier.

Cette étude entre dans le cadre du conditionnement des problèmes inverses mal posés. La méthode utilisée fait appel à un nouvel outil : la transformée par ondelettes.

Mots clés : Holographie, acoustique champ proche, effets de bords, ondes évanescentes, problème inverse, transformée par ondelettes, analyse multirésolution.

Abstract

We examine here a new method to optimize the performances of the Nearfield Acoustic Holography. This method has a crucial limitation due to boundary effects (Gibbs phenomenon). During retropropagation, evanescent waves become unstable. The inverse problem is said to be ill-conditioned.

We try to solve this problem using a new method in image processing : the wavelet transform.

Key words : Nearfield acoustic holography, boundary effects, evanescent waves, inverse problem, wavelet transform, multiresolution analysis.

1. Introduction

L'holographie acoustique champ proche (Nearfield Acoustic Holography NAH) a eu récemment des applications très pratiques concernant la localisation de sources de bruit et leur caractérisation, par exemple en vue de la maîtrise du bruit des véhicules automobiles [9].

À partir de mesures de la pression acoustique acquise dans un plan à une certaine distance des moteurs, elle permet de rétropropager le champ de pression jusqu'à des surfaces suffisamment proches des zones émissives pour les localiser très finement.

Nous effectuons dans une première phase l'étude de la NAH (couplée avec une méthode d'acquisition connue sous le nom de STSF¹). Après avoir mis en évidence ses limites, nous nous proposons d'y remédier par un conditionnement du problème inverse en utilisant la transformée par ondelettes.

2. L'holographie acoustique champ proche

L'holographie acoustique généralisée est une méthode de traitement du signal qui permet de calculer un champ acoustique en tout point M de l'espace à partir d'une mesure effectuée sur une surface fermée (S) entourant les sources d'émission acoustique.

Éventuellement, cette surface fermée (a priori quelconque, cf figure 1) peut être transformée en une surface plane infinie, fermée par une demi-sphère de rayon infini, dont la contribution est nulle d'après la condition de rayonnement de Sommerfeld pour les ondes divergentes (cf figure 2).

Les équations de l'holographie acoustique sont celles de la diffraction. Elles sont valables pour tout champ $\Psi(x, y, z, t)$ vérifiant l'équation d'Helmholtz temporelle [5] en tout point $M(x, y, z)$ où il n'y a pas de sources :

$$\nabla^2 \Psi(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x, y, z, t) = 0 \quad (1)$$

c étant la célérité de l'onde dans le milieu considéré.

1. Spatial Transformation of Sound Fields.

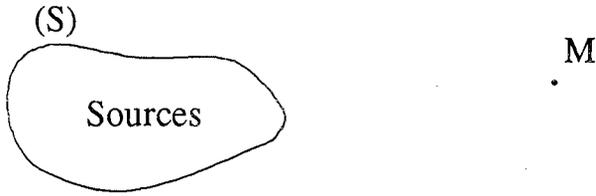


Figure 1.

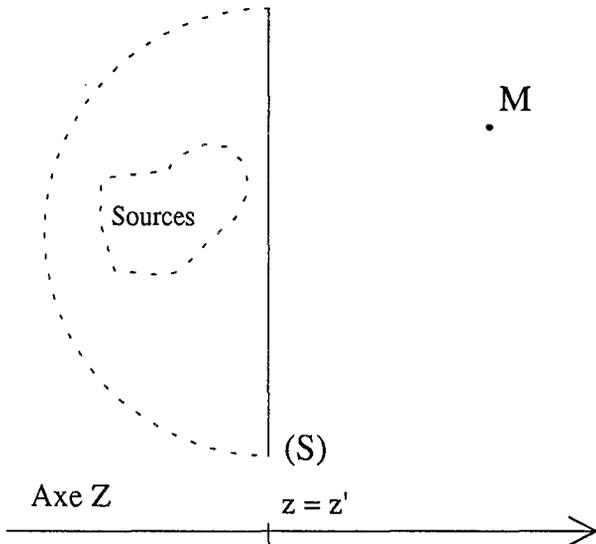


Figure 2.

Cette équation s'applique aux champs de pression acoustique [6].

2.1. LES INTÉGRALES DE RAYLEIGH

Considérons un champ de pression acoustique $\Psi(x, y, z, t)$. Sa transformée de Fourier temporelle $\Psi(x, y, z, \nu)$ vérifie l'équation d'Helmholtz fréquentielle :

$$\nabla^2 \Psi(x, y, z, \nu) + k^2 \Psi(x, y, z, \nu) = 0 \quad (2)$$

$k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$ où λ est la longueur d'onde correspondant à la fréquence ν . Nous remplacerons dans ce qui suit $\Psi(x, y, z, \nu)$ par $\Psi(x, y, z)$.

Les équations de Rayleigh [5] [6] [12] s'écrivent alors :

$$\Psi(x, y, z) = \iint_{(S)} \Psi(x', y', z') \cdot G_D(x - x', y - y', z - z') dx' dy' \quad (3)$$

$$\Psi(x, y, z) = \iint_{(S)} \frac{\partial \Psi}{\partial n}(x', y', z') \cdot G_N(x - x', y - y', z - z') dx' dy' \quad (4)$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée par rapport à la normale sortante, (S) le plan d'acquisition défini par $z' = \text{constante}$, et :

$$G_D(x, y, z) = -z(1 + jkR) \frac{\exp(-jkR)}{2\pi R^3}$$

$$G_N(x, y, z) = -\frac{\exp(-jkR)}{2\pi R}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Elles expriment simplement le principe de l'holographie-diffraction.

À partir de la connaissance du champ $\Psi(x, y, z)$ (ou de sa dérivée normale) suivant le plan (S), nous pouvons calculer le champ en tout point de l'espace tel que $z > z'$.

Ce problème a été longuement abordé en diffraction avec diverses approximations dites de Fresnel ou celles plus restrictives encore dites de Fraunhofer, en géométrie plane ((S) plan) ou courbe ((S) cylindre...).

2.2. FORMULATION FRÉQUENTIELLE ET ONDES ÉVANESCENTES

Le problème inverse ou rétropropagation ($z < z'$), ou la propagation (pour $z > z'$ mais $z - z'$ de l'ordre de la longueur d'onde), sont basés plus particulièrement sur la formulation des intégrales de Rayleigh dans l'espace de Fourier bidimensionnel.

En effet, les intégrales (3) et (4) sont des produits de convolution bidimensionnels. Elles peuvent donc se ramener à un produit dans l'espace de Fourier bidimensionnel. Soit k_x, k_y les pulsations spatiales associées à x et y .

Nous obtenons alors :

$$\hat{\Psi}(k_x, k_y, z) = \hat{\Psi}(k_x, k_y, z') \cdot \hat{G}_D(k_x, k_y, z - z') \quad (3')$$

$$\hat{\Psi}(k_x, k_y, z) = \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial z}(k_x, k_y, z') \cdot \hat{G}_N(k_x, k_y, z - z') \quad (4')$$

Nous nous limiterons à la première de ces deux équations, où [12] :

$$\hat{G}_D(k_x, k_y, z) = \begin{cases} \exp(-jz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}) & \text{si } k^2 \geq k_x^2 + k_y^2 \\ \exp(z\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}) & \text{si } k^2 < k_x^2 + k_y^2 \end{cases} \quad (5)$$

Ainsi, lors du traitement de propagation, l'amplitude de chaque onde plane (caractérisée par ses coordonnées (k_x, k_y) dans le plan de Fourier spatial) est multipliée par la valeur du **propagateur spatial** \hat{G}_D en ce point.

À ce moment, nous pouvons distinguer deux sortes d'ondes planes dans la décomposition du champ $\Psi(x, y, z')$:

1. Les ondes planes qui se trouvent à l'intérieur du cercle de propagation de rayon $R = 2\pi/\lambda$ (*basses fréquences*). Le coefficient qui leur est affecté a la forme d'une exponentielle complexe. Il correspond à un déphasage. Ces ondes pourront donc être retrouvées au

niveau de tout plan situé à n'importe quelle distance des sources. Ce sont les **ondes propagatives**.

2. Les ondes planes qui se trouvent à l'extérieur du cercle de propagation (*hautes fréquences*). Le coefficient qui leur est affecté a la forme d'une exponentielle décroissante. Ces ondes ne pourront plus être mesurées si la distance du plan de mesure aux sources est trop grande, ainsi que leur distance au cercle de propagation $\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$. Par exemple : si $z = 2\lambda$, et pour $\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2} = 2\pi/\lambda$, le propagateur spatial vaut 10^{-6} . Elles sont appelées « **ondes évanescentes** ».

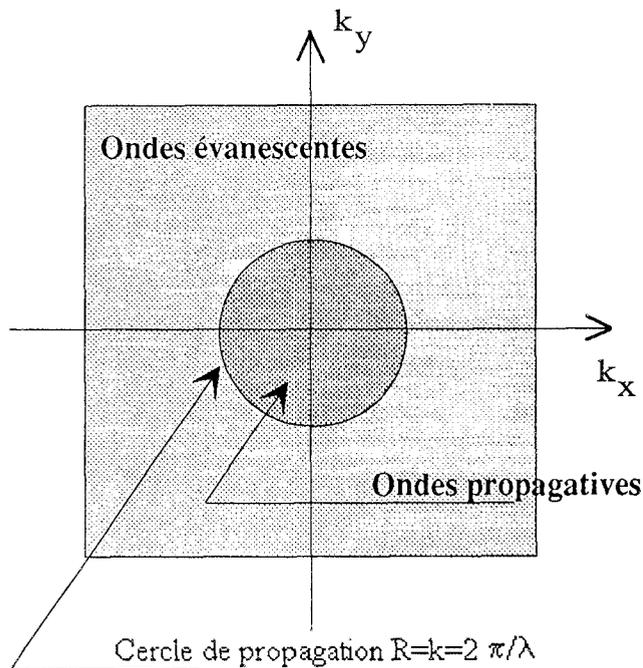


Figure 3. – Décomposition des ondes planes $\hat{\Psi}(k_x, k_y, z_S)$ en ondes propagatives et évanescentes.

2.3. LE PROBLÈME INVERSE OU RÉTROPROPAGATION

Supposons maintenant que le champ de pression soit connu sur une surface (H), dite surface hologramme, caractérisée par z_H , la plus petite distance à laquelle le champ peut être mesuré correctement.

Supposons aussi que cette distance ne soit pas suffisamment petite pour permettre de détecter tous les détails du champ de pression, par exemple deux sources très rapprochées.

Il serait alors très utile de pouvoir effectuer un calcul de rétropropagation sur les données obtenues par mesure sur z_H afin d'obtenir le champ sur une surface encore plus proche des deux sources, ce qui permettrait de les discriminer. Appelons z' la coordonnée de cette surface, $z' < z_H$.

D'après (2.3'), nous pouvons écrire :

$$\hat{\Psi}(k_x, k_y, z') = \hat{\Psi}(k_x, k_y, z_H) \cdot \hat{G}_D^{-1}(k_x, k_y, z_H - z') \quad (6)$$

Par transformée de Fourier bidimensionnelle inverse, nous calculons alors le champ de pression sur le plan z' .

2.4. IMPORTANCE DES ONDES ÉVANESCENTES

Dans un signal monodimensionnel fonction du temps, dont le spectre est limité à F_{max} , nous ne pouvons pas séparer deux « impulsions » distantes de moins de $1/(2.F_{max})$.

Ce résultat se généralise dans l'espace bidimensionnel. Et l'importance des ondes évanescentes, qui sont des hautes fréquences spatiales, découle directement de ce fait. Elles contiennent toute l'information relative aux détails fins de l'image, et elles s'évanouissent au fur et à mesure que l'on s'éloigne des sources. Leur suppression dans une image efface tous les détails de cette image dont les dimensions sont inférieures à $\lambda/2$.

Pour que le processus de rétropropagation aboutisse à la meilleure description possible du champ de pression, il est donc nécessaire qu'il amplifie exponentiellement les ondes évanescentes. L'équation (6) traduit cette réalité physique.

Nous avons effectué une simulation illustrant leur importance :

1. L'image 1 est l'acquisition d'un champ de pression dû à deux sources cohérentes de longueur d'onde $\lambda = 1\text{mm}$, séparées par $0,25\lambda$ (inférieure à $\lambda/2$ et distantes de $z_H = 0,1\text{m}$. Nous ne pouvons pas les distinguer sur cette image.

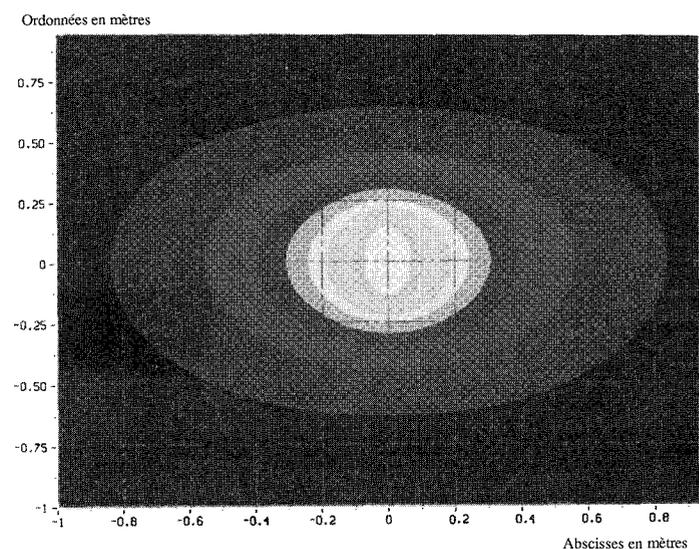


Image 1. – Module d'un champ de pression dû à 2 sources cohérentes de même puissance et de longueur d'onde 1m . S1 : $x = 0\text{m}$, $y = 0,125\text{m}$, $z = 0,1\text{m}$. S2 : $s=0\text{m}$, $y=-0,125\text{m}$, $z=0,1\text{m}$. Plan d'acquisition de 32×32 points.

2. L'image 2 est obtenue par rétropropagation NAH. La distance de rétropropagation est de $0,09\text{m}$. Nous nous retrouvons donc à

une distance de $z' = 0,01m$ des sources, et elles sont parfaitement discriminées.

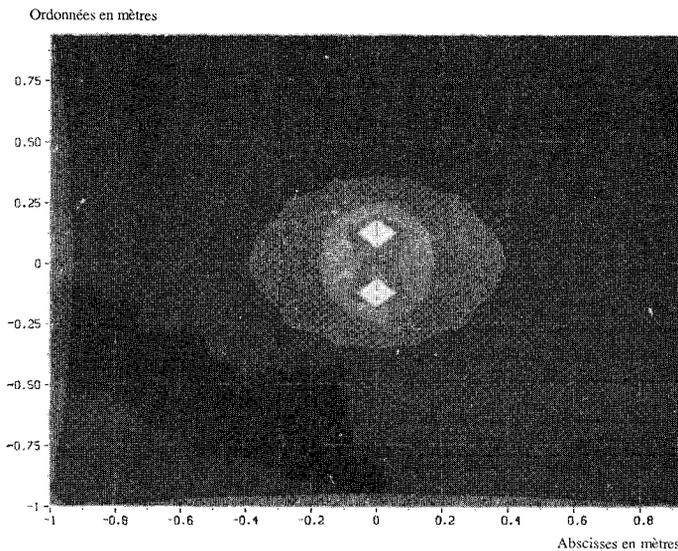


Image 2. – Rétropropagation par la méthode NAH de l'image 1. Distance de rétropropagation = 0.09m. La NAH a donc permis de discriminer les sources.

3. L'image 3 est obtenue par rétropropagation de la première image, sans amplifier les ondes évanescentes. Nous perdons la résolution de l'holographie acoustique champ proche.

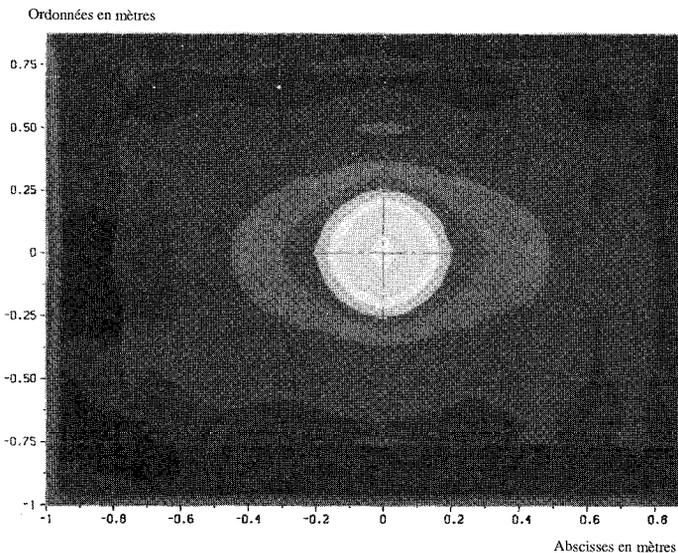


Image 3. – Rétropropagation par la méthode NAH de l'image 1 après filtrage des ondes évanescentes. Distance de rétropropagation = 0.09m. Nous ne distinguons plus les sources.

Conclusion : l'amplification des ondes évanescentes est essentielle à une reconstruction exacte de l'image des sources.

3. La transformation spatiale des champs proches

Le champ qui intervient au niveau des équations ci-dessus est la transformée de Fourier temporelle du champ de pression acoustique, c'est donc une grandeur complexe. Son acquisition nécessite une détection de l'amplitude et de la phase au niveau de chaque capteur. Nous nous heurtons alors au problème de la **référence de phase**.

La mise en place d'un dispositif de mesures simultanées permet de résoudre ce problème puisque nous disposons à ce moment-là d'une référence de phase. Cependant, ceci impose des contraintes matérielles importantes au niveau des convertisseurs analogiques-numériques et du nombre des capteurs.

La méthode STSF naquit de cette difficulté [8] [10]. Elle a fait l'objet d'une étude préliminaire [2].

En résumé :

La méthode d'acquisition STSF se base sur des mesures de densités interspectrales de puissance ou d'énergie entre des capteurs de références placés près des sources à analyser, et des capteurs placés sur la grille de mesure dans le plan hologramme.

En effet, un interspectre contient les informations amplitude et différence de phase entre les deux points concernés par la mesure. En partant de l'hypothèse de stationnarité statistique du phénomène étudié, les interspectres ne dépendent pas de l'instant initial. Ils peuvent donc être mesurés **séquentiellement**, tout en ayant la référence de phase recherchée. Un traitement mathématique permet en outre de réduire le nombre de mesures nécessaires à l'acquisition du champ acoustique : **La STSF facilite la mesure des champs acoustiques.**

De plus, comme il contient uniquement les informations corrélées entre les spectres enregistrés par les capteurs, l'interspectre élimine le bruit de fond [non corrélé avec les signaux captés au niveau des références, où le champ acoustique émis par les sources prédomine] : **La STSF élargit le domaine d'utilisation de la NAH aux mesures bruitées.**

À partir des mesures, la STSF permet de calculer une **représentation principale** A du champ de pression acoustique. C'est une matrice où chaque colonne représente la trace d'une des sources $(1, \dots, J)$ indépendantes² sur l'ensemble des capteurs de la grille, et où chaque ligne représente la vue à partir d'un

2. Le champ mesuré n'est pas nécessairement un champ spatialement cohérent, sauf s'il est dû à une seule source ponctuelle monochromatique (cas idéal). Il peut être décomposé en une somme de champs cohérents indépendants entre eux (statistiquement décorrélés, donc n'interférant pas entre eux). Et on entend par **source indépendante** l'ensemble de toutes les zones émissives correspondant à un de ces champs cohérents. Ainsi, deux haut-parleurs excités par la même tension correspondent à une seule source.

point de la grille $(1, \dots, N)$ de l'ensemble des sources indépendantes séparées par les références.

$$A = \begin{bmatrix} \Psi'_1(r'_1) & \dots & \Psi'_J(r'_1) \\ \Psi'_1(r'_2) & \dots & \Psi'_J(r'_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Psi'_1(r'_N) & \dots & \Psi'_J(r'_N) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Donc chaque colonne de A est la trace d'une source indépendante à laquelle nous pouvons appliquer la formulation NAH. Par ailleurs, nous disposons d'une **procédure de validation** du positionnement des références et du nombre de sources indépendantes, donc de A .

Conclusion :

La STSF est une méthode qui facilite la mesure des champs acoustiques pour la NAH en diminuant considérablement leur nombre, et en élargissant le domaine d'application aux champs bruités. Mais elle ne résout pas tous les problèmes. En effet, elle reste essentiellement une *méthode d'acquisition*, et le traitement des différents champs indépendants est inchangé.

4. Phénomène de Gibbs et ondes évanescentes

Lors de la mise en œuvre de l'équation (6), il faut doubler la taille de la grille d'acquisition en rajoutant des zéros aux bords pour éviter tout phénomène de repliement. Cette procédure classique est nécessaire chaque fois que l'on calcule un produit de convolution par transformée de Fourier. Or, le champ acquis au niveau des capteurs situés aux bords n'est pas nul. Il en résulte une discontinuité qui, du point de vue mathématique, est une troncature.

Actuellement, la principale limitation de la NAH est due à cette troncature du champ acquis, qui crée des oscillations dans l'espace de Fourier bidimensionnel. Ces oscillations sont **spatialement localisées à l'endroit de la troncature**, et relativement **importantes en hautes fréquences spatiales** (f_x, f_y) par rapport aux ondes évanescentes. Elles sont connues dans la littérature sous le nom de **phénomène de Gibbs**.

Ainsi, lors de la rétropropagation, ces oscillations sont amplifiées exponentiellement par le rétropropagateur (à la phase des ondes évanescentes qu'elles ont « écrasées »), provoquant l'instabilité numérique du modèle. **Le problème inverse est dit mal conditionné.**

Deux cas peuvent se présenter :

1. Les sources sont grossièrement placées au centre du plan hologramme, et on utilise la NAH pour améliorer leur description :

le phénomène de Gibbs, localisé aux bords du plan d'acquisition, fausse les ondes évanescentes à cet endroit. Les informations relatives aux détails fins sont alors perdues, mais uniquement aux bords de l'écran. Le centre ne subit pratiquement pas l'influence des oscillations parasites. C'est la raison pour laquelle le traitement NAH de l'image 2 a donné d'aussi bons résultats. **La résolution est limitée à la zone centrale du plan d'acquisition.**

2. Le plan d'acquisition contient des sources excentrées : l'information relative aux détails fins du champ acoustique (par exemple, la discrimination et la position des sources) est contenue dans les ondes évanescentes, qui ont une amplitude très faible par rapport au phénomène de Gibbs. Lors de la rétropropagation, ces fréquences parasites sont exponentiellement amplifiées et elles « débordent » sur les sources jusqu'à les masquer. Les images 4, 5 et 6 montrent l'importance de l'erreur dans ce cas.

Dans ce cas défavorable, la troncature ne peut être que difficilement atténuée :

D'une part, malgré l'utilisation d'une méthode d'acquisition comme la STSF, le nombre des mesures à effectuer doit rester

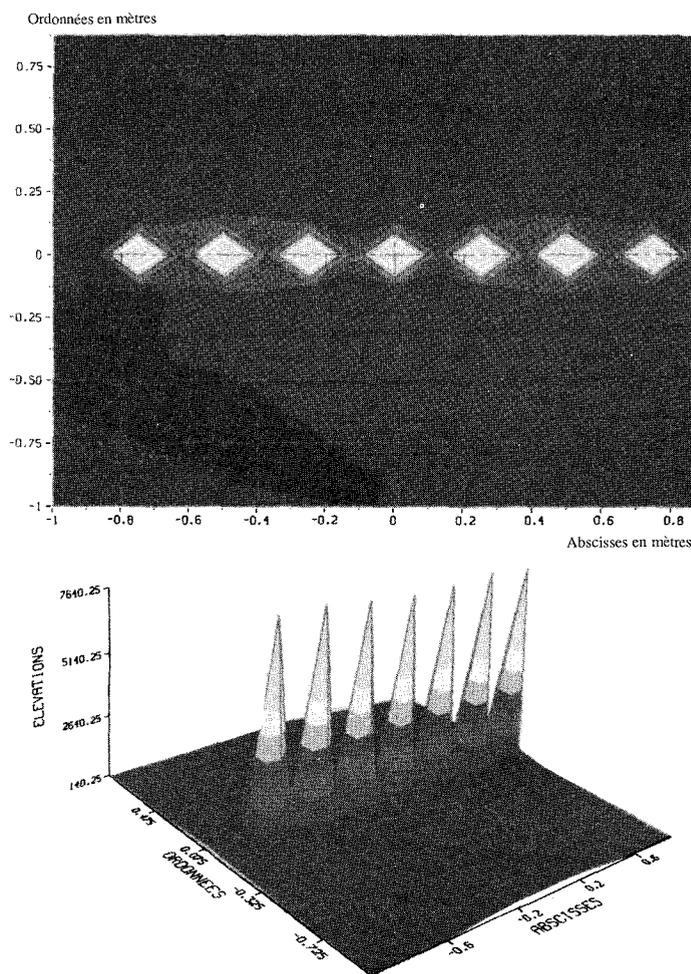


Image 4. – Module d'un champ de pression acquis à $d = 0.01m$ du plan des sources. Les sources sont séparées de $0.25m$, sont cohérentes de même puissance et ont une longueur d'onde de $1m$.

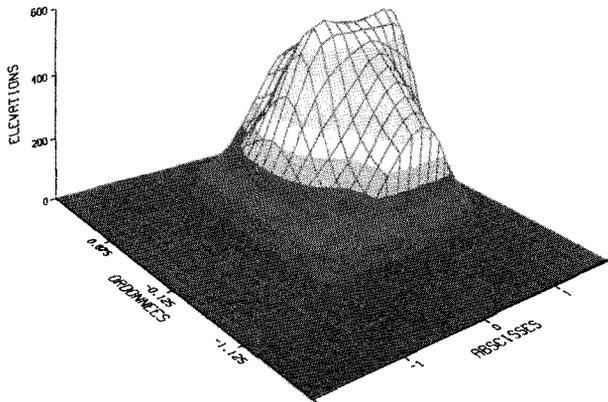


Image 5. – Module du champ de pression dû aux sources de l'image 1, à une distance de 0.3m sur une grille 16 x 16. Les dimensions de la grille ont été étendues à 32 x 32 par rajout de zéros. Nous observons l'importance de la troncature.

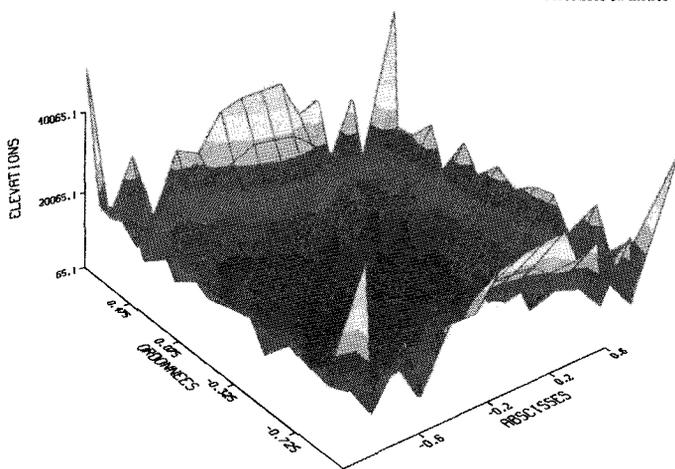
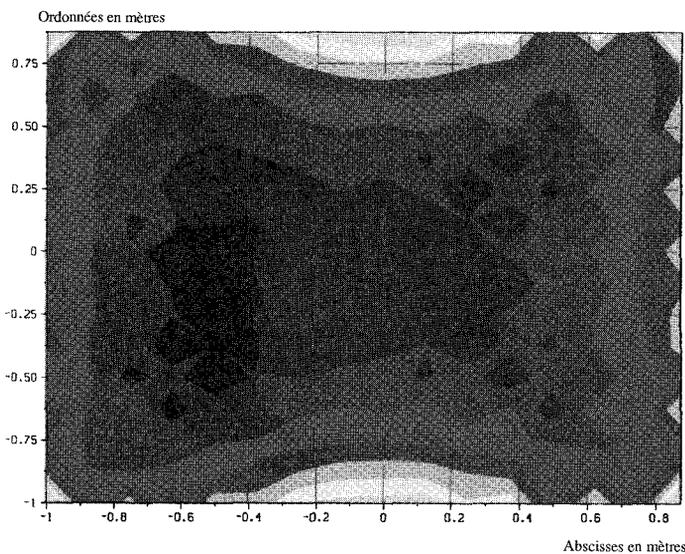


Image 6. – Rétropropagation de l'image 5 de 0.29m. La NAH amplifie les effets de bords et les sources ne sont pas séparables.

raisonnable, ce qui limite le nombre de capteurs. D'autre part, l'utilisation de la NAH étant motivée par la volonté d'obtenir

une bonne résolution du champ acoustique, l'espacement des capteurs de la grille reste très limité. La grille est donc forcément de dimensions modestes. Enfin, quelque soit la taille « finie » de la grille, le phénomène de Gibbs, dû à la discontinuité toujours présente aux bords, ne peut pas être éliminé. Il ne peut qu'être atténué.

Les méthodes classiques pour éviter les problèmes dus à la troncature sont :

1. Le lissage spatial par l'utilisation des fenêtres de pondération : fenêtre de Tucker, Hamming, Hanning, ... Cependant, sur une grille réaliste de taille 32x32, un lissage spatial portant sur 5 points de part et d'autre modifie l'acquisition sur 30% de la surface totale et limite dès le départ l'exploitation aux zones non lissées du plan. Cette méthode n'est donc pas recommandée, surtout dans les cas où des sources se trouveraient aux bords de la surface de mesure.

2. Le filtrage des hautes fréquences spatiales : ce n'est pas non plus une solution parce qu'il élimine les ondes évanescentes en même temps que le phénomène de Gibbs, et nous retombons dans des traitements proches de celui de l'image 3 (perte de résolution).

La solution semble être un filtrage astucieux qui permet d'éliminer les hautes fréquences spatiales dues à la discontinuité sans modifier les ondes évanescentes.

Or, nous savons que les fréquences parasites sont localisées spatialement aux bords de l'écran d'acquisition, alors que les ondes évanescentes se trouvent partout où l'image contient des détails fins. D'autre part, la transformée par ondelettes bidimensionnelle peut donner des informations espace-fréquence. Nous avons donc pensé qu'elle permettrait la mise en œuvre d'une méthode de filtrage spatio-fréquentiel.

Ce problème a été résolu dans la suite de cet article sur la base de travaux préliminaires [3], en utilisant la transformée par ondelettes.

5. La transformée par ondelettes

5.1. GÉNÉRALITÉS

La transformée en ondelettes [7] fait partie de la famille des méthodes d'analyse temps-échelle. Cette analyse peut être considérée comme de l'analyse temps-fréquence si l'on voit le facteur d'échelle comme le rapport d'une fréquence à une fréquence de référence. La fréquence centrale de la batterie de filtres à coefficient de surtension constant (cf figure 4), peut être choisie comme fréquence de référence.

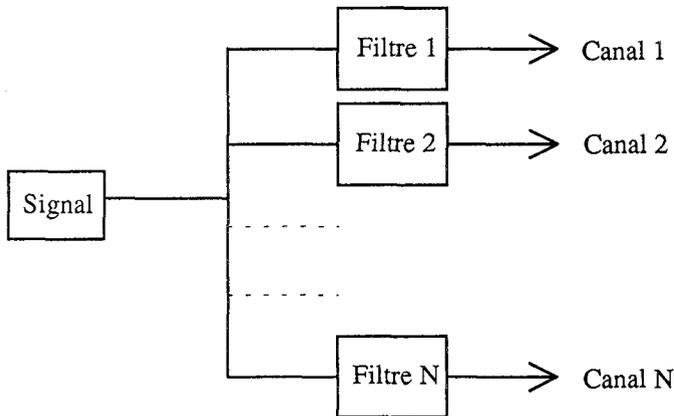


Figure 4. – La transformée par ondelettes vue comme un banc de filtres.

À partir d'une fonction de base $g(t)$ vérifiant la condition d'admissibilité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\nu)|^2 \frac{d\nu}{|\nu|} = 1 \text{ et } \hat{g}(0) = 0 \quad (8)$$

nous construisons une famille de fonctions par dilatation et translation. $g(t)$ est dite ondelette mère ou ondelette analysatrice. Les fonctions de cette famille s'écrivent :

$$g_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (9)$$

La transformée en ondelettes d'un signal $s(t)$ est alors définie comme étant la projection de ce signal sur les éléments de cette famille :

$$S(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \bar{g}\left(\frac{t-b}{a}\right) s(t) dt \quad (10)$$

Elle admet aussi une formulation duale :

$$S(a, b) = \sqrt{a} \cdot F^{-1} [\bar{\hat{g}}(a\nu) \hat{s}(\nu)] \quad (11)$$

Dans le cas où la fonction $g(t)$ et sa transformée de Fourier sont négligeables en dehors d'un support compact de \mathbf{R} (cf images 7 et 8), l'interprétation de $S(a, b)$ est simple³ :

Elle représente autour de l'instant $t = b$, le signal $s(t)$ en sortie d'un filtre de réponse impulsionnelle $g_{ab}(t)$. Si le filtre de réponse impulsionnelle $g(t)$ est centré sur f_0 , le filtre de réponse impulsionnelle $g_{ab}(t)$ sera centré sur f_0/a . D'autre part, les deux filtres auront le même facteur de surtension (puisque déduit par dilatation de la même fonction de base).

Ainsi, la transformée en ondelettes s'apparente fortement au filtrage passe-bande. Le signal est envoyé à l'entrée d'une batterie de filtres passe-bande de *facteur de surtension constant* et avec une fréquence centrale en progression arithmétique ou en progression géométrique (suivant les différentes valeurs choisies pour a).

3. C'est le cas pour les ondelettes utilisées en traitement du signal : Morlet, chapeau mexicain, ...

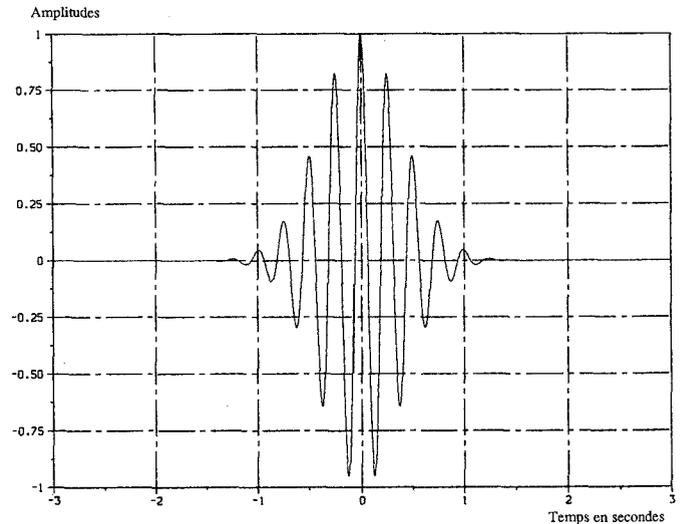


Image 7. – Ondelette de Morlet.

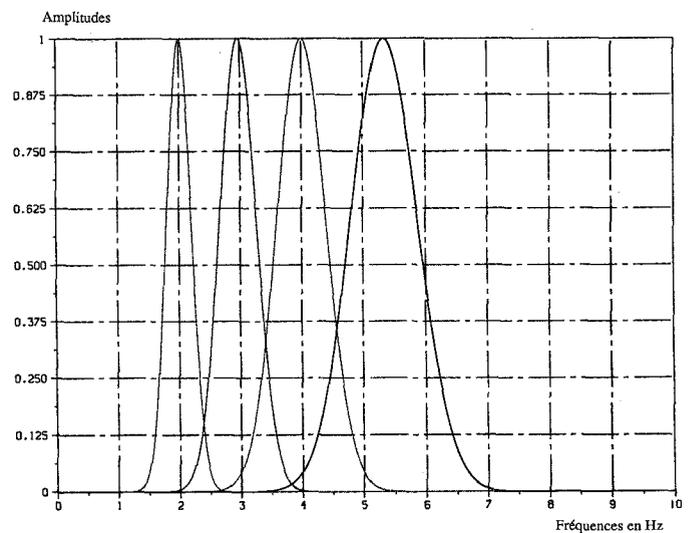


Image 8. – Ondelettes de Morlet dans l'espace fréquentiel vues comme un banc de filtres à surtension constante.

Les différents canaux représentent le contenu spectral du signal en fonction du temps dans la bande passante du filtre concerné, c'est-à-dire autour des fréquences $f_0/a_1, \dots, f_0/a_N$.

Une conséquence immédiate de l'équation (11) est que l'analyse se fait avec une résolution dépendant de la bande de fréquence analysée. L'image 9 représente la transformée par ondelettes de deux sinusoides caractérisées par deux fréquences différentes. Nous y constatons les différences de précision en temps et en fréquence, qui sont des propriétés bien connues de la transformée par ondelettes continue.

Enfin, grâce à la condition d'admissibilité (8), la transformée en ondelettes s'inverse et nous avons :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} S(a, b) \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da db}{a^2} \quad (12)$$

Les zones d'influence des différents filtres-ondelettes peuvent se recouper largement. L'information obtenue facilite l'analyse d'un signal (comme dans l'image 9), mais est redondante. Le choix de certaines ondelettes mères, telles les ondelettes proposées par Y. Meyer et I. Daubechies [11] [13], aboutit à la création de bases orthonormées d'ondelettes (non redondantes).

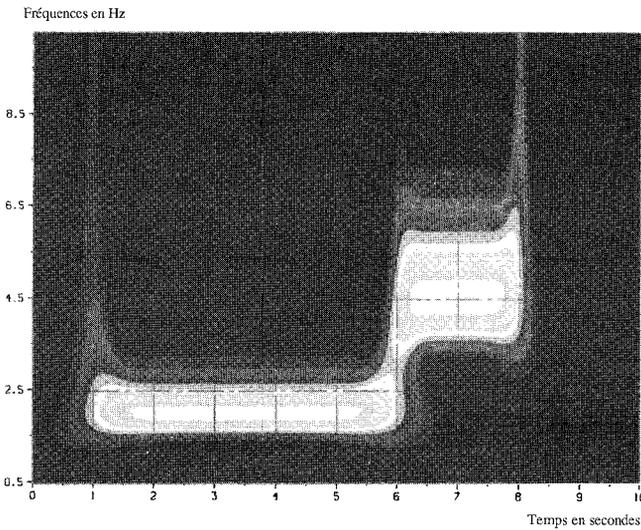


Image 9. – Transformée en ondelette du signal. $s(t) = \sin(4\pi t)$ pour $1 < t < 6$; $\sin(9\pi t)$ pour $6 < t < 8$.

de \tilde{H} , un signal basse fréquence, ce qui explique les appellations : **approximation** et **détail** du signal.

Nous montrons la structure fréquentielle de ces deux filtres dans l'image 11.

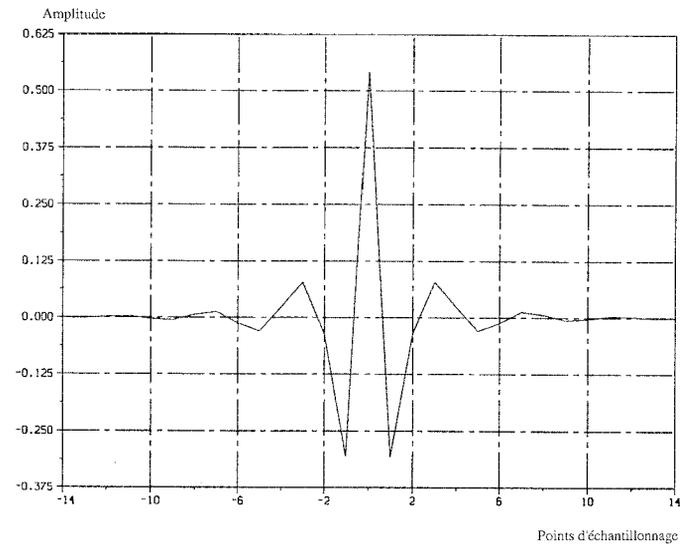


Image 10. – Réponse impulsionnelle du filtre passe-haut qui peut être vue comme une ondelette.

Dans la majorité des cas, les différentes fonctions de la famille se déduisent de l'ondelette mère par des dilatations qui sont des puissances de 2 ($a = 2^j$). La mise en place d'un algorithme de multirésolution récursif et basé sur l'élimination d'échantillons, est alors possible [11]. Le schéma de base de la décomposition est exposé dans la figure 5.

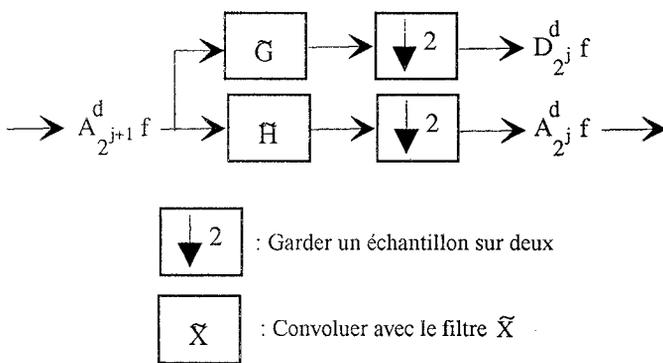


Figure 5. – Décomposition d'une approximation discrète $A_{2^{j+1}}^d f$ du signal f en une approximation $A_{2^j}^d f$ à une plus faible résolution et en détail $D_{2^j}^d f$.

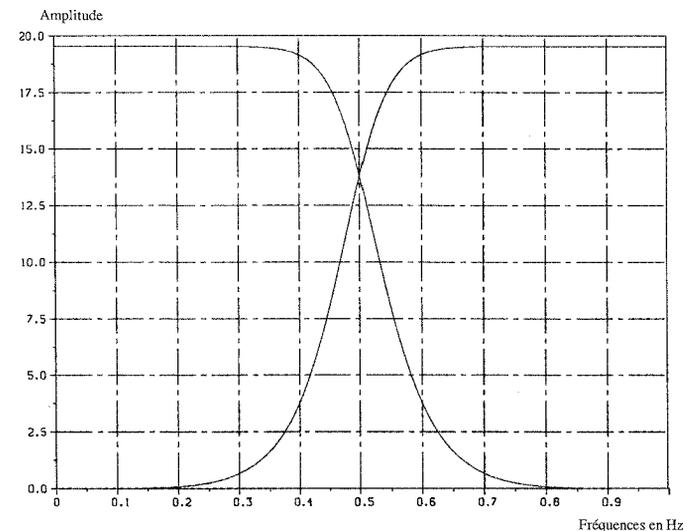


Image 11. – Fonctions de transfert des deux filtres miroirs passe-haut et passe-bas. Echelle linéaire.

Pour résoudre notre problème inverse, nous avons retenu les filtres développés dans [11] où \tilde{G} est un filtre **passe-haut**, de bande passante $[F_{max}/2, F_{max}]$, en quadrature miroir avec le filtre \tilde{H} qui est donc un **passe-bas**, de bande passante $[0, F_{max}/2]$. En sortie de \tilde{G} , nous obtenons un signal haute fréquence, et en sortie

L'élimination des échantillons est justifiée par la théorie de la multirésolution. Ainsi, le signal avant et après décomposition, contient le même nombre de points. Elle est aussi nécessaire si nous voulons utiliser récursivement les mêmes filtres (cf figure 5). En effet, à cause du sous-échantillonnage, après n itérations, la fréquence maximale de l'approximation (critère de Shannon) est divisée par 2^n ; les filtres numériques \tilde{H} et \tilde{G} opèrent alors sur les bandes de fréquences $[0, F_{max}/2^{n+1}]$ et $[F_{max}/2^{n+1}, F_{max}/2^n]$.

L'approximation devient de plus en plus grossière, et les détails sont les détails du signal à différentes résolutions.

L'image 12 représente la décomposition d'une fonction porte après une itération. Dans la représentation que nous avons retenue (à cause de la conservation du nombre de points total), le **détail** occupe la moitié gauche de l'image. Nous observons la *localisation des discontinuités* dues aux fronts montant et descendant de la fonction. Par contre, l'**approximation**, qui occupe la moitié droite, présente moins d'arêtes que la fonction originale : c'est une approximation à plus basse résolution, puisqu'on lui a retiré son contenu hautes fréquences.

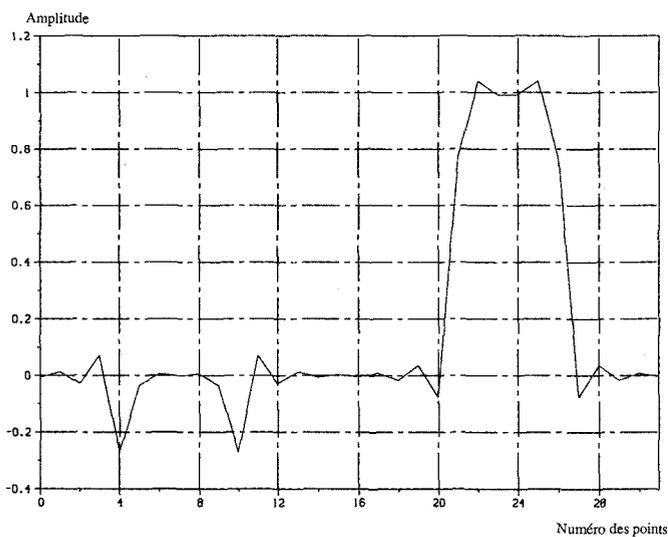


Image 12. - Transformée en ondelettes par multirésolution d'une fonction porte $p(i)$ acquise sur 32 points après une itération. $p(i) = 0$ pour $0 \leq i < 20$ et $20 < i < 32$; $p(i) = 1$ pour $10 \leq i \leq 20$.

Cette décomposition orthonormée admet une inversion, dont le schéma de base est exposé dans la figure 6.

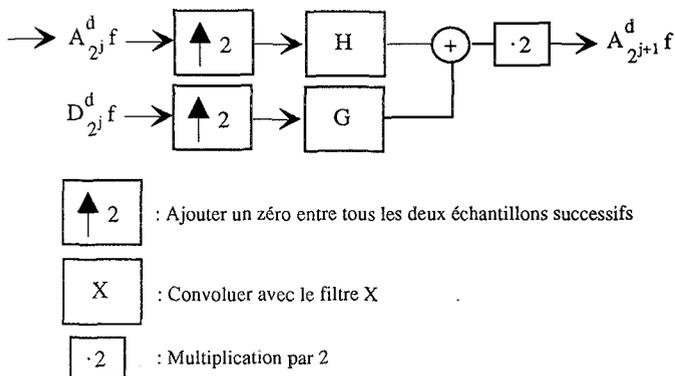


Figure 6. - Reconstruction d'une approximation discrète $A_{2^{j+1}}^d f$ du signal f à partir d'une approximation $A_{2^j}^d f$ à une plus faible résolution et du détail $D_{2^j}^d f$.

Les filtres H et G sont les symétriques de \tilde{H} et \tilde{G} ($\tilde{h}(n) = h(-n)$ et $\tilde{g}(n) = g(-n)$). Leur expression est développée dans [11]. Nous avons calculé leur réponse impulsionnelle jusqu'au 25ème terme pour éviter tout phénomène de repliement qui interviendrait sinon dans la bande coupée.

5.2. LE CAS BIDIMENSIONNEL

La généralisation du modèle à un nombre de dimensions supérieur à 1 a été étudiée dans [11] [13]. Nous exposons ici les algorithmes de décomposition et de reconstruction 2D, ainsi que leurs interprétations physiques qui nous serviront dans le pré-traitement du champ de pression acoustique acquis pour la NAH.

L'algorithme de décomposition 2D consiste à appliquer l'algorithme 1D de façon itérative sur les lignes et les colonnes de l'image, comme le montre la figure 7.

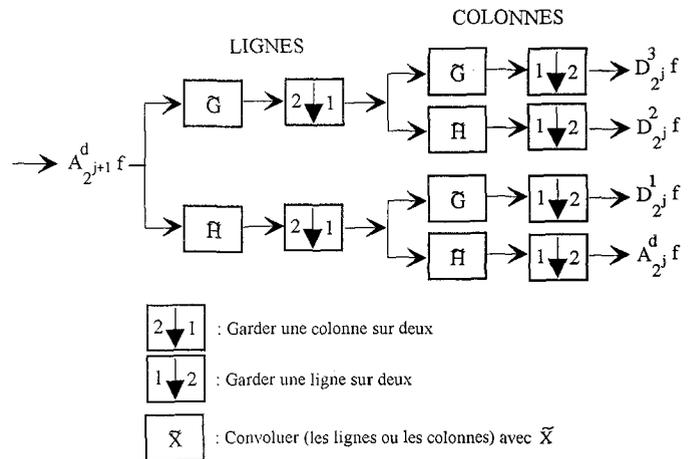


Figure 7. - Décomposition d'une approximation discrète $A_{2^{j+1}}^d f$ du signal f en une approximation $A_{2^j}^d f$ à une plus faible résolution et en détails $D_{2^j}^1 f$, $D_{2^j}^2 f$ et $D_{2^j}^3 f$.

Si nous faisons correspondre les lignes à l'axe x de l'image, et les colonnes à l'axe y , alors le filtrage des lignes correspond à un filtrage des fréquences spatiales en x , et le filtrage des colonnes à celui des fréquences spatiales en y .

Les filtres \tilde{H} et \tilde{G} sont les filtres *monodimensionnels* décrits plus haut. Par conséquent, le contenu fréquentiel des différents termes de la décomposition bidimensionnelle se déduit aisément de la séquence de filtrage appliquée à l'image initiale. Nous représentons ce contenu dans la figure 8, pour une itération ($j + 1 = 0$, $j = -1$). À titre d'exemple, $A_{2^0}^d f$ a été obtenu après filtrage basse fréquence des lignes puis des colonnes de $A_{2^0}^d f$: les hautes fréquences suivant l'axe des x ont d'abord été éliminées, ensuite les hautes fréquences suivant l'axe des y . $A_{2^0}^d f$ ne contient plus que les basses fréquences spatiales de l'image initiale. C'est bien la zone centrale de l'espace de Fourier

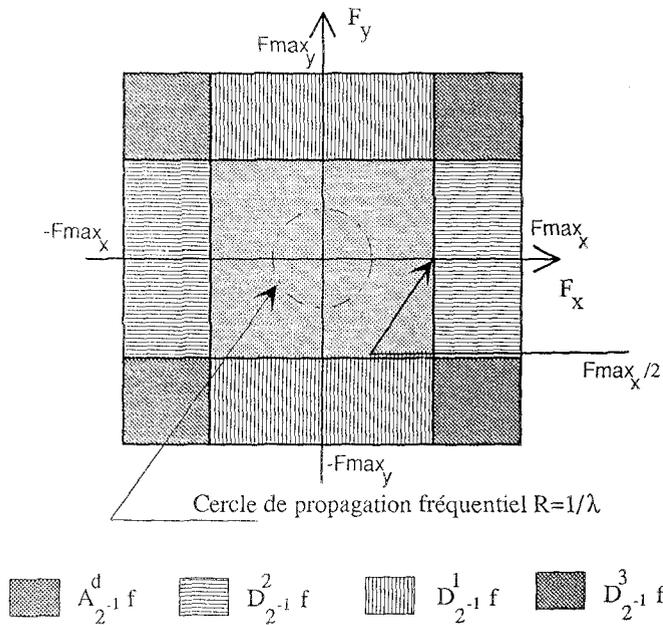


Figure 8. – Répartition des fréquences spatiales dans les différentes matrices de la décomposition par multirésolution après une itération ($j = - 1$).

bidimensionnel, contenant les fréquences $[F_{max_x}/2, F_{max_x}] \times [F_{max_y}/2, F_{max_y}]$, que nous avons représentée en gris.

Il faut remarquer que lors de la deuxième itération, la fréquence maximale est modifiée à cause du sous-échantillonnage : $F'_{max} = F_{max}/2$ suivant les 2 dimensions, et donc la décomposition portera uniquement sur le contenu fréquentiel de l'approximation obtenue en sortie de la première itération (cf figure 9).

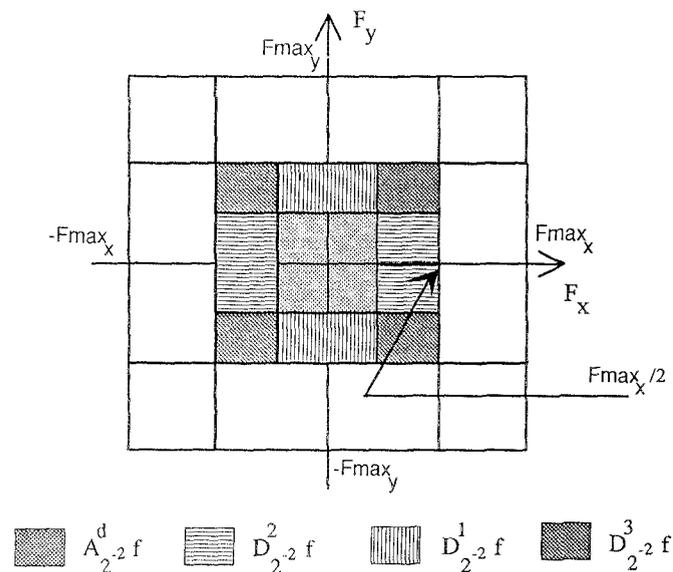


Figure 9. – Répartition des fréquences spatiales dans les différentes matrices de la décomposition par multirésolution de la deuxième itération ($j = - 2$).

Les différentes matrices obtenues donnent des informations sur les localisations spatiales de leur contenu fréquentiel. À titre d'exemple, nous montrons la transformée par multirésolution d'une fonction carré après une itération (image 13) et après deux itérations (image 14). Nous observons la décorrélation entre les hautes fréquences croisées qu'on retrouve aux quatre coins, les hautes fréquences en x et les hautes fréquences en y qu'on retrouve sur les bords correspondants du carré, et l'approximation basse-fréquence de l'image initiale. Nous avons encore retenu la représentation du résultat sur une seule image (puisque le nombre de points contenant l'information reste constant).

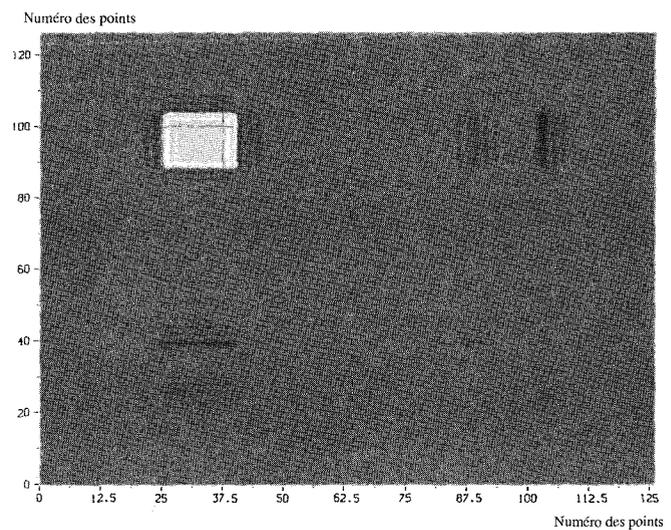


Image 13. – Transformée et ondelettes par multirésolution d'un carré après une itération.

En conclusion, la décomposition par multirésolution bidimensionnelle permet d'obtenir à chaque itération, la localisation spatiale du contenu fréquentiel de l'image obtenue lors de l'itération précédente, réparti en quatre canaux distincts : (basses fréquences x , basses fréquences y), (basses fréquences x , hautes fréquences y), (hautes fréquences y , basses fréquences x), (hautes fréquences x , hautes fréquences y).

L'inversion se calcule aussi de façon similaire au cas 1D.

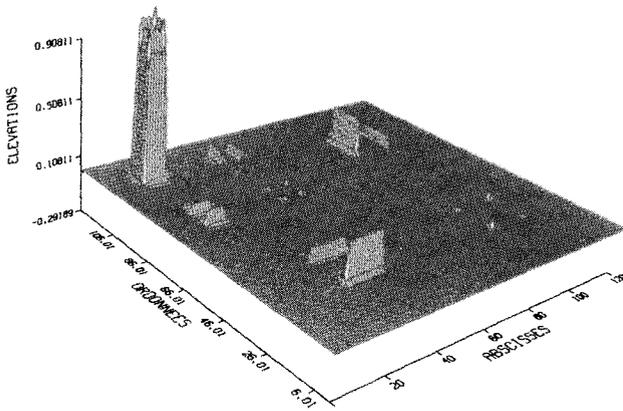
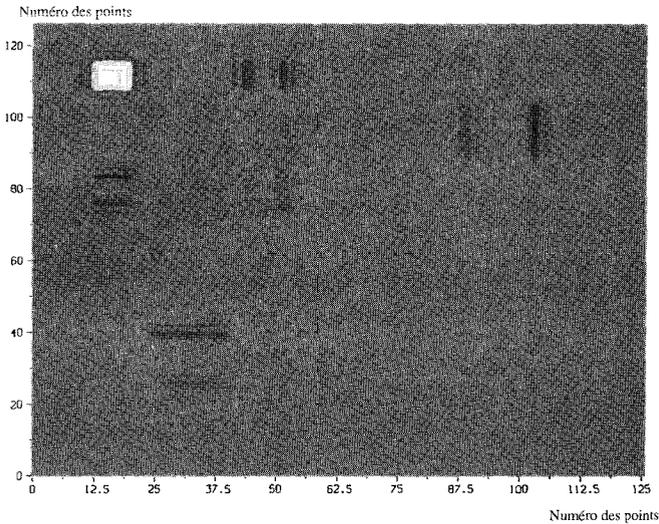


Image 14. – Transformée et ondelettes par multirésolution d'un carré après deux itérations.

6. Application de la multirésolution à l'holographie acoustique champ proche

6.1. PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Nous avons vu plus haut (cf §4) que ni le lissage spatial ni le filtrage des hautes fréquences ne résolvait le problème de la NAH. Nous montrons ici qu'un traitement spatio-fréquentiel est une bonne solution.

La transformée par multirésolution de l'image 1 après zéro-padding, que montre l'image 15, éclairera ce problème. Ainsi, la représentation de $D_{2^{-1}}^1 f$ fait apparaître deux zones symétriques de modules importants. Elles correspondent aux discontinuités suivant l'axe y , discontinuités qui sont localisées aux bords de l'hologramme. Ces zones sont tout à fait comparables à celles de

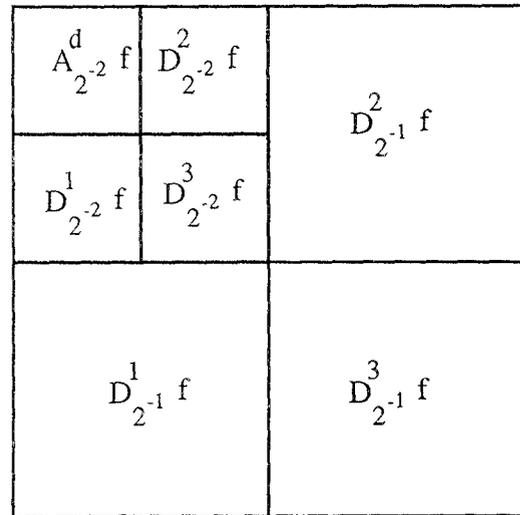


Figure 10. – Représentation du résultat de la décomposition par multirésolution après deux itérations ($j = -1$ et $j = -2$).

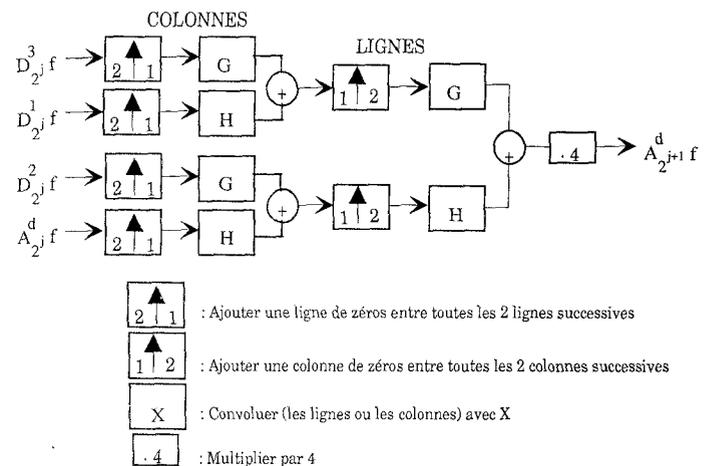


Figure 11. – Reconstruction d'une approximation discrète $A_{2^{j+1}}^d f$ du signal f à partir de l'approximation $A_{2^j}^d f$ à une plus faible résolution et des détails $D_{2^j}^1 f$, $D_{2^j}^2 f$ et $D_{2^j}^3 f$.

l'image 13. Par contre, à l'endroit des sources, nous observons une zone où les amplitudes importantes reflètent l'existence des détails (deux sources très rapprochées). Le même raisonnement vaut pour les matrices $D_{2^{-1}}^2 f$ et $D_{2^{-1}}^3 f$.

Par conséquent, il suffit de pondérer ces différentes matrices pour éliminer les effets de bords. Cette pondération ne devra pas éliminer les ondes évanescences sur le reste de l'écran.

Sachant que dans tous les cas, les hautes fréquences dues à la troncature sont localisées aux bords de l'hologramme, nous avons utilisé, pour les éliminer, des fenêtres de pondération de Tucker et de Hanning.

Ainsi pour :

- $D_{2^{-1}}^1 f$, la fenêtre de pondération a pour expression $P(i, j) = \text{Hanning}(j)$
- $D_{2^{-1}}^2 f$, $P(i, j) = \text{Hanning}(i)$
- $D_{2^{-1}}^3 f$, $P(i, j) = \text{Hanning}(i) \times \text{Hanning}(j)$

Ce traitement peut être appliqué de façon similaire aux autres itérations.

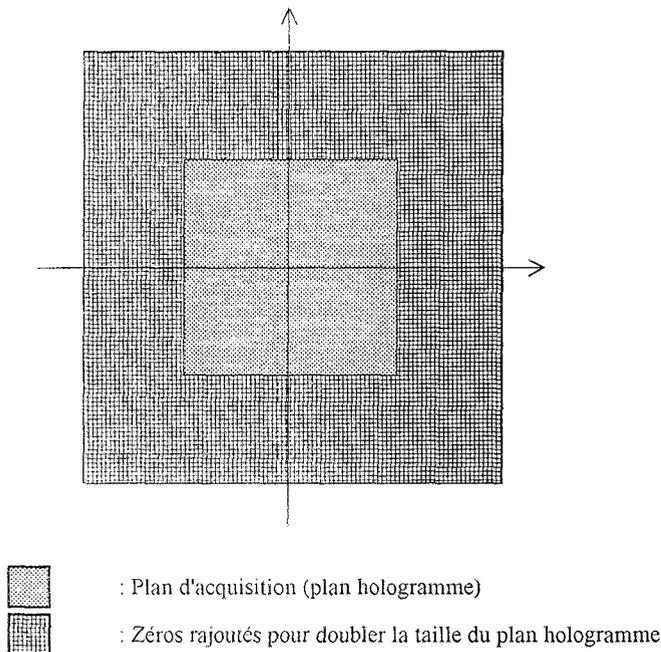


Figure 12. – Localisation des effets de bords.

Ainsi, les étapes de la méthode utilisée sont :

1. Transformée par multirésolution de l'image : on peut faire en sorte, en jouant sur le nombre d'itérations, que le cercle de propagation soit à l'intérieur du carré de fréquences de la dernière approximation de l'image (cf figure 8 et 9). Nous aurons ainsi séparé les fréquences propagatives des hautes fréquences évanescentes. La pondération spatio-fréquentielle mise en œuvre portera exclusivement sur les hautes fréquences [1er avantage par rapport au lissage spatial].

2. Pondération des différentes images hautes fréquences : nous pondérons les matrices correspondant aux canaux hautes fréquences uniquement, c'est-à-dire les matrices $D^i f$. Nous pouvons appliquer à chacune de ces matrices une pondération spatiale différente [2ième avantage par rapport au lissage spatial]. Ainsi $D^1 f$, qui correspond aux basses fréquences en x et aux hautes fréquences en y , sera pondérée uniquement aux bords horizontaux de l'écran d'acquisition, où est localisée la troncature suivant l'axe y .

3. Transformée inverse en ondelettes par multirésolution et application de la NAH : on recompose les différentes matrices

filtrées pour obtenir un champ qui aura conservé un maximum de détails et d'énergie (transmise par les ondes basses fréquences propagatives). On appliquera à ce champ ainsi conditionné la formule (6).

6.2. RÉSULTATS OBTENUS

Pour vérifier cette méthode de préfiltrage, nous avons effectué plusieurs simulations avec des sources idéales monochromatiques cohérentes.

Nous avons mis en évidence les cas où le traitement NAH ne permet pas de localiser les sources. En choisissant un plan hologramme de taille courante (16×16), acquis à 0.3λ , nous obser-

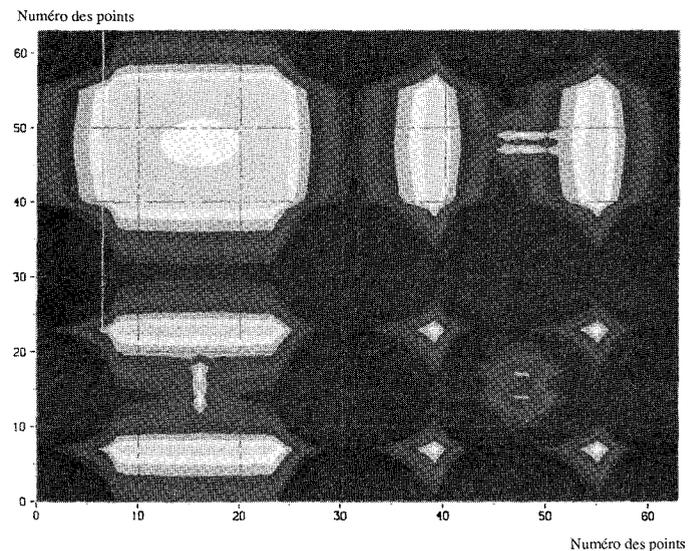


Image 15. – Transformée en ondelettes par multirésolution de l'image 1 après deux itérations. Les amplitudes sont en décibels.

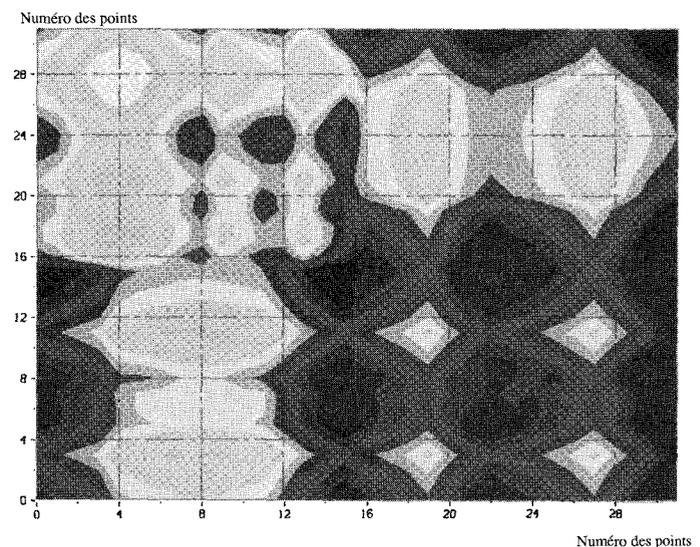


Image 16. – Transformée en ondelettes par multirésolution des sources de l'image 5 après "zéro-padding". Le nombre d'itérations est 2 et les amplitudes sont en décibels.

vons que les résultats de la NAH sont complètement faussés par les effets de bords (cf image 6). Notons que le lissage spatial n'a pas permis de résoudre ce problème. Nous avons ainsi utilisé des fenêtres de Hanning sans aucune amélioration.

Le filtrage spatio-fréquentiel a été réalisé en filtrant chacune des 6 matrices hautes fréquences (2 itérations) par des fenêtres de Hanning, ce qui semble donner les meilleurs résultats (par rapport aux fenêtres rectangulaires ou de Tucker). Nous montrons le résultat de la multirésolution appliquée au plan hologramme (image 16), le filtrage de ce résultat (image 17), ainsi que le plan hologramme reconstitué après filtrage (image 18).

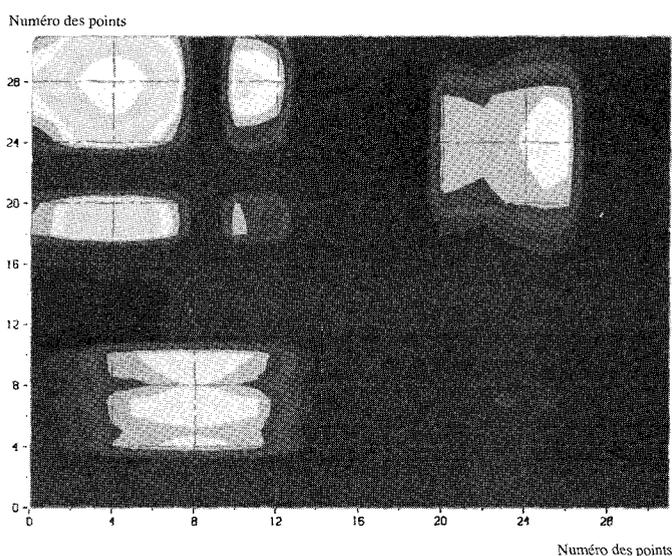


Image 17. – Filtrage de l'image 16 avec des fenêtres de Hanning. Nous avons ainsi conservé un maximum d'ondes évanescentes du champ acoustique. Les amplitudes sont en décibels.

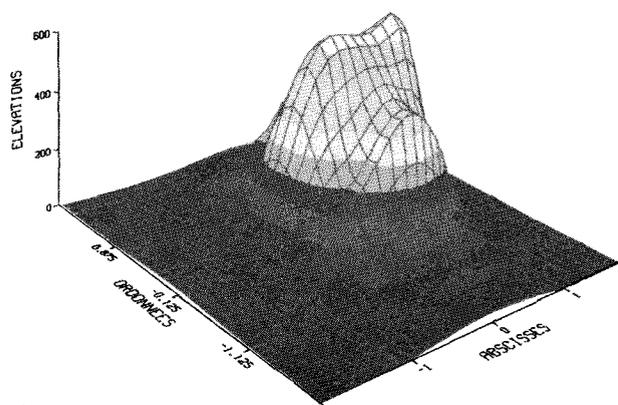


Image 18. – Reconstitution par transformée inverse de l'image 17. Nous observons l'élimination de la discontinuité aux bords de l'écran d'acquisition (comparer avec l'image 5).

La NAH appliquée après ce pré-traitement permet de localiser la plupart des sources (comparer l'image 19 à celle du plan des sources sur l'image 4).

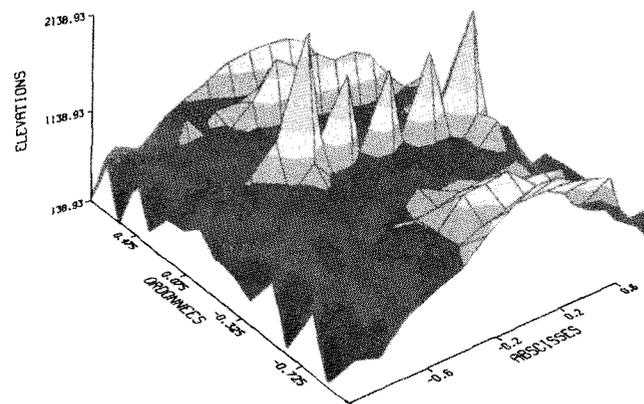
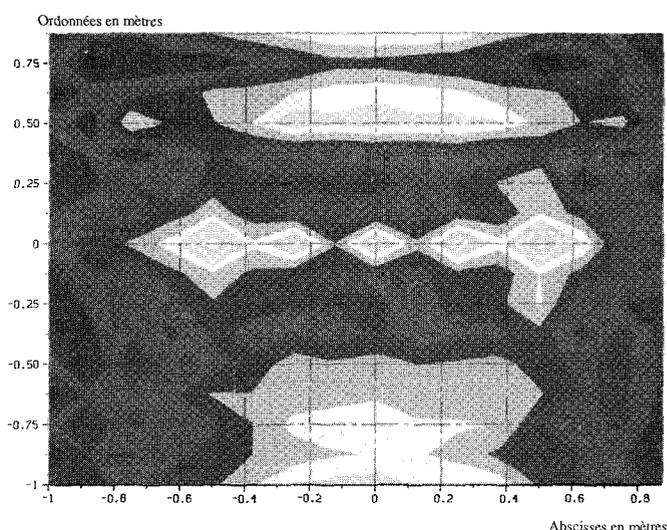


Image 19. – Rétropropagation NAH de l'image 18 de 0.29m. Nous localisons 5 des 7 sources de l'image 4. Comparer avec l'image 6.

Ces résultats de simulation sont satisfaisants, et nous envisageons de les appliquer à des acquisitions conduites en chambre sourde.

BIBLIOGRAPHIE

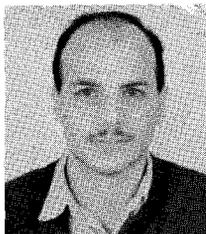
- [1] I. DAUBECHIES, « Orthogonal Bases of compactly supported Wavelets », *Comm. pure & Appl. Math* 41, 1988, pp. 909-996
- [2] Z. EL-KHOURY, « Holographie acoustique champ proche », Diplôme d'Études Approfondies, E.N.S.I.C.A, 1990.
- [3] D. FAGHANI, « Applications des Ondelettes à l'Holographie Acoustique », Diplôme d'Études Approfondies, E.N.S.I.C.A, 1992.
- [4] P. FLANDRIN, J. SAGELOLI, J.P. SESSAREGO, B. VIDALIE et M. ZAKHARIA, « Ondelettes, Spectrogrammes et Lissages de la Distribution de Wigner-Ville », *Douzième Colloque GRETSI*, Juan-les-Pins, 1989.
- [5] J.W. GOODMAN, « Introduction to Fourier optics », *McGraw-Hill*, New-York, 1968.
- [6] Gordon S. KINO, « Acoustic Waves : Devices, Imaging and Analog Signal Processing », *Prentice-Hall Signal Processing series*, New Jersey, 1987.
- [7] A. GROSSMANN, R. KRONLAND-MARTINET and J. MORLET, « Reading and understanding continuous wavelet transforms », in *Wavelets*,

Time-Frequency Methods, and Phase Space, J.M. Combes, A. Grossmann, and P. Tchamitchian, Eds. Berlin-Springer, 1989.

- [8] J. HALD, « STSF – A unique technique for scan-based Near-field Acoustic Holography without restrictions on coherence » *Brüel&Kjor Technical Review*, 1989.
- [9] J. HALD, « STSF – Practical Instrumentation and application », *Brüel&Kjor Technical Review*, 1989.
- [10] J. HALD, K.B. GINN, « Development of STSF with emphasis on the influence of bandwidth, Part I : Background and Theory », *Noise-Con '88, Proceedings*, 529, 1988.
- [11] S.G. MALLAT, « A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, n°7, 1989.
- [12] J.D. MAYNARD, E.G. WILLIAMS and Y.LEE, « Nearfield acoustic holography : I. Theory of generalized holography and the development of NAH », *J. Acoust. Soc. Am.* (78, 1395), 1985.
- [13] Y. MEYER, « Orthogonal Wavelets », in *Wavelets, Time-Frequency Methods, and Phase Space*, J.M. Combes, A. Grossmann, and P. Tchamitchian, Eds. Berlin-Springer, 1989
- [14] W.A. VERONESI and J.D. MAYNARD, « Nearfield acoustic holography : II. Holographic reconstruction algorithms and computer implementation », *J. Acoust. Soc. Am.* (81, 1307), 1987.
- [15] E.G. WILLIAMS, E.J. SKUDRZYK, J.D. MAYNARD, « Sound source reconstructions using a microphone array », *J. Acoust. Soc. Am.* (68, 340), 1980.

LES AUTEURS

Ziad EL-KHOURY



Ziad El-Khoury est né en 1967 à Bazbina (Liban). Il est ingénieur de l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Constructions Aéronautiques et a obtenu son doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse pour ses travaux réalisés au sein du département avionique et système de l'E.N.S.I.C.A. Ses domaines de recherche ont porté sur la transformée par ondelettes et l'holographie acoustique. Il travaille actuellement chez Matra Transport à Montrouge.

Claude NOUALS



Claude Nouals, ingénieur E.N.S.E.E.I.H.T., est Professeur à l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Constructions Aéronautiques où il assure les enseignements de traitement du signal. Il participe à la direction d'une équipe de jeunes chercheurs. Ses domaines de recherche sont essentiellement : les représentations temps-fréquence, l'holographie acoustique, les problèmes inverses et le contrôle actif.

Manuscrit reçu le 6 mars 1993.