

# *Fusion de données*

---

## Restauration d'image par fusion de films de sensibilités différentes

---

### *Image Restoration by Fusion of Films of Different Sensitivities*

par R. AZENCOTT, B. CHALMOND\*, J.P. WANG\*\*

*Ecole Normale Supérieure, Cachan, DIAM-CMLA.*

\* *Université de Cergy-Pontoise, Département de Physique.*

\*\* *Sudimage R&D, Cachan.*

#### Résumé

Cette article s'intéresse à la fusion d'images sériées, et ce pour la restauration de l'image 2D d'un objet. Pour réaliser cette fusion, nous avons besoin d'estimer la fonction de transfert entre les courbes de sensibilités de ces films. Dans notre contexte, cette estimation est difficile car l'une des images est perturbée par des taches lumineuses. Dans ce cadre, nous montrons que l'on peut s'affranchir de la présence de ces taches afin de réaliser la restauration.

**Mots clés :** Restauration d'images, fusion de films, fonction de transfert entre films de sensibilité différentes, images tachées, ajustement de spline tricubique.

#### Abstract

*This article is concerned with the fusion of stacked images, in order to restore the 2D image of an object. To perform this fusion, we have to estimate the transfer function between the sensitivity functions of the films on which these images have been taken. In our context, this estimation is difficult because these images are degraded by widespread stains. We show that it is possible to estimate both the stains and the transfer function to implement the restoration.*

**Key words :** *Image restoration, film fusion, transfer function between films of different sensitivities, stained images, fitting tricubic spline functions.*

#### Remerciements.

Ce projet a été soutenu par le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA), et réalisé par le bureau d'études SUDIMAGE.

## 1. Introduction

Notre objectif est de réaliser la restauration de l'image d'un objet, à partir de plusieurs images dégradées obtenues au travers de films de sensibilités différentes. Pour fixer les idées, on considèrera que ces films ont été sensibilisés alors qu'ils étaient superposés les uns sur les autres. Ainsi, ces films fournissent des images suivant le même angle de vue, mais avec des dégradations propres à chacun d'eux. Le but de la restauration est d'obtenir une seule image de l'objet, et ce en traitant simultanément l'ensemble des dégradations; on parlera donc d'un traitement de restauration-fusion. Ceci nécessite en particulier de connaître la fonction de

transfert (FT) entre les courbes de sensibilité de ces films. Ici, l'exposé porte sur un couple d'image, l'extension à plus de deux films n'étant qu'une affaire de notations.

En général, on suppose connue exactement la fonction de réponse des films, et donc celle de la FT [1], [2]. Cette hypothèse peut être mise en défaut, en particulier quand les conditions d'acquisition sont mal contrôlées. Cet article se place dans cette situation, en supposant que l'une des acquisitions est perturbée par un fort bruit et de larges taches lumineuses. La présence de ces taches est un problème délicat, qui rend difficile l'estimation de la FT. Soulignons qu'il est absolument indispensable de tenir compte de la dégradation des taches, afin d'obtenir une estimation fiable de la FT et par conséquent une restauration fondée. Ce problème n'est pas classique et nous n'avons pas trouvé dans la littérature de précédent, [3] [4] [5] [6] [7].

La restauration-fusion a lieu en deux étapes. En premier lieu, l'estimation de la FT est menée. Ici, cette estimation s'apparente à une estimation robuste, dans le sens où les observations perturbées par les taches peuvent être considérées comme des

valeurs aberrantes. Ceci sera d'autant plus clair que nous nous baserons sur un modèle de régression pour traiter ce problème. Cependant, nous n'utiliserons pas les méthodes classiques d'estimation robuste développées en statistique. Celles-ci nécessitent que les valeurs aberrantes soient peu nombreuses et dispersées. Or ici, nous sommes dans une situation complètement opposée puisque les valeurs aberrantes sont très nombreuses et fortement corrélées. Notre modèle sera celui d'une régression spline tricubique, qui ne sera pas standard car ses résidus pourront être de variance non constante. En deuxième lieu, la restauration sera menée, en ce plaçant dans un cadre markovien-bayésien. Nous ne développerons pas en détail ce dernier, mais nous insisterons sur la partie de son énergie qui constitue le "rappel aux données" et qui est au centre de la restauration-fusion.

## 2. Définitions et modèles

### 2.1. MODÈLES DE DÉGRADATION

Deux images superposées d'un même objet sont acquises au travers de deux films  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  de sensibilités différentes. Elles sont échantillonnées suivant une grille  $S$  et discrétisées sur un ensemble  $\mathcal{L}$ . Soient  $(D, D')$  un tel couple d'images numériques. Elles correspondent à la même vue de l'objet, et donc sont supposées sans décalage. Les figures (a.1,a.4) et (b.1,b.2)) sont deux exemples d'un tel couple.

Si  $\delta^I$  désigne l'image idéale de l'objet,  $D$  est une version dégradée de  $\{F(\delta_s^I), s \in S\} \doteq F(\delta^I)$  :

$$\begin{aligned} D &= F(\delta^I) + \epsilon, \\ &= \delta + \epsilon. \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\epsilon$  est un bruit blanc de variance  $\sigma^2$ .  $\delta$  est l'image théorique  $F(\delta^I)$ .  $F$  est la réponse du film  $\mathcal{F}$ . Sa définition est la suivante : "En absence de bruit, quand une intensité de radiation  $r$  atteint le film  $\mathcal{F}$  au site  $s$ , ce site répond avec la valeur théorique  $\ell = F(r)$ ".  $F$  est une fonction homogène dans le sens où sa définition est spatialement invariante : elle ne dépend pas de  $s$ .  $F$  est une fonction lisse, non-décroissante et continue. Parfois, on peut supposer qu'elle est d'un type particulier, par exemple  $F(r) = c/[(a/r)^b + 1]$ . Ici, nous ne supposons pas une telle forme paramétrique.

$D'$  est supposée beaucoup plus dégradée que  $D$ . Pour nos conditions expérimentales, le modèle (1) n'est pas réaliste pour  $D'$ . En fait, de larges taches indépendantes de l'objet apparaissent sous-jacentes à  $D'$ , (voir les figures a.3 et b.4). Ces taches sont le résultat de causes mal identifiées (problèmes d'exposition, de développement, etc). En ajoutant les effets des taches, le modèle de dégradation pour  $D'$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} D' &= F'(\delta^I) + T' + \epsilon', \\ &= \delta' + T' + \epsilon', \end{aligned} \quad (2)$$

où  $T'_s \neq 0$  si  $s$  correspond à une tache et  $T'_s = 0$  sinon. Notre hypothèse de base qui rend l'estimation réalisable repose sur les variations douces des taches :

$$T'_s \simeq T'_u \text{ dès que } \|s - u\| < \Delta, \quad (3)$$

où  $\Delta$  est une distance supposée connue, (dans notre application  $\#S = 512^2$  et  $\Delta = 20$ ).  $\delta' = F'(\delta^I)$  est l'image théorique espérée quand le film est de sensibilité constante.  $\epsilon'$  est un bruit blanc de variance  $\sigma'^2$ . De plus,  $D'$  est très brouillée par un fort bruit assimilable par exemple à celui d'un grain, (voir figures a.4 et b.2), et nous supposons donc que

$$\sigma'^2 \gg \sigma^2. \quad (4)$$

Enfin suivant une hypothèse classique, on est parfois amené à considérer la variance comme dépendante du signal. Dans ce cas, c'est une fonction inconnue de  $\delta_s$ . Ici, cette hypothèse est à envisager pour  $\sigma'^2$ . Cependant comparée au problème présenté ci-dessous, cette hypothèse apparaît secondaire; aussi pour simplifier notre exposé, nous l'omettrons et nous renvoyons le lecteur à [8] et [9] pour une présentation de ce point.

### 2.2. FONCTION DE TRANSFERT

Notre étude porte sur un problème de restauration pour lequel nous devons estimer la fonction de transfert  $H$  entre  $F$  et  $F'$ . Cette FT est définie de manière semblable à  $F$ .

**Definition 1** En l'absence de bruit et de tache, quand le film  $\mathcal{F}$  répond avec la valeur  $\ell$  au site  $s$ , le film  $\mathcal{F}'$  répond avec la valeur  $H(\ell)$  en ce même site.

Pour résumer, nous avons le schéma suivant :

$$\delta^I \xrightarrow{F} \delta \xrightarrow{H} \delta'$$

sur lequel apparaît la définition de la FT :

$$H(\delta) = \delta', \quad (5)$$

et aussi  $F'(\delta^I) = H(\delta)$ , et donc (2) peut être réécrite :

$$D' = H(\delta) + T' + \epsilon' \quad (6)$$

Arrivé à ce point, définissons la FT "non-homogène" :

**Definition 2** En l'absence de bruit, quand le film  $\mathcal{F}$  répond avec la valeur  $\ell$  au site  $s$ , le film  $\mathcal{F}'$  répond avec la valeur  $H(\ell) + T'_s$  au même site.

Appelons  $G_s(\cdot)$  la fonction non-homogène au site  $s$  :

$$\forall \ell \in \mathcal{L}, \quad G_s(\ell) \doteq H(\ell) + T'_s. \quad (7)$$

Soulignons que  $G$  n'est pas à proprement parlé une fonction de transfert et est définie comme telle que pour des raisons d'ordre techniques liées à notre objectif d'estimation.



Figure a.1



Figure a.2

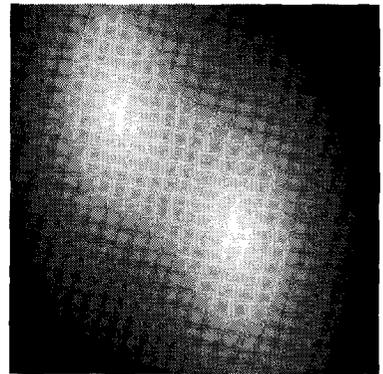


Figure a.3



Figure a.4



Figure a.5

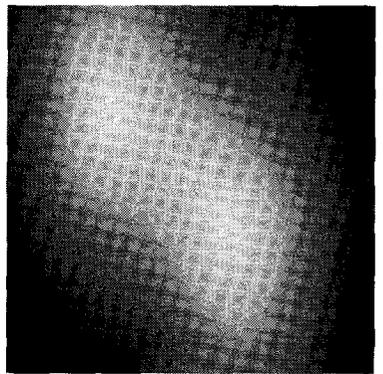


Figure a.6

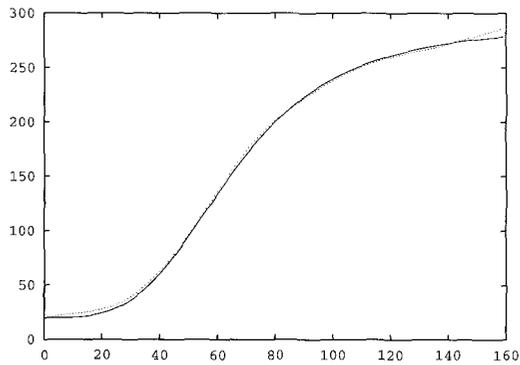


Figure a.7

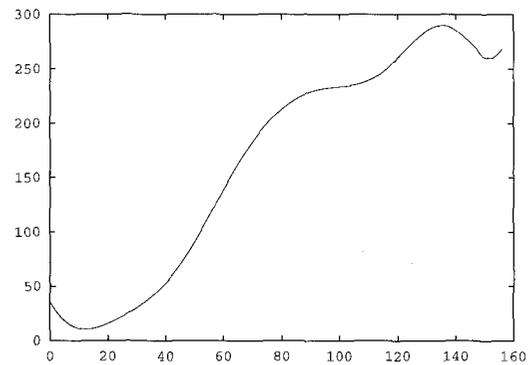


Figure a.8

Figure a.1. – Image  $D = \delta$ . Figure a.2. – Image  $H(\delta)$ . Figure a.3. – Image des des taches  $T'$ . Figure a.4. – Image  $D'$ . Figure a.5. – Image  $\hat{H}(D)$ .  
Figure a.6. – Image  $\hat{T}'$ . Figure a.7. –  $H$  et  $\hat{H}$ . Figure a.8. –  $\hat{H}$  sans considération des taches.

Remarquons que dans l'équation (6), nous avons  $\ell = \delta_s$  au site  $s$  et donc nous pouvons écrire :  $D'_s = G_s(\delta_s) + \epsilon'_s$ . Non-homogène signifie que  $G$  est une fonction à la fois de  $s \in S$  et de l'intensité  $\ell \in \mathcal{L}$ .  $G_s(\cdot) \doteq \{G_s(\ell), \ell \in \mathcal{L}\}$  est la FT au site  $s$ , et peut être vue comme la FT  $H$  décalée par l'offset  $T'_s$ .

Il est commode de voir la fonction tridimensionnelle  $G$  comme une famille de fonctions unidimensionnelles indexées par  $s \in S$  :  $\{G_s(\cdot), s \in S\}$ . L'hypothèse de base (3) sur les taches entraînent que les variations de forme entre les fonctions  $G_s(\cdot)$  sont elles-même douces et localement faibles. Plus précisément, si  $\tilde{W}_s$

désigne une fenêtre carrée centrée en  $s$  et de coté  $\Delta$ , on a :

$$G_s(\cdot) \simeq G_u(\cdot), \quad \forall u \in \widetilde{W}_s. \quad (8)$$

Etablissons une relation de base entre  $D$  et  $D'$ . Tout d'abord, nous avons  $D'_s = G_s(\delta_s) + \epsilon'_s = G_s(D_s - \epsilon_s) + \epsilon'_s$ . Par ailleurs, par un développement de Taylor au premier ordre de  $G$  autour de  $D_s$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} D'_s &\simeq G_s(D_s) - \frac{\partial}{\partial D_s} G_s(D_s) \epsilon_s + \epsilon'_s, \\ &= G_s(D_s) + w_s, \quad \forall s \in S, \end{aligned} \quad (9)$$

où  $w$  est un nouveau bruit blanc. Alors à partir de l'hypothèse  $Var(\epsilon'_s) \gg Var(\epsilon_s)$  vient l'approximation  $Var(w_s) \simeq Var(\epsilon'_s)$ , soit :

$$Var(w_s) \simeq \sigma'^2. \quad (10)$$

Dans (9),  $G$  va d'une image bruitée vers une image encore plus bruitée. Cela nous permettra de définir (9) suivant un modèle de régression entre  $D$  et  $D'$ , puisqu'un tel modèle nécessite que les composantes de son expression linéaire soient peu bruitées. Par la suite, quand nous le jugerons légitime, nous remplacerons souvent les symboles d'approximation  $\simeq$  par des symboles d'égalité = afin d'alléger la lecture.

### 3. Le contexte de la restauration

La fonction de transfert  $H$  peut être utilisée de différentes manières. Nous présentons ici un problème de restauration qui nécessite l'estimation de  $H$ . Dans notre application, la fonction réponse du film  $\mathcal{F}'$  est linéaire et celle du film  $\mathcal{F}$  est non-linéaire. (En fait dans cette application (cf [8], [9]), nous avons plusieurs types de film  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}'$ ,  $\mathcal{F}''$ , ...). Avec les seules informations à notre disposition, le problème de la restauration de  $\delta^I$  ne peut être abordé. Nous choisissons  $D'$  comme image de référence car celle ci a été obtenue au travers d'un film de sensibilité linéaire. Notre objectif est donc la restauration de  $\delta'$  étant donné le couple  $(D, D')$ . Cela signifie que l'image de l'objet restauré sera donnée à une transformation linéaire près.

Venons en à l'intérêt de travailler avec plusieurs films de sensibilités différentes. Dans notre application, nous prenons avantage du fait suivant : la réponse du film est fortement bruitée quand la fonction de réponse est linéaire, et à l'inverse, la réponse est peu bruitée quand la fonction de réponse est non linéaire. Ainsi, si nous tentions de restaurer l'objet avec seulement  $D'$ , le résultat serait bien donné dans une échelle linéaire mais sa forme serait fortement imprécise puisque  $D'$  est dégradée par un fort bruit et des taches. D'un autre coté, si nous tentions de restaurer l'objet avec seulement  $D$ , la forme résultante serait mieux détaillée mais donnée dans une échelle non linéaire, ce que nous ne voulons pas.

En prenant en compte simultanément  $D$  et  $D'$ , l'objet peut être restauré à la fois dans une échelle linéaire et sans forte dégradation de sa forme.

La restauration de  $\delta'$  est obtenue en minimisant une énergie du type

$$U(\delta' | D, D') = U_1(D, D' | \delta') + \gamma U_2(\delta'),$$

On pourra en consulter des exemples dans [10] [11] [12] [13] [14]. Cette énergie est associée à la distribution de Gibbs :

$$P(\delta' | D, D') \propto \exp -U(\delta' | D, D'),$$

qui fait que sous certaines hypothèses,  $\delta'$  est un champ markovien. Le rôle de  $U_2$  est de caractériser la régularité locale de  $\delta'$ .  $U_1$  est un terme de fidélité aux données, pondéré par le paramètre  $\gamma$ . L'expression de  $U_1$  découle directement du fait que  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  sont des bruits blancs supposés ici gaussiens. Plus précisément, on a :

$$P(D, D' | \delta') \propto \exp -U_1(D, D' | \delta').$$

où  $U_1$  s'écrit :

$$\begin{aligned} U_1(D, D' | \delta') &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_s (D_s - H^{-1}(\delta'_s))^2 \\ &+ \frac{1}{\sigma'^2} \sum_s (D'_s - T'_s - \delta'_s)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

A la vue de cette expression, il est clair que pour réaliser la restauration, il est nécessaire d'estimer  $H$  et  $T'$ , ainsi que  $\sigma^2$  et  $\sigma'^2$ .

### 4. Estimation de la fonction de transfert

#### 4.1. ESTIMATION PRÉLIMINAIRE

Nous verrons au paragraphe 4.2, qu'avec seulement une version lissée de  $G$ , on peut réaliser l'estimation de  $H$ . Ce paragraphe 4.1, s'attache à l'estimation de cette version lissée notée  $\mathcal{G}$ . Pour cela, nous allons extraire du couple  $(D, D')$  une information pertinente, notée  $m$ , qui sera vue comme une version bruitée de  $G$ .

Tout d'abord dans un soucis didactique, examinons le cas le plus simple où il n'y a pas de tache :  $G_s(\cdot) = H(\cdot)$ ,  $\forall s \in S$ . Ici, par application directe de la définition 1, les données pertinentes sont obtenues comme suit. Soit le sous-ensemble de  $S$  :

$$N(\ell) = \{u \in S : D_u = \ell\}. \quad (12)$$

En l'absence de bruit, nous devrions avoir théoriquement :  $D'_u = H(\ell)$ ,  $\forall u \in N(\ell)$ . Mais à cause du bruit, nous obtenons un ensemble de valeurs  $\{D'_u\}$  plus ou moins dispersées autour de  $H(\ell)$ , ensemble que nous remplaçons par la valeur moyenne :

$$m(\ell) = \frac{1}{\#N(\ell)} \sum_{s \in N(\ell)} D'_s. \quad (13)$$

Ainsi, pour tout  $\ell$ , nous calculons une valeur  $m(\ell)$  qui peut être considérée comme une version bruitée de  $H(\ell)$ . L'estimation de  $H$  consiste alors à représenter approximativement  $\{m(\ell), \ell \in \mathcal{L}\}$  par une courbe, par exemple par une spline cubique. Dans le paragraphe suivant, nous allons généraliser cette approche à notre cas.  $m$  sera appelé "cube des données".

### 4.1.1. Construction du cube

Il s'agit maintenant de déterminer des données pertinentes pour chacune des fonctions de transfert  $G_s(\cdot)$ . Puisque le graphe de ces fonctions varient continuellement et lentement, l'idée consiste à considérer de manière locale l'approche du paragraphe précédent. Ainsi, pour tout  $s$ , une version dégradée  $m_s(\cdot)$  de  $G_s(\cdot)$  est localement déterminée. Décrivons cette construction. Pour tout  $(s, \ell) \in S \times \mathcal{L}$ , soit  $\mathcal{W}_{s,\ell}$  une fenêtre carrée centrée en  $s$ . Comme en (12), un ensemble de sites est défini :

$$N_s(\ell) = \{u \in \mathcal{W}_{s,\ell} : D_u = \ell\},$$

et comme en (13),  $m_s(\ell)$  est l'intensité moyenne

$$m_s(\ell) = \frac{1}{\#N_s(\ell)} \sum_{u \in N_s(\ell)} D'_u.$$

Remarquons déjà que si nous avons  $\mathcal{W}_{s,\ell} \subseteq \widetilde{\mathcal{W}}_s$ , pour tout  $\ell$ , alors  $m_s(\cdot)$  serait une version bruitée de l'unique fonction  $G_s(\cdot)$ ; ceci parce que dans  $\widetilde{\mathcal{W}}_s$  les  $\{G_u(\cdot)\}$  sont approximativement les mêmes, (cf. 8).

Pour déterminer la taille de  $\mathcal{W}_{s,\ell}$ , nous démarrons avec la fenêtre initiale  $\widetilde{\mathcal{W}}_s$  dont la taille est indépendante de  $(s, \ell)$ . Nous voulons alors que l'histogramme de  $D$  restreint à  $\mathcal{W}_{s,\ell}$ , soit proche de l'histogramme  $h$  calculé sur tout l'ensemble  $S$ . Soit donc  $c(\ell)$  une valeur proportionnelle à  $h(\ell)$ . Aux voxels où la condition :

$$\#N_s(\ell) \simeq c(\ell), \quad (14)$$

n'est pas vérifiée, la taille de la fenêtre est itérativement augmentée ou diminuée jusqu'à obtenir une fenêtre  $\mathcal{W}_{s,\ell}$  qui satisfasse la condition.

Reprenons la remarque faite immédiatement ci-dessus. Quand  $\mathcal{W}_{s,\ell} \subseteq \widetilde{\mathcal{W}}_s$  n'est plus vérifiée, alors  $m_s(\ell)$  n'est plus une information pertinente pour  $G_s(\ell)$  car elle est construite sur des couples d'observations  $(D_u, D'_u)$  issues de fonctions de transfert  $G_u(\cdot)$  différentes de  $G_s(\cdot)$ . Aussi, pour tout  $s \in S$ , nous définissons l'intervalle  $\mathcal{L}_s \subset \mathcal{L}$ , comme

$$\ell \in \mathcal{L}_s \Leftrightarrow \mathcal{W}_{s,\ell} \subseteq \widetilde{\mathcal{W}}_s.$$

$\mathcal{L}_s$  peut être vu comme un ensemble d'intensités pour lesquelles  $N_s(\ell)$  est bien localisée autour de  $s$  :  $N_s(\ell) \subset \mathcal{W}_{s,\ell} \subseteq \widetilde{\mathcal{W}}_s$ .

### 4.1.2. Equations du cube de données

A partir de (9), nous pouvons réécrire  $m$  :

$$\begin{aligned} m_s(\ell) &= G_s(\ell) + \bar{w}_{s,\ell}, \\ G_s(\ell) &= \frac{1}{\#N_s(\ell)} \sum_{u \in N_s(\ell)} G_u(\ell), \\ \bar{w}_{s,\ell} &= \frac{1}{\#N_s(\ell)} \sum_{u \in N_s(\ell)} w_u. \end{aligned} \quad (15)$$

où  $G_u(D_u)$  a été remplacé par  $G_u(\ell)$  puisque dans  $N_s(\ell)$  nous avons  $D_u = \ell$ .  $\bar{w}_{s,\ell}$  est le bruit coloré de variance :

$$Var(\bar{w}_{s,\ell}) = \frac{\sigma'^2}{\#N_s(\ell)} = \frac{\sigma'^2}{c(\ell)}. \quad (16)$$

L'hypothèse (3) est essentielle, et par conséquent aussi la propriété (8). En premier lieu, elle permet l'approximation :

$$\forall \ell \in \mathcal{L}_s, \quad \frac{1}{\#N_s(\ell)} \sum_{u \in N_s(\ell)} G_u(\ell) \simeq G_s(\ell).$$

En effet, quand  $\ell \in \mathcal{L}_s$ , on a vu que  $N_s(\ell) \subset \mathcal{W}_{s,\ell} \subseteq \widetilde{\mathcal{W}}_s$ . Donc sur  $\mathcal{L}_s$ , l'expression (15) peut être simplifiée :  $m_s(\ell) = G_s(\ell) + \bar{w}_{s,\ell}$ . Quand  $\ell \notin \mathcal{L}_s$ , cette expression n'est plus valide car le processus de construction du cube va chercher des données en dehors de  $\widetilde{\mathcal{W}}_s$ , et parfois trop loin de  $s$ . En second lieu, elle conduit à une expression qui permettra l'estimation des taches, à savoir :  $T'_s = G_s(\ell) - H(\ell)$ ,  $\forall \ell \in \mathcal{L}_s$ .

### 4.1.3. Estimation

Considérons le modèle (15).  $\mathcal{G}$  étant une surface obtenue par lissage, il est naturel de la modéliser par une surface lisse. On choisit donc de représenter  $\mathcal{G}$  par une fonction spline tricubique sur  $S \times \mathcal{L}$ . Un des principaux avantages de cette représentation est son caractère local : quand la valeur d'un voxel  $(s, \ell)$  est modifiée, les valeurs d'ajustement aux sites voisins sont de moins en moins affectées lorsqu'on s'éloigne de  $(s, \ell)$ . Depuis les travaux de [15], les représentations à base de spline de régression ont été largement développées en traitement d'images ([16], [17], [18], [19], parmi beaucoup d'autres). Notons  $s = (x, y)$ . Classiquement, dans le cadre de la régression spline, la grille d'échantillonnage  $S \times \mathcal{L}$  est partitionnée en une grille plus grossière  $\square S \times \square \mathcal{L}$ , en plaçant des noeuds équidistants sur chacune des coordonnées  $x, y$  et  $\ell$ . Soient  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$  ces ensembles de noeuds et  $B^1, B^2, B^3$  l'ensemble des  $B$ -splines construites sur ces noeuds.  $\mathcal{G}$  est alors modélisée par une spline tricubique basée sur  $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2 \times \mathcal{N}_3$ . Pour tout  $(x, y, \ell) \in S \times \mathcal{L}$ , sa représentation est :

$$g_{x,y}(\ell) = \sum_{i,j,k} B_i^1(x) B_j^2(y) B_k^3(\ell) \alpha_{i,j,k}. \quad (17)$$

Maintenant, notre modèle de base est constitué des expressions de (15), (16) et (17) dans lesquelles les paramètres inconnus sont  $\{\alpha_{i,j,k}\}$  et  $\sigma'^2$ . Puisque nous avons  $Var(\bar{w}_{s,\ell}) = \sigma'^2/c(\ell)$ ,

nous sommes conduits à estimer  $\mathcal{G}$  en optimisant un critère des moindres carrés pondérés en calculant :

$$\min_{\alpha} \sum_{s,\ell} [m_s(\ell) - \mathcal{G}_s(\ell)]^2 c(\ell). \quad (18)$$

Dans le cadre des fonction splines tricubiques, ce calcul n'est pas standard. La solution en est donnée dans [8] et [9] où ce problème est traité dans un contexte plus général, à savoir celui où la variance du bruit est dépendante du signal. Remarquons enfin que la non prise en compte de la structure d'autocorrélation de  $\bar{w}$  ne pose pas de problème. En effet, on sait que des moindres carrés pondérés par une telle structure ne peuvent pas améliorer l'estimation d'un modèle de régression spline, [19], [20], [21].

## 4.2. ESTIMATION FINALE

Nous décrivons maintenant comment  $H$  est estimée. Rappelons que pour tout  $\ell \in \mathcal{L}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} G_s(\ell) &= H(\ell) + T'_s, \\ \mathcal{G}_s(\ell) &= \frac{1}{\#N_s(\ell)} \sum_{u \in N_s(\ell)} G_u(\ell). \end{aligned} \quad (19)$$

De plus nous avons  $\mathcal{G}_s(\ell) \simeq G_s(\ell)$  quand  $\ell \in \mathcal{L}_s$ , et  $T'_s \simeq \mathcal{G}_s(i) - H(i)$ , pour toute intensité  $i \in \mathcal{L}_s$ .

Pour tout  $s$ , nous allons établir un ensemble d'équations linéaires reliant les inconnues  $\{H(\ell), \ell \in \mathcal{L}\}$  aux valeurs  $\{\hat{\mathcal{G}}(s, \ell), \ell \in \mathcal{L}\}$ . Les rappels précédents donnent immédiatement :

$$\forall \ell \in \mathcal{L}, \mathcal{G}_s(\ell) = H(\ell) + \frac{1}{\#N_s(\ell)} \sum_{u \in N_s(\ell)} T'_u.$$

Quand  $s$  balaye  $S$ , nous obtenons  $(\#\mathcal{L}) + (\#S)$  inconnues pour  $(\#\mathcal{L}) \times (\#S)$  équations linéaires. En fait, ce système est sans intérêt car il a une infinité de solution. Nous allons donc réduire l'espace des inconnues. Puisque  $T'_u \simeq \mathcal{G}_u(i) - H(i)$  pour tout  $i \in \mathcal{L}_u$ , nous pouvons tirer au hasard une valeur  $\ell_u$  dans  $\mathcal{L}_u$  pour remplacer  $T'_u$  par  $\mathcal{G}_u(\ell_u) - H(\ell_u)$ . Les équations recherchées sont alors :

$$\begin{aligned} \forall \ell \in \mathcal{L}, \hat{\mathcal{G}}_s(\ell) &= \frac{1}{\#N_s(\ell)} \sum_{u \in N_s(\ell)} \hat{\mathcal{G}}_s(\ell_u) \\ &\simeq H(\ell) - \frac{1}{\#N_s(\ell)} \sum_{u \in N_s(\ell)} H(\ell_u), \end{aligned} \quad (20)$$

où  $\mathcal{G}$  a été remplacé par  $\hat{\mathcal{G}}$ . Maintenant, nous avons  $(\#\mathcal{L})$  pour  $(\#\mathcal{L}) \times (\#S)$  équations. Quand  $\ell$  parcourt  $\mathcal{L}$ , ces équations sont réunies dans l'expression matricielle :  $\underline{Y}_s = X_s \underline{H}$ , où  $\underline{Y}_s$  et  $\underline{H}$  sont des vecteurs tels que  $\underline{Y}_s(\ell)$  est le membre de droite de (20) et  $\underline{H}(\ell) = H(\ell)$ ; la matrice  $X_s$  est celle induite par le système linéaire.

L'espace des inconnues peut être encore réduit en considérant une représentation spline cubique :  $\underline{H} = B \underline{\alpha}$ . Finalement  $H$  est estimé suivant :

$$\min_{\alpha} \sum_s \| \underline{Y}_s - X_s B \underline{\alpha} \|^2, \quad (21)$$

sous une contrainte arbitraire comme  $H(0) = a$ , nécessaire puisque  $X_s$  est de rang  $(\#\mathcal{L} - 1)$ . Cette contrainte ne nous soucie pas, car nous savons que la restauration ne peut être réalisée qu'à une échelle linéaire près, comme il a été précisé dans le paragraphe 3. Avec  $\hat{\underline{H}} = B \hat{\underline{\alpha}}$  l'estimation des offsets est directement :

$$\hat{T}'_s = \hat{\mathcal{G}}(s, \ell_s) - \hat{\underline{H}}(\ell_s).$$

## 5. Résultats expérimentaux

Nous allons dans un premier temps utiliser des images créées artificiellement afin d'évaluer la qualité de l'estimation de la fonction de transfert, puis nous continuerons avec des images réelles jusqu'à la restauration.

Les données artificielles ont été créées comme suit. L'image originale  $\delta$  est l'image bien connue sous le nom de "Léna" des traiteurs d'image, (Figure a.1). Dans cette première expérience,  $D$  a été prise égale à  $\delta$ , et a été discrétisée sur 160 niveaux de gris.  $H$  a été choisie comme suit :

$$H(\ell) = c_1 \frac{\ell^\alpha}{(c_2 + \ell^\alpha)} + c_3,$$

(Figure a.7). La Figure a.2 montre  $\delta' = H(\delta)$ . Le champ des taches  $T'$  a été obtenu en additionnant deux surfaces gaussiennes non-normalisées, leur mode étant égal à la moitié de l'étendu de  $\delta'$ , (Figure a.3).  $D'$  a été artificiellement créée suivant le modèle  $D' = \delta' + T' + \epsilon'$ , (Figure a.4).

Pour ce couple  $(D, D')$ , la FT a été estimée par la méthode décrite au paragraphe 4. En Figure a.5, on voit que  $\hat{H}(D)$  ressemble très étroitement à  $H(D)$  donnée en Figure a.2. Ceci s'explique par la grande qualité de l'estimation  $\hat{H}$  comme le montre la Figure a.7 où  $H$  et  $\hat{H}$  sont presque confondues. Notre procédure a efficacement extrait les taches (Figure a.6). Finalement, la Figure a.8 montre l'estimation de  $H$  obtenu sans prendre en compte l'effet des taches.

Venons en à une expérience sur données réelles. Les Figure b.1 et Figure b.2 représentent le couple  $(D, D')$  et comme précédemment, on montre  $\hat{H}(D)$  et  $\hat{T}'$  respectivement dans les Figure b.3 et Figure b.4. Les taches estimées confirment ce que l'on pressent à l'examen visuel de  $D'$ , compte tenu du fait que l'objet a une symétrie de révolution. La restauration-fusion du couple  $(D, D')$  a été menée suivant l'approche du paragraphe 3. La Figure b.5 en donne le résultat. Pour en juger, il est nécessaire d'utiliser une autre représentation graphique que les niveaux de gris, à savoir les

profils de ligne d'image. Ainsi, la Figure b.7 est un profil de  $\hat{H}(D)$  qui rappelle le est la solution initiale de l'algorithme d'optimisation. Le profil correspondant dans l'image restaurée est tracé en Figure b.8. Remarquons que le résultat n'est pas équivalent à un simple lissage. Enfin, la Figure b.6 donne le profil dans  $\hat{G}(D)$ . On constate sur celui-ci combien les effets des taches sont présents, et on peut imaginer les conséquences désastreuses sur la restauration si cette image avait été choisie comme solution initiale.

## 6. Conclusions

La restauration-fusion de deux images sériées dont l'une est dégradée par des taches et un fort bruit a été étudiée. Le traitement nécessite tout d'abord l'estimation de la fonction de transfert  $H$  entre les courbes de sensibilité des films ayant donné ces images. La procédure standard pour estimer  $H$  qui repose sur la constitution des données (13) est inefficace car un grand nombre de ces données-ci sont perturbées par les taches et donc sans signification directe pour  $H$ . On est donc dans la situation où un modèle doit être ajusté à des données dont certaines sont entachées d'erreurs. On a montré que sous l'hypothèse où les variations locales des taches sont petites, cette estimation est réalisable, et ce, avec une grande précision comme l'indiquent les expériences réalisées. Ainsi, la restauration peut être menée, avec comme souci d'obtenir une reconstruction de l'objet en terme de précision sur les niveaux de gris plutôt que par rapport à des critères visuels.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. L. Whitman, Combination of several radiographic film types, *Private communication*, Los Alamos National Laboratory, 1990.
- [2] J.C. Dainly and R. Shaw, *Image Science*, Academic Press, 1974.
- [3] H.J. Trussel, Processing of X-ray images, *Proc. of the IEEE*, 69, 5, pp 615-627, 1981.
- [4] M. Barret and W. Swindell, *Radiological Imaging*, Academic Press, 1981.
- [5] B. Chalmond, PSF estimation for image deblurring, *CVGIP : Graph. models and Image processing*, 53, 4, pp 364-372, 1991.
- [6] M.R. Bhatt and U.B. Desai, Robust image restoration algorithm using Markov random field model, *CVGIP : Graph. models and Image processing*, 56, 1, pp 61-74, 1994.
- [7] J. Clark and A.D. Yuille, *Data fusion for sensory information systems*, Kluwer Press, 1990.
- [8] R. Azencott, B. Chalmond, J.P. Wang, Non-homogeneous transfer function estimation for film fusion using tricubic splines, Preprint 9336, *CMLA, ENS-Cachan*, France, 1993.
- [9] J. P. Wang, *Champs markoviens multi-échelles : Applications à la segmentation d'images texturées et à la fusion multi-films*. Thèse, Mathématiques, Université Paris-Sud, Orsay, 1994. pp 161-173, 1984.

- [10] S. Geman, D. Geman, Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-6, pp721-741, 1984.
- [11] S. Geman, D. Mc-Clure and D. Geman, A nonlinear filter for film restoration and other problems in image processing, *CVGIP : Graph. models and Image processing*, 34, 4, pp 281-289, 1992.
- [12] R. Azencott, Image analysis and Markov field, *Proc. of Int. Conf. on Ind. Appl. Math.*, Invited Paper, SIAM, 1987.
- [13] B. Chalmond, Image restoration using an estimated Markov model, *Signal Processing*, 15, pp115-129, 1988.
- [14] R. Azencott, B. Chalmond and F. Coldefy, Markov fusion of a pair of noisy images to detect intensity valleys, *Int. Conf. on Patt. Recogn.*, The Hague, 1992. To appear in *Int. Journal of Computer Vision*.
- [15] C. DeBoor, Bicubic spline interpolation, *J. Math. Phys.*, 41, pp 212-218, 1962.
- [16] P. Cinquin, *Application des fonctions splines au traitement d'images numériques*, Thèse d'état, Grenoble, 1987.
- [17] P. Cinquin, Tricubic spline functions, an efficient tool for 3D images modelling, *Int. Conf. on Industrial and Applied Mathematics*, ICIAM, 1987.
- [18] M. Bolle and C. Vemuri, On three-dimensional surface reconstruction methods, *IEEE Pattern Anal. and Mach. Intell.*, 13, 1, pp 1-13, 1991.
- [19] B. Chalmond, Régression avec résidus spatialement autocorrélés et recherche de la tendancespatiale, *Stat. et Anal. des Donn.*, 1, 2, pp 1-25, 1986.
- [20] B. Chalmond, *Traitement de différents cas de restauration d'image : construction de modèle, détection, estimation et reconstruction Bayésienne*, Habilitation à la Direction de Recherche, 178 pages, Univ. Paris-Sud, Mathématiques, Orsay 1991.
- [21] J. Durbin, Present position and potential developments : Some personal views in Times series analysis, *JRSS A*, vol. 147, Part 2, pp 161-173, 1984.

*Manuscrit reçu le 19 mai 1994.*

## LES AUTEURS

### R. AZENCOTT

Robert Azencott est professeur de mathématiques à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, où il dirige le groupe de recherche DIAM au sein du Centre de Mathématiques et Leurs Applications. Les activités du DIAM concernent les mathématiques et l'intelligence artificielle : imagerie numérique, réseaux de neurones formels, algorithmes stochastiques, calculs massivement parallèles. R. Azencott a contribué à plus d'une soixantaine d'articles et une dizaine de monographies.

### B. CHALMOND

Bernard Chalmond a été assistant des Hôpitaux en informatique médicale au Centre Hospitalier Universitaire de Dijon, puis maître de conférence au département de mathématiques de l'Université Paris-Sud. Il est actuellement professeur au département de physique de l'université de Cergy-Pontoise. Sa recherche se situe en imagerie numérique : modélisation mathématique, en particulier stochastique, et applications industrielles.

### J. WANG

Jiaping Wang est docteur en sciences de l'université de Paris-Sud. Ses travaux portent sur les modèles multi-échelles markoviens en segmentation d'images. Il est actuellement Attaché temporaire d'enseignement et de recherche à l'université Paris-X.

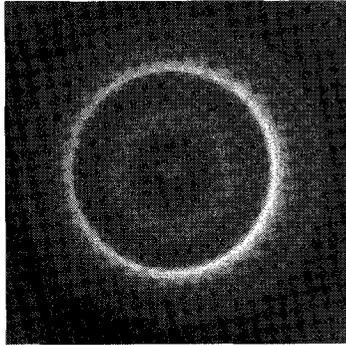


Figure b.1

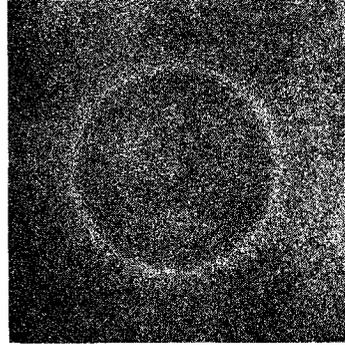


Figure b.2

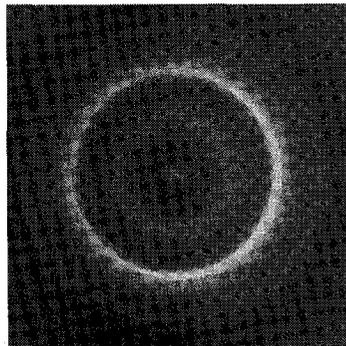


Figure b.3

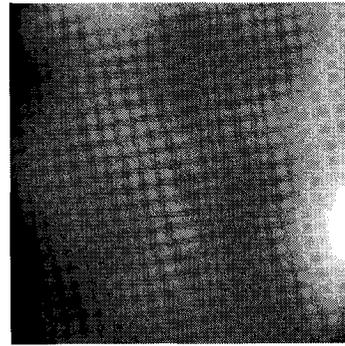


Figure b.4

Figure b.1. – Image  $D$ . Figure b.2. – Image  $D'$ . Figure b.3. – Image  $\hat{H}(D)$ . Figure b.4. – Image  $\hat{T}$ .

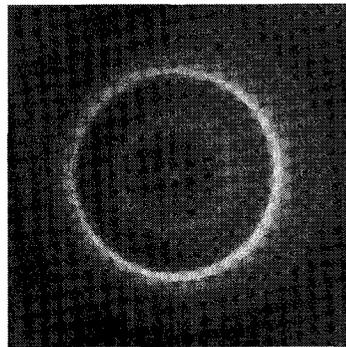


Figure b.5

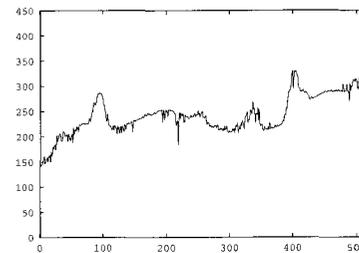


Figure b.6

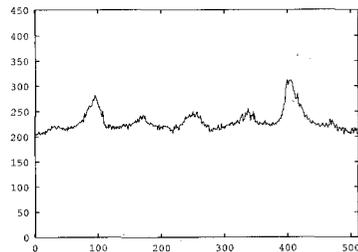


Figure b.7

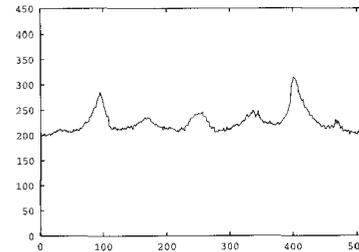


Figure b.8

Figure b.5. – Image restaurée. Figure b.6. – Profil de  $\hat{G}(D)$ . Figure b.7. – Profil de  $\hat{H}(D)$ . Figure b.8. – Profil de l'image restaurée.