

# Méthodes « linéaires » haute résolution pour l'estimation de directions d'arrivée de sources. Performances asymptotiques et complexité

## High Resolution "Linear" Methods for Direction of Arrival Estimation. Performance and Complexity

par Sylvie MARCOS et Javier SANCHEZ-ARAUJO

Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS-ESE,  
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France  
Tel. : {33} 1 69 85 17 29. Fax : {33} 1 69 41 30 60.  
E-mail : marcos@lss.supelec.fr

### *résumé et mots clés*

Ce travail présente une synthèse des méthodes de sous-espaces pour l'estimation de directions d'arrivée de sources ou pour l'estimation de fréquences pures noyées dans du bruit, qui ne requièrent pas de décomposition en éléments propres de la matrice de covariance des observations. Ces méthodes qualifiées de « linéaires », par opposition à la méthode MUSIC, parce qu'elles n'utilisent que des opérations linéaires sur la matrice de covariance des observations, possèdent en effet un intérêt certain pour des applications en temps réel, du fait de leur faible coût calculatoire et du fait qu'elles peuvent être facilement rendues adaptatives. Au cours d'une présentation de ces méthodes, qui seront appelées dans la suite BEWE, la Méthode du Propagateur (MP) et SWEDE, nous établissons les liens qui existent entre ces méthodes et leurs différentes versions. La complexité de chacune de ces méthodes est étudiée et discutée. Il apparaît que BEWE est la moins complexe des méthodes linéaires. Les performances asymptotiques (pour un grand nombre d'observations) des méthodes BEWE et SWEDE ayant déjà été étudiées dans la littérature, nous proposons ici le calcul des performances asymptotiques d'une version de la MP, la Méthode du Propagateur avec élimination du bruit ou MPEB. Nous montrons que la MPEB est la plus performante des méthodes linéaires et que ses performances sont celles de MUSIC. Des simulations viennent confirmer les résultats théoriques présentés ici et illustrer la comparaison des différentes méthodes.

Estimation de directions d'arrivée, méthodes de sous-espaces, haute résolution, performances asymptotiques, complexité.

### *abstract and key words*

This paper presents a synthesis of the subspace-based methods for direction of arrival or frequency estimation which do not require the eigendecomposition of the data covariance matrix. These methods, referred to as linear methods because they only use linear operations on the data covariance matrix, have a potential interest for real time applications because of their low complexity and their possible adaptive implementation. While presenting the methods which are referred to as BEWE, the Propagator Method (MP) and SWEDE, we establish the relationship between the different versions of these methods. The complexity of each method is established and discussed. BEWE then appears as the less costly of the linear methods. As the asymptotical performances (for an infinite number of data) of BEWE and SWEDE has already been obtained in the literature, we here propose the derivation of the asymptotical performances of a particular version of the MP, referred to as the Propagator Method with noise elimination (MPEB). We then show that MPEB has the best performance of the linear methods and has the same performance as MUSIC. Simulations are given to strengthen the theoretical results established in the paper and to illustrate the comparison between all the different methods.

Direction of arrival estimation, subspace-based methods, high resolution, asymptotical performance, complexity.

# 1. introduction

Les méthodes haute résolution reposant sur la décomposition de l'espace des observations en sous-espace signal (ou source) et en sous-espace bruit ont de nombreuses applications en traitement du signal. On peut citer, par exemple, l'estimation de fréquences pures noyées dans du bruit à partir d'un signal monodimensionnel en analyse spectrale ou bien l'estimation des directions d'arrivée de sources à partir d'un signal multidimensionnel correspondant aux observations mesurées simultanément sur plusieurs capteurs en traitement d'antenne. Parmi ces méthodes, celles, dont la plus connue est sans doute la méthode MUSIC [1][2], qui reposent sur la décomposition en éléments propres de la matrice de covariance des observations, peuvent s'avérer complexes à mettre en oeuvre dans certaines applications. C'est le cas, par exemple, en acoustique sous-marine, où il peut y avoir beaucoup de capteurs de mesure. Dans ce cas, ces méthodes sont difficiles à implanter en temps réel dans un environnement non stationnaire lorsqu'il faut remettre à jour les estimées à chaque nouvelle observation.

Récemment, plusieurs méthodes sans décomposition en éléments propres de la matrice de covariance des observations ont été proposées dans la littérature [3]-[11]. Ces méthodes qualifiées par la suite de « linéaires » parce qu'elles effectuent uniquement des opérations linéaires sur la matrice de covariance, sont intéressantes pour des applications en temps réel.

L'objectif de ce travail est de présenter dans un cadre unifié les méthodes haute résolution « linéaires », d'établir les liens et les différences entre ces méthodes, d'en calculer la complexité de mise en oeuvre et d'en comparer les performances asymptotiques (pour un grand nombre d'observations).

La section 2 suivante a pour but de formuler le problème de l'estimation des directions d'arrivée (DDA) de sources à partir des observations mesurées sur les capteurs et d'introduire les notations et hypothèses communes aux différentes méthodes. Remarquons que cette formulation du problème se transpose aisément au cas de l'estimation de fréquences pures noyées dans du bruit. La section 3 présente les différentes méthodes linéaires apparues dans la littérature ainsi que leurs variantes. Ces méthodes sont appelées dans la suite BEWE [4][5], la Méthode du Propagateur (MP) [6]-[9], et SWEDE [10]. Au fur et à mesure de cette présentation, les liens qui existent entre ces méthodes sont établis. Un bilan du coût de mise en oeuvre des méthodes est donné sous forme de tableau récapitulatif. La section 4 présente le calcul des performances asymptotiques en terme de variance de l'erreur d'estimation sur les DDA d'une version de la MP, la méthode du Propagateur avec élimination de bruit (MPEB). Les performances asymptotiques des autres méthodes y sont rappelées et une comparaison est établie. On y montre que la MPEB est la plus performante des méthodes linéaires et que ses performances sont celles de MUSIC dans le cas asymptotique. Remarquons que dans le cas non asymptotique et pour un nombre d'observations quelconque, une étude de performances d'une autre version de la

MP, appelée dans la suite de cet article la Méthode du Propagateur à partir des données (MPOBS), a été faite dans [9]. Il y a été montré que la MPOBS avait des performances identiques à MUSIC pour un rapport signal à bruit (RSB) pas trop faible. Les résultats obtenus ici ne font pas d'hypothèses sur le RSB. La section 5 présente des simulations qui viennent conforter les résultats théoriques établis dans ce document et qui viennent illustrer la comparaison des différentes méthodes. La section 6 conclut ce travail. Enfin, nous indiquons que la comparaison des différentes méthodes linéaires et de la méthode MUSIC pour l'estimation du nombre de sources n'est pas traité dans le présent article. Elle fera l'objet d'une étude ultérieure. Ici, on suppose que le nombre de sources est connu.

# 2. formulation du problème et modèle des observations

Nous présentons ici le problème de l'estimation des directions d'arrivée de sources supposées ponctuelles à partir des signaux mesurés simultanément sur un réseau de capteurs appelé antenne. Remarquons que cette formulation du problème se transpose aisément au cas de l'estimation de fréquences pures noyées dans du bruit [12]. Nous ne reviendrons pas ici sur les hypothèses physiques qui permettent de modéliser le vecteur des signaux reçus sur les capteurs [13].

Considérons une antenne constituée de  $M$  capteurs arrangés suivant une géométrie arbitraire dans un plan et qui reçoit les ondes provenant de  $K$  sources ponctuelles situées à l'infini dans un plan contenant l'antenne. Ces sources sont repérées par les paramètres angulaires  $\theta_1, \dots, \theta_K$  appelés angles d'arrivée ou directions d'arrivée (DDA) des signaux sur l'antenne. Les signaux mesurés sur une certaine durée d'observation à la sortie des capteurs subissent une transformée de Fourier. Ainsi, pour une fréquence donnée et pour une mesure ou réalisation donnée du signal (correspondant au temps d'observation considéré), le vecteur de dimension  $M$  des signaux reçus à la sortie des capteurs s'écrit

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{b} \quad (1)$$

où

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)] \quad (2)$$

est la matrice de dimension  $M \times K$  des vecteurs sources  $\mathbf{a}(\theta_k)$ , où  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_K]^T$  est un vecteur de dimension  $K$  contenant les amplitudes complexes des sources et où  $\mathbf{b}$  est un vecteur de bruit de dimension  $M$ . Les vecteurs sources  $\mathbf{a}(\theta_k)$  représentent la réponse complexe de l'antenne à des fronts d'ondes élémentaires arrivant dans des DDA données. Ils dépendent des

paramètres géométriques de l'antenne, des gains des capteurs et de la géométrie des fronts d'onde. Suivant les applications, d'autres paramètres peuvent être pris en compte dans ce modèle tels que la distance de la source à l'antenne, la polarisation des sources, etc. Dans toute la suite, nous supposons que tous ces paramètres sont connus de sorte que les vecteurs sources ne dépendent que des DDA.

Sous l'hypothèse que le vecteur  $\mathbf{s}$  des amplitudes complexes des sources et le vecteur de bruit  $\mathbf{b}$  sont des vecteurs aléatoires, stationnaires, centrés et décorrélés, la matrice de covariance de dimension  $M \times M$  des signaux reçus sur l'antenne s'écrit

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_b \quad (3)$$

où  $\mathbf{S} = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H]$  et  $\mathbf{R}_b$  sont respectivement les matrices de covariance de dimensions  $K \times K$  et  $M \times M$  des sources et du bruit ( $^H$  représente l'opérateur de transposition hermitienne). Dans toute la suite on supposera que  $\mathbf{S}$  est non singulière ce qui correspond à l'hypothèse que les sources ne sont pas totalement corrélées. Si cette hypothèse, également nécessaire à MUSIC, n'est pas vérifiée, on peut avoir recours à la technique du lissage spatial [14].

Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que le nombre de sources est connu et que la matrice  $\mathbf{A}$  des vecteurs sources est de rang plein. Le sous-espace engendré par les colonnes de  $\mathbf{A}$ , noté  $\text{esp}\{\mathbf{A}\}$  définit le sous-espace source tandis que le sous-espace complémentaire dans l'espace des observations est le sous-espace bruit.

Il faut signaler que les méthodes présentées par la suite sont valables quel que soit le modèle de propagation et en particulier pour n'importe quelle forme d'antenne. Elles n'exigent pas que l'antenne ait une forme particulière comme ceci est nécessaire pour la méthode ESPRIT. Leur définition ne dépend que de considérations algébriques et non de caractéristiques physiques de l'antenne.

### 3. les méthodes « linéaires » haute résolution

L'hypothèse commune aux méthodes « linéaires » qui vont être présentées dans la suite, est que la matrice  $\mathbf{A}$ , étant de rang plein, possède au moins un ensemble de  $K$  lignes, non nécessairement contiguës, qui sont linéairement indépendantes et forment une sous-matrice de rang plein égal à  $K$ . Soit  $\tilde{\mathbf{A}}$  cette sous-matrice de  $\mathbf{A}$  et soit  $\tilde{\mathbf{x}}$  le vecteur constitué des  $K$  éléments de  $\mathbf{x}$  qui correspondent aux  $K$  lignes de  $\tilde{\mathbf{A}}$ . On note  $\tilde{\mathbf{A}}$  la matrice de dimension  $(M - K) \times K$  contenant les lignes de  $\mathbf{A}$  qui ne sont pas dans  $\tilde{\mathbf{A}}$  et  $\tilde{\mathbf{x}}$  le sous-vecteur de  $\mathbf{x}$  qui lui correspond. On peut

ensuite réarranger les sorties de capteurs pour former le nouveau vecteur des observations

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}'\mathbf{s} + \mathbf{b}' \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} \\ \tilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

où  $\mathbf{b}'$  est le vecteur de bruit correspondant au réarrangement des sorties de capteurs. Suite à ce réarrangement, la nouvelle matrice de covariance des observations est  $\mathbf{R}' = E[\mathbf{x}'\mathbf{x}'^H]$ . Ainsi, sans perte de généralité, on travaillera dans la suite à partir du vecteur des observations réarrangées et on omettra la notation « ' » dans les équations (4) ci-dessus.

Les méthodes qui vont être exposées dans la suite diffèrent donc dans la façon dont va être utilisée cette décomposition de  $\mathbf{A}$ . Certaines méthodes exploiteront également d'autres hypothèses qui seront formulées au fur et à mesure de leur présentation.

Chacune des sous-sections qui suivent présente la façon d'obtenir les sous-espaces signal ou bruit. Une sous-section rappellera comment on obtient les DDA à partir de ces sous-espaces. Enfin, la complexité des méthodes sera exposée.

#### 3.1. la méthode BEWE

La première méthode de sous-espace qui ne repose pas sur la décomposition en éléments propres de la matrice de covariance des données a été proposée dans [3]. Cette méthode a ensuite été étendue aux cas de faibles rapports signal à bruit (RSB) et de sources totalement corrélées dans [4]. L'analyse statistique de cette méthode a été présentée dans [5] où elle est appelée BEWE (bearing estimation without eigendecomposition). Nous appellerons dans la suite BEWE (A) la version originale présentée dans [3] et BEWE (B) la seconde version présentée dans [4].

En l'absence de bruit, on définit la matrice de dimension  $M \times K$

$$\mathbf{U}_s = E[\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}}^H] = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}}^H \quad (5)$$

Sous l'hypothèse que les matrices  $\mathbf{S}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}$  sont non singulières, on déduit de (5) que le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice  $\mathbf{U}_s$  est le sous-espace source engendré par les colonnes de  $\mathbf{A}$ , soit

$$\text{esp}\{\mathbf{U}_s\} = \text{esp}\{\mathbf{A}\} \quad (6)$$

Si on dispose de  $N$  réalisations  $\mathbf{x}(n)$  du vecteur  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{U}_s$  peut être estimée de la manière suivante.

$$\hat{\mathbf{U}}_s = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n)\tilde{\mathbf{x}}^H(n) \quad (7)$$

L'estimation de  $\mathbf{U}_s$  et par conséquent l'estimation d'une base du sous-espace source, requièrent  $NMK$  multiplications. Cette méthode sera appelée dans la suite BEWE (A).

En présence de bruit,  $\mathbf{x}$  et, par conséquent,  $\mathbf{U}_s$  sont affectés par le bruit et les performances de la méthode BEWE (A) se dégradent.

La méthode BEWE (B) a été proposée dans le cas où la matrice de covariance du bruit est diagonale de la forme suivante :

$$\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} \times & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \times & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \times \end{bmatrix} \quad (8)$$

où les  $\times$  indiquent des éléments qui peuvent être non nuls. La méthode BEWE (B) repose alors sur la définition d'une matrice de dimension  $(M - K) \times K$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_s$ , formée uniquement des termes non diagonaux de la matrice de covariance du bruit  $\mathbf{R}_b$ . En effet, on définit

$$\tilde{\mathbf{U}}_s = E[\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^H] = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{A}}^H \quad (9)$$

En ajoutant l'hypothèse que  $\tilde{\mathbf{A}}$  est de rang plein égal à  $K$ , ce qui implique que l'on suppose  $M > 2K$ , on a

$$\text{esp}\{\tilde{\mathbf{U}}_s\} = \text{esp}\{\tilde{\mathbf{A}}\} \quad (10)$$

où  $\text{esp}\{\tilde{\mathbf{A}}\}$  est le sous-espace source de dimension  $K$  dans l'espace des observations de dimension réduite  $M - K$  correspondant à une antenne de  $M - K$  capteurs. Comme précédemment,  $\tilde{\mathbf{U}}_s$  peut être estimée à partir de  $N$  observations du vecteur  $\mathbf{x}$  décomposé en  $\tilde{\mathbf{x}}$  et  $\tilde{\mathbf{x}}$

$$\hat{\tilde{\mathbf{U}}}_s = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}^H(n) \quad (11)$$

L'estimation de  $\tilde{\mathbf{U}}_s$  requiert de l'ordre de  $N(M - K)K$  multiplications. Deux remarques importantes sont à considérer sur cette méthode. D'abord, elle nécessite que  $M > 2K$  et, ensuite, la taille utile de l'antenne est réduite à  $M - K$  capteurs. En plus, il faut à la fois que les blocs  $\tilde{\mathbf{A}}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}$  soient de rang plein  $K$ .

L'analyse statistique asymptotique ( $N \gg 1$ ) de cette méthode a été effectuée et présentée dans [5]. Elle montre que les performances statistiques de BEWE (B) dépendent du choix de  $\tilde{\mathbf{x}}$  et  $\tilde{\mathbf{x}}$ . Par exemple, si les  $K$  éléments de  $\tilde{\mathbf{x}}$  correspondent à des capteurs contigus, la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  associée devient presque singulière lorsque les sources sont très proches. Dans de telles circonstances, les observations dans  $\tilde{\mathbf{x}}$  devront donc être choisies sur des capteurs suffisamment espacés. Ceci sera repris dans la partie sur les simulations.

### 3.2. La Méthode du Propagateur (MP)

La méthode étudiée dans cette section a été initialement introduite dans [6] sous le nom de Propagateur puis développée dans [7]–[9].

#### 3.2.1. définition du Propagateur

Sous l'hypothèse que  $\mathbf{A}$  est de rang plein et égal à  $K$ , il existe  $K$  lignes de  $\mathbf{A}$  qui sont linéairement indépendantes. Comme dans les sections précédentes, on note  $\tilde{\mathbf{A}}$  la matrice non singulière de dimension  $K \times K$  qui contient ces  $K$  lignes indépendantes de  $\mathbf{A}$ . Les  $M - K$  autres lignes de  $\mathbf{A}$  que l'on regroupe dans  $\tilde{\mathbf{A}}$  peuvent alors s'exprimer de manière unique à l'aide d'une combinaison linéaire des lignes de  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Le Propagateur  $\mathbf{P}$  est alors l'unique opérateur de dimension  $K \times (M - K)$  défini par les relations équivalentes

$$\mathbf{P}^H \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A}^H \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{I}_{M-K} \end{bmatrix} \quad (12)$$

avec  $\mathbf{I}_{M-K}$  matrice identité de dimension  $M - K$ . La seconde relation (12) signifie que le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice  $\mathbf{Q}$  est orthogonal au sous-espace engendré par  $\mathbf{A}$ , soit

$$\text{esp}\{\mathbf{Q}\} \perp \text{esp}\{\mathbf{A}\} \quad (13)$$

De plus, puisque  $\mathbf{Q}$  contient la matrice  $\mathbf{I}_{M-K}$ , ses  $M - K$  colonnes sont linéairement indépendantes et  $\text{esp}\{\mathbf{Q}\}$  définit donc le sous-espace bruit. D'autre part, si l'on introduit la matrice de dimension  $M \times K$

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_K \\ \mathbf{P}^H \end{bmatrix} \quad (14)$$

on a

$$\text{esp}\{\mathbf{Q}_s\} = \text{esp}\{\mathbf{A}\} \quad (15)$$

Par conséquent, le Propagateur permet de définir respectivement par l'intermédiaire des matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{Q}_s$  les sous-espaces bruit et source.

Définissons la matrice des données

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(N)] \quad (16)$$

de sorte que la matrice de covariance estimée s'écrive

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \mathbf{X}\mathbf{X}^H \quad (17)$$

On note  $\tilde{\mathbf{X}} = [\tilde{\mathbf{x}}(1), \tilde{\mathbf{x}}(2), \dots, \tilde{\mathbf{x}}(N)]$  et  $\tilde{\mathbf{X}} = [\tilde{\mathbf{x}}(1), \tilde{\mathbf{x}}(2), \dots, \tilde{\mathbf{x}}(N)]$  les sous-matrices de dimensions respectives  $K \times N$  et  $(M - K) \times N$  extraites de  $\mathbf{X}$ . De la même manière, on note  $\mathbf{G} = E[\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^H]$  et  $\mathbf{H} = E[\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^H]$  qui sont des sous-matrices de dimensions respectives  $M \times K$  et  $M \times (M - K)$  de la matrice de covariance  $\mathbf{R}$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{R} = [\mathbf{G}, \mathbf{H}] \quad (18)$$

On a alors les estimées suivantes de  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  :

$$\hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{N} \mathbf{X}\tilde{\mathbf{X}}^H \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{N} \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^H \quad (19)$$

En l'absence de bruit, la définition (12) du Propagateur et les définitions des sous-matrices de données  $\tilde{\mathbf{X}}$  et  $\tilde{\mathbf{X}}$  et des sous-matrices de covariance  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$ , entraînent

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{P}^H \tilde{\mathbf{X}} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \mathbf{G}\mathbf{P} \quad (20)$$

Ainsi, sous l'hypothèse que  $\tilde{\mathbf{X}}^H$  et  $\mathbf{G}$  sont de rang plein, ce qui est équivalent à dire que la matrice de covariance des sources  $\mathbf{S}$  est aussi de rang plein,  $\mathbf{P}$  peut indifféremment être extrait de la matrice des données ou de la matrice de covariance suivant

$$\mathbf{P} = (\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^H)^{-1}\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^H = \tilde{\mathbf{X}}^H \dagger \tilde{\mathbf{X}}^H \quad (21)$$

ou

$$\mathbf{P} = \mathbf{G} \dagger \mathbf{H} \quad (22)$$

† indiquant la pseudo-inverse de Moore-Penrose, c'est-à-dire  $\mathbf{G} \dagger = (\mathbf{G}^H \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^H$ .

En présence de bruit, les relations (20) existant entre  $\tilde{\mathbf{X}}$  et  $\tilde{\mathbf{X}}$ , d'une part, et entre  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$ , d'autre part, ne déterminent plus le Propagateur. On distinguera donc dans la suite trois versions de la MP suivant la façon d'estimer le Propagateur à partir des données.

### 3.2.2. détermination du Propagateur en présence d'un bruit blanc. La méthode MPEB

Sous l'hypothèse que le bruit est spatialement et temporellement blanc de variance  $\sigma^2$  l'expression (3) de la matrice de covariance avec l'hypothèse de bruit blanc devient

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_M \quad (23)$$

où  $\mathbf{I}_M$  est la matrice identité de dimension  $M$ . Dans ce cas,  $\mathbf{P}$  peut être extrait à partir de  $\mathbf{R}$  en introduisant la partition suivante de la matrice de covariance modifiée

$$\mathbf{R}(\delta) = \mathbf{R} - \delta \mathbf{I}_M = [\mathbf{G}(\delta), \mathbf{H}(\delta)] \quad (24)$$

où  $\delta$  est un scalaire positif et où  $\mathbf{G}(\delta)$  et  $\mathbf{H}(\delta)$  sont des sous-matrices de dimensions respectives  $M \times K$  et  $M \times (M - K)$ . Il est montré dans [7] que  $(\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}, \delta = \sigma^2)$  est l'unique solution de

$$\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{G}(\delta) \hat{\mathbf{P}} \quad (25)$$

où  $\hat{\mathbf{P}}$  et  $\delta$  sont les inconnues. La proposition suivante a été établie [7].

**Proposition :** Sous l'hypothèse que la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$ , de dimension  $(M - K) \times K$  est de rang  $K$ ,  $(\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}, \delta = \sigma^2)$  est l'unique solution de (25) si et seulement si  $M - K > K$ .

Notons que cette hypothèse additionnelle sur  $\tilde{\mathbf{A}}$  (identique à celle de BEWE (B)) devient d'autant moins contraignante que  $M - K$

devient grand devant  $K$ ; c'est le cas par exemple dans certaines applications de l'acoustique sous-marine lorsque le nombre de capteurs est grand devant le nombre de sources.

L'estimation de la variance du bruit s'obtient à l'aide des remarques suivantes. En partitionnant  $\mathbf{R}$  de (23) suivant :

$$\mathbf{R} = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{G}_1 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{H}_2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \} K \\ \} M - K \end{array} \quad (26)$$

où  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  sont des matrices de dimensions respectives  $K \times K, (M - K) \times K, K \times (M - K)$  et  $(M - K) \times (M - K)$ , on a avec la notation (4) (où « ' » est omis)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}_1 = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{A}}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_K \\ \mathbf{G}_2 = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{A}}^H \\ \mathbf{H}_1 = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{A}}^H \\ \mathbf{H}_2 = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{A}}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{M-K} \end{array} \right. \quad (27)$$

Il est alors facile de voir que :

$$\sigma^2 = \frac{\text{tr}\{\mathbf{H}_2 \mathbf{\Pi}\}}{\text{tr}\{\mathbf{\Pi}\}} \quad (28)$$

où  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{I}_{M-K} - \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2 \dagger = \mathbf{I}_{M-K} - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}} \dagger$  et où  $\text{tr}\{\cdot\}$  indique l'opérateur trace d'une matrice.

Une estimation possible de  $\sigma^2$  est alors la suivante (la version initiale a été proposée dans [8]) :

$$\hat{\sigma}^2 = \text{Ré} \left\{ \frac{\text{tr}\{\hat{\mathbf{H}}_2 \hat{\mathbf{\Pi}}\}}{\text{tr}\{\hat{\mathbf{\Pi}}\}} \right\} \quad (29)$$

où  $\hat{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{I}_{M-K} - \hat{\mathbf{G}}_2 \hat{\mathbf{G}}_2 \dagger$  et où  $\hat{\mathbf{H}}_2, \hat{\mathbf{G}}_2$  entrent dans la partition de  $\hat{\mathbf{R}}$  :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) = \left[ \begin{array}{cc} \hat{\mathbf{G}}_1 & \hat{\mathbf{H}}_1 \\ \hat{\mathbf{G}}_2 & \hat{\mathbf{H}}_2 \end{array} \right] \quad (30)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_2 &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \tilde{\mathbf{x}}(t) \tilde{\mathbf{x}}^H(t) \\ \hat{\mathbf{G}}_2 &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \tilde{\mathbf{x}}(t) \tilde{\mathbf{x}}^H(t) \end{aligned} \quad (31)$$

Une fois la variance du bruit estimée, celle ci peut ensuite être retranchée de la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  de sorte que le Propagateur est ensuite extrait de (25) suivant :

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{G}(\hat{\sigma}^2) \dagger \mathbf{H}(\hat{\sigma}^2) \quad (32)$$

Cette version du Propagateur avec estimation et élimination de la variance du bruit sera appelée par la suite MPEB (Méthode du Propagateur avec élimination de bruit).

Remarquons que cette estimation de la variance du bruit, a inspiré les auteurs de [11] qui ont notamment montré que ce type de méthode était moins complexe que la recherche de la valeur propre la plus petite de  $\mathbf{R}$ . En effet, on évalue ici à  $(M - K)K^2 + K^3/3$  le nombre de multiplications nécessaires au calcul de  $\Pi$  puis à  $(M - K)^2$  le nombre de multiplications nécessaires au calcul de  $\hat{\sigma}^2$ .

Dans un même ordre d'idée, une estimation conjointe de  $(K, \sigma^2, \mathbf{P})$  a été obtenue dans [7]. Remarquons que la détermination conjointe du nombre de sources, de la variance du bruit et du Propagateur (et par conséquent des sous-espaces bruit et source) reste moins complexe en calculs que la recherche des valeurs propres d'une matrice de dimension  $M \times M$  et ceci d'autant plus que le nombre de capteurs est grand par rapport au nombre de sources. Les performances asymptotiques de la MPEB sont analysées dans la section 4.

### 3.2.3. relation entre la méthode du Propagateur et la méthode MUSIC

Dans le cas où on peut supposer le bruit spatialement et temporellement blanc, une estimation par moindre carré total (MCT, TLS en anglais) [15] du Propagateur à partir de la matrice interspectrale est également possible, on l'appellera ici la MPTLS. Bien qu'elle conduise à un algorithme plus complexe en nombre d'opérations que la version MPEB présentée dans la section précédente, il est intéressant de rapporter ici les résultats obtenus car ils montrent que les sous-espaces estimés par la MPTLS et par MUSIC sont identiques. En effet, si l'on appelle respectivement  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  les matrices de perturbations sur  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  du fait de la présence de bruit et d'un nombre fini d'observations pour l'estimation de la matrice interspectrale  $\mathbf{R}$ , il est alors possible de chercher une estimation  $\hat{\mathbf{P}}_{\text{TLS}}$  du Propagateur comme solution de :

$$\begin{aligned} &\text{Minimiser } \|\mathbf{E}, \mathbf{F}\|^2 \\ &\text{sous la contrainte } \mathbf{H} + \mathbf{F} = (\mathbf{G} + \mathbf{E})\hat{\mathbf{P}} \end{aligned} \quad (33)$$

où  $[\mathbf{E}, \mathbf{F}]$  est la matrice composée des deux sous-matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$ . Un problème similaire à la résolution de (33) a déjà été traité dans le contexte de TLS-ESPRIT [16]. Selon [16] et [15], résoudre (33) passe par la recherche des vecteurs propres associés à la plus petite valeur propre de  $\hat{\mathbf{R}}^H \hat{\mathbf{R}}$ . La plus petite valeur propre est alors  $\hat{\sigma}^4$  si  $\hat{\sigma}^2$  est la plus petite valeur propre de  $\hat{\mathbf{R}}$  et les vecteurs propres associés sont ceux de  $\hat{\mathbf{R}}$  associés à  $\hat{\sigma}^2$  que l'on regroupe dans la matrice  $\hat{\mathbf{V}}_b$ . Introduisons maintenant la partition suivante de  $\hat{\mathbf{V}}_b$ ,

$$\hat{\mathbf{V}}_b = \begin{bmatrix} \hat{\tilde{\mathbf{V}}}_b \\ \hat{\tilde{\mathbf{V}}}_b \end{bmatrix} \begin{matrix} \} K \\ \} M - K \end{matrix} \quad (34)$$

il vient alors

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{TLS}} = -\hat{\tilde{\mathbf{V}}}_b \hat{\tilde{\mathbf{V}}}_b^{-1} \quad (35)$$

Il est ensuite facile de vérifier que

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\text{TLS}} = -\hat{\tilde{\mathbf{V}}}_b \hat{\tilde{\mathbf{V}}}_b^{-1} \quad (36)$$

et après orthonormalisation :

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\text{TLS0}} = \hat{\mathbf{Q}}_{\text{TLS}} (\hat{\mathbf{Q}}_{\text{TLS}}^H \hat{\mathbf{Q}}_{\text{TLS}})^{-1/2} = -\hat{\mathbf{V}}_b \quad (37)$$

Par conséquent, la version TLS du Propagateur conduit exactement à la même estimation des sous-espaces bruit et source que la méthode MUSIC. Corollairement, il s'ensuit qu'asymptotiquement, l'estimation TLS du Propagateur conduit au vrai Propagateur et par conséquent aux vrais sous-espaces bruit et source.

### 3.2.4. détermination du Propagateur en présence d'un bruit quelconque. Les méthodes MPOBS et MPCOV

Dans la pratique le bruit est rarement blanc, ne serait ce que parce qu'il peut être constitué d'un grand nombre de sources de faible puissance. Par ailleurs, même si le bruit est blanc, sa matrice de covariance s'écarte sensiblement de sa forme scalaire lorsque le nombre de mesure pour l'estimer est faible. Dans ce cas, une estimation aisée du Propagateur à partir de la matrice de covariance ou de la matrice des données peut cependant être obtenue à l'aide d'un processus de moindres carrés. Une estimation  $\hat{\mathbf{P}}_{\text{obs}}$  et  $\hat{\mathbf{P}}_{\text{cov}}$  du Propagateur peut être obtenue en minimisant les fonctions de coût respectives

$$J_{\text{obs}}(\hat{\mathbf{P}}) = \|\tilde{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{P}}^H \tilde{\mathbf{X}}\|^2, \quad J_{\text{cov}}(\hat{\mathbf{P}}) = \|\hat{\mathbf{H}} - \hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{P}}\|^2 \quad (38)$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme de Frobenius. Les fonctions de coût  $J_{\text{obs}}$  et  $J_{\text{cov}}$  étant des fonctions quadratiques et convexes des composantes de  $\hat{\mathbf{P}}$  à optimiser, les solutions optimales sont données par

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{obs}} = \tilde{\mathbf{X}}^H \tilde{\mathbf{X}}^H \quad (39)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{cov}} = \hat{\mathbf{G}}^\dagger \hat{\mathbf{H}} \quad (40)$$

Remarquons que ces solutions sont identiques par leur forme à (21) et (22) excepté que les sous-matrices  $\tilde{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{G}}$  et  $\hat{\mathbf{H}}$  sont cette fois entachées de bruit.

Ces deux versions de la Méthode du Propagateur sont appelées respectivement dans la suite MPOBS et MPCOV. Le Propagateur  $\mathbf{P}$  peut donc être estimé soit à partir de la matrice de données (MPOBS), soit à partir de la matrice de covariance (MPCOV). Dans le premier cas, l'estimation de  $\mathbf{P}$  suivant (39) requiert de l'ordre de  $NMK + MK^2$  opérations. Dans le second cas, l'estimation de  $\mathbf{P}$  suivant (40) compte  $NM^2$  multiplications pour obtenir  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  et ensuite  $M^2K + MK^2$  opérations pour calculer  $\mathbf{P}$ . Notons qu'il existe une version adaptative-recursive du Propagateur qui réduit la charge de calcul à  $(M - K)K$  à chaque itération ce qui rend cette méthode attrayante dans une application en temps réel [18]

### 3.2.5. comparaison de la MPOBS et de BEWE (A)

A partir de l'expression (39), on construit la matrice  $\mathbf{Q}$  définie en (12) :

$$\mathbf{Q}^{\text{obs}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}^H \bar{\mathbf{X}}^H \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (41)$$

L'une des matrices  $\mathbf{Q}_s^{\text{obs}}$  vérifiant  $\mathbf{Q}_s^{\text{obs}H} \mathbf{Q}_s^{\text{obs}} = \mathbf{0}$ , s'écrit

$$\mathbf{Q}_s^{\text{obs}} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}} \\ \bar{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}^H = \frac{1}{N} \mathbf{X} \bar{\mathbf{X}}^H \quad (42)$$

Il est alors facile de voir que l'expression (7) de  $\hat{\mathbf{U}}_s$  est équivalente à la définition ci-dessus de  $\mathbf{Q}_s$ . Par conséquent, la MPOBS est équivalente à la méthode BEWE (A).

## 3.3. la méthode SWEDE

### 3.3.1. présentation générale de la méthode

La méthode SWEDE (subspace method without eigen decomposition) a été proposée dans [10]. Elle peut être vue comme une généralisation des méthodes BEWE et MP décrites précédemment. Son principe repose sur la partition de la matrice des vecteurs sources suivant

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} K \\ K \\ M-2K \end{matrix} \quad (43)$$

où on suppose que  $M > 3K$ . Remarquons que, comme pour les autres méthodes présentées précédemment, les lignes de  $\mathbf{A}$  permettant de construire les blocs  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , pourraient être choisies non contiguës et les sorties de capteurs pourraient être réarrangées pour que la partition de  $\mathbf{A}$  se ramène à (43).

Sous l'hypothèse que  $\mathbf{A}$  est de rang plein et égal à  $K$ , et que les matrices  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  sont non singulières (remarquons que cette dernière hypothèse est plus forte que de supposer que  $\mathbf{A}$  est de rang plein comme pour le Propagateur), on peut définir deux opérateurs uniques  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  de dimension  $K \times (M-2K)$  tels que

$$\mathbf{P}_1 = -\mathbf{A}_1^{-H} \mathbf{A}_3^H, \quad \mathbf{P}_2 = -\mathbf{A}_2^{-H} \mathbf{A}_3^H \quad (44)$$

Remarquons que  $-\mathbf{P}_1$  est composé des  $M-2K$  dernières colonnes du Propagateur  $\mathbf{P}$  défini en (12) lorsque  $M > 3K$ ,  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_1$  et  $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A}_2^H \quad \mathbf{A}_3^H]^H$ .

Une conséquence de cette définition est que la matrice  $\mathbf{W}$  de dimension  $M \times 2(M-2K)$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{matrix} K & M-2K \\ K & \\ M-2K & \end{matrix} \quad (45)$$

vérifie

$$\mathbf{A}^H \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (46)$$

ce qui implique

$$\text{esp}\{\mathbf{W}\} \perp \text{esp}\{\mathbf{A}\} \quad (47)$$

Remarquons la ressemblance de forme de la matrice  $\mathbf{W}$  définie ci-dessus et de la matrice  $\mathbf{Q}$  définie dans (12).

Sous l'hypothèse que la matrice de covariance du bruit est bloc diagonale, c'est-à-dire de la forme

$$\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \times & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times \end{bmatrix} \begin{matrix} K & K & M-2K \\ K & & \\ M-2K & & \end{matrix} \quad (48)$$

où seuls les blocs de dimensions  $K \times K$  et  $(M-2K) \times (M-2K)$  notés  $\times$  peuvent être non nuls, alors les éléments de  $\mathbf{W}$  s'obtiennent à partir des termes non diagonaux de la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  partitionnée de la manière suivante

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \times & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} \\ \mathbf{R}_{21} & \times & \mathbf{R}_{23} \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \times \end{bmatrix} \begin{matrix} K & K & M-2K \\ K & & \\ M-2K & & \end{matrix} \quad (49)$$

Notons que la matrice  $\mathbf{R}$  étant hermitienne, on a  $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{R}_{ji}^H$ . D'autre part, en tenant compte des partitions de  $\mathbf{A}$  et de  $\mathbf{R}_b$  données respectivement dans (43) et (48), on peut écrire

$$\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{A}_i \mathbf{S} \mathbf{A}_j^H \quad (50)$$

Finalement,  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  sont calculées, d'après (44), à partir des blocs non diagonaux de  $\mathbf{R}$  :

$$\mathbf{P}_1 = -\mathbf{A}_1^{-H} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{S} \mathbf{A}_3^H = -\mathbf{R}_{21}^{-1} \mathbf{R}_{32}^H \quad (51)$$

$$\mathbf{P}_2 = -\mathbf{A}_2^{-H} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{S} \mathbf{A}_3^H = -\mathbf{R}_{12}^{-1} \mathbf{R}_{31}^H \quad (52)$$

Les sous-matrices notées «  $\times$  » dans (49) n'interviennent pas dans la méthode SWEDE. La méthode SWEDE n'est donc théoriquement pas perturbée par la présence de bruit dont la matrice de covariance est de la forme (48). Nous verrons dans la partie sur les simulations comment se traduit cette propriété dans la pratique.

En considérant la partition suivante du vecteur des observations

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \kappa \\ \kappa \\ M - 2\kappa \end{matrix} \quad (53)$$

on a l'estimation suivante des blocs non diagonaux de  $\mathbf{R}$

$$\hat{\mathbf{R}}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_i(n) \mathbf{x}_j^H(n) \quad (54)$$

On introduit maintenant la matrice  $\mathbf{V}$  telle que

$$\mathbf{V} = \mathbf{W}\mathbf{D} \quad (55)$$

où  $\mathbf{D}$  est une matrice de dimension  $2(M - 2K) \times \bar{K}$  avec  $1 \leq \bar{K} \leq M - K$  et telle que  $\text{esp}\{\mathbf{V}\} \perp \text{esp}\{\mathbf{A}\}$ . Le choix de la matrice  $\mathbf{D}$  donne toute une classe de méthodes de sous-espace qui ne reposent pas sur la décomposition en éléments propres de  $\mathbf{R}$  et correspondent à différentes versions de SWEDE dans [10]. D'une manière générale, ces méthodes définissent des matrices  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{V}_s$  dont les colonnes engendrent respectivement les sous-espaces bruit et source. Il est clair que le choix de  $\mathbf{D}$  est un compromis entre complexité et précision d'estimation. Dans la suite, nous ne considérerons que les versions SWEDE (C) et SWEDE (G) de [10]. D'autres versions de SWEDE sont analysées dans [10].

### 3.3.2. relation entre SWEDE (C) et BEWE (B)

La version SWEDE (C) correspond au choix  $\bar{K} = M - 2K$  et  $\mathbf{D} = (\mathbf{0} \quad \mathbf{I})^T$  pour lequel  $\mathbf{V}$  devient

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_{12}^{-1} \mathbf{R}_{31}^H \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Nous pouvons alors remarquer que, d'après la définition de  $\mathbf{P}_2$  donnée en (44),  $\text{esp}\{\tilde{\mathbf{V}}\} \perp \text{esp}\{[\mathbf{A}_2^T \quad \mathbf{A}_3^T]^T\}$ . Si on définit maintenant la matrice

$$\tilde{\mathbf{V}}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{12}^H \\ \mathbf{R}_{31} \end{bmatrix} \quad (57)$$

on vérifie aisément que  $\tilde{\mathbf{V}}_s^H \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{0}$ , et, de manière équivalente,  $\text{esp}\{\tilde{\mathbf{V}}_s\} = \text{esp}\{[\mathbf{A}_2^T \quad \mathbf{A}_3^T]^T\}$ .

On remarque alors que ce choix de  $\mathbf{D}$  et la variante associée SWEDE (C) coïncident exactement avec BEWE (B) pour  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_1$  et  $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A}_2^T \quad \mathbf{A}_3^T]^T$ .

### 3.3.3. la méthode SWEDE (G)

Introduisons maintenant la version SWEDE (G) qui résulte des choix  $\bar{K} = M - K$  et

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{31} (\mathbf{R}_{31}^H \mathbf{R}_{31})^{-1} \mathbf{R}_{12} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{R}_{31} (\mathbf{R}_{31}^H \mathbf{R}_{31})^{-1} \mathbf{R}_{12} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (58)$$

La matrice  $\mathbf{V}$  associée à  $\mathbf{D}$  (55) de dimension  $M \times (M - K)$  s'écrit alors

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{21}^{-1} \mathbf{R}_{32}^H \mathbf{R}_{31} (\mathbf{R}_{31}^H \mathbf{R}_{31})^{-1} \mathbf{R}_{12} & -\mathbf{R}_{21}^{-1} \mathbf{R}_{32}^H \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Par ailleurs, on vérifie que la matrice de dimension  $M \times K$

$$\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{21}^H \\ \mathbf{R}_{12}^H (\mathbf{R}_{31}^H \mathbf{R}_{31})^{-1} \mathbf{R}_{31}^H \mathbf{R}_{32} \\ \mathbf{R}_{32} \end{bmatrix} \begin{matrix} \kappa \\ \kappa \\ M - 2\kappa \end{matrix} \quad (60)$$

est telle que  $\mathbf{V}_s^H \mathbf{V} = \mathbf{0}$ , ce qui entraîne  $\text{esp}\{\mathbf{V}_s\} = \text{esp}\{\mathbf{A}\}$ . Parmi toutes les variantes de SWEDE obtenues en choisissant une matrice  $\mathbf{D}$  particulière, il a été montré que SWEDE (G) est celle qui réalise le meilleur compromis entre la complexité et les performances statistiques [10]. L'obtention des termes  $\hat{\mathbf{R}}_{ij}$  nécessaires au calcul de  $\mathbf{V}_s$  demande (cf. (54))  $KN(2M - 3K)$  multiplications tandis que la construction de  $\mathbf{V}_s$  (cf. (60)) demande  $2K^2M$  multiplications.

### 3.3.4. comparaison de la MPCOV et de SWEDE (G)

Au cours de la section précédente, certaines relations existant entre BEWE, PM et SWEDE ont été établies. Nous montrons ici que SWEDE (G) n'est qu'un cas particulier de MPCOV lorsque  $M > 3K$  et que le Propagateur n'est estimé qu'à partir des blocs non diagonaux de  $\mathbf{R}$ .

Pour cela considérons la partition suivante du Propagateur,

$$\mathbf{P} = [\bar{\mathbf{P}}_1 \quad \bar{\mathbf{P}}_2], \quad (61)$$

où  $\bar{\mathbf{P}}_1$  et  $\bar{\mathbf{P}}_2$  sont de dimensions respectives  $K \times K$  et  $K \times (M - 2K)$ . Par ailleurs, d'après la partition (18) et la propriété (20) du Propagateur établie dans le cas sans bruit :  $\mathbf{G}\mathbf{P} = \mathbf{H}$ , on a, de manière équivalente, avec la partition (49) de  $\mathbf{R}$ ,

$$\begin{bmatrix} \times \\ \mathbf{R}_{21} \\ \mathbf{R}_{31} \end{bmatrix} [\bar{\mathbf{P}}_1 \quad \bar{\mathbf{P}}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} \\ \times & \mathbf{R}_{23} \\ \mathbf{R}_{32} & \times \end{bmatrix} \quad (62)$$

Il s'ensuit qu'une estimation du Propagateur  $\mathbf{P}$  peut être obtenue, même en présence de bruit, en n'utilisant que les blocs non diagonaux de la matrice de covariance  $\mathbf{R}$ , c'est-à-dire :

$$\mathbf{P} = [\bar{\mathbf{P}}_1, \bar{\mathbf{P}}_2] = [\mathbf{R}_{31}^\dagger \mathbf{R}_{32}, \mathbf{R}_{21}^{-1} \mathbf{R}_{23}] \quad (63)$$



En insérant cette écriture de  $\mathbf{P}$  dans (12), on obtient

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{31}^H \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{21}^{-1} \mathbf{R}_{23} \\ -\mathbf{I}_K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{M-2K} \end{bmatrix} \quad (64)$$

Par ailleurs, il est facile de vérifier que la matrice  $\mathbf{Q}_s$

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{21}^H \\ \mathbf{R}_{32}^H \mathbf{R}_{31} (\mathbf{R}_{31}^H \mathbf{R}_{31})^{-1} \mathbf{R}_{21}^H \\ \mathbf{R}_{23}^H \end{bmatrix} \begin{matrix} \kappa \\ \kappa \\ M-2K \end{matrix} \quad (65)$$

vérifie  $\mathbf{Q}_s^H \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ . Par conséquent, on a  $\text{esp}\{\mathbf{Q}_s\} = \text{esp}\{\mathbf{V}_s\} = \text{esp}\{\mathbf{A}\}$ . En effet, en injectant (50) dans (65) et (60) on trouve

$$\mathbf{Q}_s = \mathbf{V}_s = \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}_2^H \quad (66)$$

Il s'ensuit que SWEDE (G) est équivalente à une variante de la MPCOV quand les composantes de  $\mathbf{P}$  ne sont déterminées qu'avec les blocs non diagonaux de  $\mathbf{R}$ . On verra dans la partie simulations que cette variante de la MPCOV et par conséquent SWEDE (G) sont moins performants que la MPCOV originale lorsque le Propagateur est déterminé avec tous les éléments de  $\mathbf{R}$ , et ceci même en présence de bruit.

### 3.4. estimation des DDA avec BEWE, PM, et SWEDE

L'avantage essentiel des méthodes linéaires comparées à MUSIC est leur simplicité de calcul pour déterminer les sous-espaces signal et bruit. Ce gain en complexité est d'autant plus grand que le nombre de capteurs est grand. Dans des applications où ( $M \gg K$ ), l'utilisation du sous-espace signal plutôt que le sous-espace bruit comme espace de projection est plus avantageux d'un point de vue calculatoire. Pour les méthodes de sous-espaces BEWE, MP et SWEDE, l'estimation des DDA se fait en minimisant la fonction de coût suivante

$$f(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{\Pi}_b \mathbf{a}(\theta) \quad (67)$$

où  $\mathbf{\Pi}_b$  est le projecteur orthogonal sur le sous-espace bruit, soit, respectivement  $\mathbf{\Pi}_b = \mathbf{I} - \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^H$  pour BEWE (A),  $\mathbf{\Pi}_b = \mathbf{I} - \mathbf{Q}_s \mathbf{Q}_s^H$  pour la MP, et  $\mathbf{\Pi}_b = \mathbf{I} - \mathbf{V}_s \mathbf{V}_s^H$  pour SWEDE (G). L'estimation des DDA avec BEWE (B), quand à elle, utilise un vecteur d'analyse de taille réduite  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$  de sorte qu'une estimation des DDA est obtenue par la minimisation de la fonction de coût

$$f(\theta) = \tilde{\mathbf{a}}^H(\theta) \tilde{\mathbf{\Pi}}_b \tilde{\mathbf{a}}(\theta) \quad (68)$$

où  $\tilde{\mathbf{\Pi}}_b = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{U}}_s^H$  est le projecteur orthogonal sur le sous-espace bruit de dimension  $M - 2K$  dans l'espace des observations de dimension réduite  $M - K$ .

### 3.5. complexité des méthodes « linéaires »

Le tableau 1 montre le nombre prépondérant de multiplications requises pour calculer le sous-espace signal :  $\mathbf{U}_s$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_s$ ,  $\mathbf{Q}_s$  et  $\mathbf{V}_s$  correspondant à chacune des méthodes. La colonne « estimation de la covariance » correspond au nombre de multiplications nécessaires pour estimer les sous-matrices de  $\mathbf{R}$  (ou la matrice toute entière) utiles. La colonne « calcul du sous-espace » indique les multiplications que requiert le calcul de la matrice engendrant le sous-espace source. Pour toutes ces méthodes, le projecteur orthogonal  $\mathbf{\Pi}_b$  peut être calculé en réalisant, par exemple, une décomposition QR. La complexité d'une décomposition QR avec la méthode de Householder nécessite  $MK^2 + K^3/3$  multiplications pour BEWE (A), toutes les versions de MP et SWEDE (G), et de l'ordre de  $(M - K)K^2 + K^3/3$  multiplications pour BEWE (B). Remarquons que toutes ces méthodes linéaires sont beaucoup plus simples à mettre en oeuvre que MUSIC qui nécessite de l'ordre de  $M^3$  opérations sans compter l'estimation de la covariance. Les méthodes BEWE, MPOBS et SWEDE ont une complexité linéaire en  $M$  tandis que les méthodes MPEB et MPCOV ont une complexité quadratique en  $M$ . Notons toutefois qu'il existe une version adaptative-réursive de la MPCOV [18] avec laquelle la complexité devient linéaire en  $M$ .

## 4. performances asymptotiques des méthodes linéaires

Nous avons vu qu'il existe toute une classe de méthodes d'estimation des DDA basées sur les sous-espaces orthogonaux et qui sont moins complexes en calculs que MUSIC. Notre propos est maintenant d'analyser les performances de ces méthodes en termes de variance sur les DDA estimées et de les comparer entre elles et aux performances obtenues avec la méthode MUSIC.

Les performances statistiques de ces méthodes sont calculées dans le cas asymptotique, c'est-à-dire lorsqu'on dispose d'un nombre important de mesures pour estimer la matrice de covariance des signaux. D'après le théorème central limite, on démontre [20] que l'on peut écrire :

$$\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R} = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right), \quad N \rightarrow \infty \quad (69)$$

qui signifie que les éléments de la matrice  $\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$  se comportent<sup>1</sup> asymptotiquement comme  $1/\sqrt{N}$ . Les performances des méthodes BEWE et SWEDE ont été calculées dans [5] et [10] respectivement. Les expressions obtenues pour les variances seront

1. Soient deux suites de variables aléatoires  $\{u_n\}$  et  $\{v_n\}$ . Dire que  $u_n = O(v_n)$ , c'est dire que la suite  $u_n/v_n$  est bornée en probabilité lorsque  $N \rightarrow \infty$  [20].

Tableau 1. – Multiplications nécessaires aux méthodes linéaires.

Equation clé	Référence	Méthode	Estimation de la covariance	Calcul du sous-espace
(7)	[3]	BEWE (A)	$NMK$	
(11)	[4]	BEWE (B)	$N(M - K)K$	
(14), (29), (32)	[7], [8]	MPEB	$(NM^2)$	$M^2(K + 1) + MK^2$
(14), (21)	[7], [8], [9]	MPOBS		$NMK + MK^2$
(14), (22)	[9]	MPCOV	$NM^2$	$M^2K + MK^2$
(54), (60)	[10]	SWEDE (G)	$N(2M - 3K)K$	$2MK^2$

reprises au moment de la comparaison avec les performances des méthodes du Propagateur et de MUSIC.

Dans la section suivante, nous établissons les performances d'estimation de la variance du bruit et des DDA obtenues par la méthode MPEB présentée dans la sous-section 3.2.2 et dans les références [7] et [8].

Notons que les performances non asymptotiques (pour un nombre fini d'observations) de la méthode MPOBS ont été établies dans [9] pour des RSB moyens et forts.

#### 4.1. performances asymptotiques de l'estimation de la variance du bruit

On se place ici dans le cas où le bruit est spatialement et temporellement blanc de sorte que la matrice de covariance des observations est de la forme (23). Dans ce cas, on a vu que la variance du bruit pouvait être estimée par (29). On note

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_2 &\triangleq \mathbf{H}_2 + \tilde{\mathbf{H}}_2 \\ \hat{\mathbf{G}}_2 &\triangleq \mathbf{G}_2 + \tilde{\mathbf{G}}_2 \end{aligned} \quad (70)$$

où  $\tilde{\mathbf{G}}_2$  et  $\tilde{\mathbf{H}}_2$  indiquent l'erreur sur l'estimation des matrices  $\mathbf{G}_2$  et  $\mathbf{H}_2$ . D'après (69), on a  $\tilde{\mathbf{G}}_2 = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$  et  $\tilde{\mathbf{H}}_2 = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ . On établit ici les lemmes et théorèmes suivants.

**Lemme 1** : L'estimateur (29)  $\hat{\sigma}^2$  de la variance du bruit  $\sigma^2$  est consistant.

**Démonstration** : Voir l'annexe A.

**Théorème 1** : La variance asymptotique (pour  $N$  grand) de l'estimateur (29)  $\hat{\sigma}^2$  de la variance du bruit  $\sigma^2$  est donnée par :

$$E [(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2] = \frac{\sigma^4}{N(M - 2K)} \quad (71)$$

**Démonstration** : Voir l'annexe B.

Ce résultat prouve, en particulier, que la variance de  $\hat{\sigma}^2$  est en  $O\left(\frac{1}{N}\right)$  et tend vers zéro quand  $N$  tend vers l'infini. On vérifie également que  $\hat{\sigma}^2$  est asymptotiquement non biaisé. Par ailleurs, on rappelle (cf. [11]) que la variance de l'estimation de  $\sigma^2$  obtenue par moyennage des  $M - K$  plus petites valeurs propres de  $\mathbf{R}$  et qui est aussi l'estimation du maximum de vraisemblance (MV) de  $\sigma^2$  est égale à :

$$E [(\hat{\sigma}_{MV}^2 - \sigma^2)^2] = \frac{\sigma^4}{N(M - K)} \quad (72)$$

Par conséquent, à nombre de capteurs donnés, la variance de l'estimation de la variance du bruit  $\sigma^2$  par la méthode linéaire MPEB est, asymptotiquement, légèrement plus élevée que celle donnée ci-dessus. Cependant, lorsque le nombre de capteurs augmente, par rapport au nombre de sources, cette différence tend rapidement à s'atténuer. Enfin, on remarquera que l'estimation linéaire de  $\sigma^2$  proposée ici est bien meilleure que celle proposée dans [11].

#### 4.2. performances asymptotiques de l'estimation des DDA par la méthode MPEB

Les DDA estimées  $\hat{\theta}_i$  minimisent la fonction (cf (67)) :

$$f(\theta, \hat{\mathbf{Q}}) = \mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{Q}}^\dagger \mathbf{a}(\theta) \quad (73)$$

où on note :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_i &= \theta_i + \tilde{\theta}_i \\ \hat{\mathbf{Q}} &= \mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{Q}} \end{aligned} \quad (74)$$

$\theta_i$  et  $\mathbf{Q}$  étant les vraies grandeurs recherchées et  $\tilde{\theta}_i$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}$  étant les erreurs d'estimation de ces grandeurs.

Les DDA estimées sont donc solutions de :

$$f'(\theta, \hat{\mathbf{Q}}) = 0, \quad \text{pour } \theta = \hat{\theta}_i \quad i = 1, \dots, K \quad (75)$$

où  $f'(\theta, \hat{\mathbf{Q}})$  est la dérivée partielle par rapport à  $\theta$  de  $f(\theta, \hat{\mathbf{Q}})$ . On fait un développement limité au premier ordre en  $\tilde{\theta}_i$  de  $f'(\theta_i, \hat{\mathbf{Q}})$  au voisinage de  $\theta_i$  (cela suppose que  $\tilde{\theta}_i$  est petit devant  $\theta_i$  la vraie DDA) de sorte que (75) devient :

$$0 = f'(\theta_i, \hat{\mathbf{Q}}) + \tilde{\theta}_i f''(\theta_i, \hat{\mathbf{Q}}) + O(\tilde{\theta}_i) \quad (76)$$

Cela suppose que  $f'(\theta_i, \hat{\mathbf{Q}})$  et  $f''(\theta_i, \hat{\mathbf{Q}})$ , dérivée seconde par rapport à  $\theta$  de  $f(\theta, \hat{\mathbf{Q}})$  en  $\theta_i$ , sont non nuls sinon il faut mener le développement plus loin. En utilisant (73), il apparaît que :

$$\begin{aligned} f'(\theta, \hat{\mathbf{Q}}) &= 2\text{Ré} \left\{ \mathbf{d}^H(\theta) \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{Q}}^\dagger \mathbf{a}(\theta) \right\} \\ f''(\theta, \hat{\mathbf{Q}}) &= 2\mathbf{d}^H(\theta) \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{Q}}^\dagger \mathbf{d}(\theta) + 2\text{Ré} \left\{ \mathbf{d}^H(\theta) \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{Q}}^\dagger \mathbf{a}(\theta) \right\} \end{aligned} \quad (77)$$

avec

$$\mathbf{d}(\theta) = \frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta} \text{ et } \mathbf{d}'(\theta) = \frac{\partial \mathbf{d}(\theta)}{\partial \theta} \quad (78)$$

D'autre part, en utilisant la notation (74) de  $\hat{\mathbf{Q}}$  et en ne gardant que les termes du premier ordre en  $\tilde{\mathbf{Q}}$ , on obtient :

$$\hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{Q}}^\dagger \simeq \mathbf{Q} \mathbf{Q}^\dagger + \mathbf{Q}^\dagger \tilde{\mathbf{Q}}^H + \tilde{\mathbf{Q}}^H \mathbf{Q}^\dagger - \mathbf{Q}^\dagger \tilde{\mathbf{Q}}^H \mathbf{Q} \mathbf{Q}^\dagger - \mathbf{Q}^\dagger \tilde{\mathbf{Q}}^H \mathbf{Q} \mathbf{Q}^\dagger \tilde{\mathbf{Q}} \quad (79)$$

Tenant compte de ce que  $\mathbf{Q}^H \mathbf{a}(\theta_i) = 0$ , on a alors au premier ordre en  $\tilde{\mathbf{Q}}$  :

$$f'(\theta_i, \hat{\mathbf{Q}}) \simeq 2\text{Ré} \left\{ \mathbf{d}^H(\theta_i) \mathbf{Q}^\dagger \tilde{\mathbf{Q}}^H \mathbf{a}(\theta_i) \right\} \quad (80)$$

Maintenant, en ne gardant que les termes du premier ordre à la fois en  $\tilde{\theta}_i$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}$ , il vient :

$$\tilde{\theta}_i f''(\theta_i, \hat{\mathbf{Q}}) \simeq 2\tilde{\theta}_i \mathbf{d}^H(\theta_i) \mathbf{Q} \mathbf{Q}^\dagger \mathbf{d}(\theta_i) \quad (81)$$

En reportant (80)-(81) dans le développement limité (76), on obtient :

$$\tilde{\theta}_i \simeq - \frac{\text{Ré} \left\{ \mathbf{d}_i^H \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}^H \mathbf{a}_i \right\}}{\mathbf{d}_i^H \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H \mathbf{d}_i} \quad (82)$$

où  $\mathbf{d}_i = \mathbf{d}(\theta_i)$  et  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}(\theta_i)$ .

Dans la version MPEB de la méthode du Propagateur (cf section 3.2.2) une estimation  $\hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_M$  suivant (29) de la covariance du bruit  $\sigma^2 \mathbf{I}_M$  est retranchée de  $\hat{\mathbf{R}}$  où

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \tilde{\mathbf{R}}$$

$\tilde{\mathbf{R}}$  étant dû à l'erreur d'estimation de  $\mathbf{R}$  (cf (69)). On note donc

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_M &= [\hat{\mathbf{G}}, \hat{\mathbf{H}}] \\ \hat{\mathbf{P}} &= (\hat{\mathbf{G}}^H \hat{\mathbf{G}})^{-1} \hat{\mathbf{G}}^H \hat{\mathbf{H}} \end{aligned} \quad (83)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}} &= \mathbf{G} + \tilde{\mathbf{G}} \\ \hat{\mathbf{H}} &= \mathbf{H} + \tilde{\mathbf{H}} \\ \hat{\mathbf{P}} &= (\mathbf{G} + \tilde{\mathbf{G}})^{-1} \mathbf{G}^H \mathbf{H} \end{aligned} \quad (84)$$

**Lemme 2 :** L'estimateur  $\hat{\mathbf{P}}$  défini en (83) de  $\mathbf{P}$  défini en (84) est consistant.

**Démonstration :** D'après (83) et (69), et d'après le théorème 1 de la section précédente :

$$\hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_M = \mathbf{R} - \sigma^2 \mathbf{I}_M + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

de sorte que la partition (83) de  $\hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_M$  devient

$$[\hat{\mathbf{G}}, \hat{\mathbf{H}}] = [\mathbf{G}, \mathbf{H}] + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \quad (85)$$

avec  $\mathbf{G} = \mathbf{A} \mathbf{S} \bar{\mathbf{A}}^H$  et  $\mathbf{H} = \mathbf{A} \mathbf{S} \tilde{\mathbf{A}}^H$  (cf. (18)).

En insérant (85) dans (83), on trouve facilement :

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

avec  $\mathbf{P}$  défini en (84).

En notant

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}} \quad (86)$$

Il est facile de calculer qu'au premier ordre en  $\tilde{\mathbf{G}}$  et  $\tilde{\mathbf{H}}$ ,

$$\tilde{\mathbf{P}} \simeq (\mathbf{G}^H \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^H [\tilde{\mathbf{H}} - \hat{\mathbf{G}} \mathbf{P}] \quad (87)$$

On réécrit alors l'erreur sur les DDA (82) sous la forme :

$$\tilde{\theta}_i \simeq \frac{\text{Ré}\{\rho\}}{\gamma_i} \quad (88)$$

avec les notations suivantes :

$$\rho = -\alpha_i^H \tilde{\mathbf{Q}}^H \mathbf{a}_i = -\alpha_i^H \tilde{\mathbf{P}}^H \tilde{\mathbf{a}}_i$$

$$\alpha_i = (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^H \mathbf{d}_i \quad (89)$$

$$\gamma_i = \mathbf{d}_i^H \mathbf{Q} \mathbf{Q}^\dagger \mathbf{d}_i$$

où

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{a}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_i \\ \tilde{\mathbf{a}}_i \end{bmatrix} \quad (90)$$

**Lemme 3 :** L'estimateur  $\hat{\theta}_i$  de  $\theta_i$  suivant la MPEB est consistant.

**Démonstration** : Il découle du lemme 2 que  $\tilde{\mathbf{P}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$  et, par conséquent, en utilisant les expressions (88), (89), il apparaît que  $\hat{\theta}_i$  tend vers 0 quand  $N \rightarrow \infty$ .

**Théorème 2** : Soient  $\{\hat{\theta}_i\}$  les DDA estimées par la MPEB. La variance asymptotique (pour  $N \rightarrow \infty$ ) de  $\hat{\theta}_i$  est donnée par

$$\begin{aligned} \text{var}_{\text{MPEB}}(\hat{\theta}_i) &= E[\hat{\theta}_i^2] \\ &= \frac{\sigma^2}{2N\gamma_i} [(\mathbf{S}^{-1})_{ii} + \sigma^2(\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{S}^{-1})_{ii}] \end{aligned} \quad (91)$$

où  $(\cdot)_{ii}$  indique le  $i$ -ième terme diagonal d'une matrice.

**Démonstration** : Voir l'annexe C.

### 4.3. comparaison des performances asymptotiques des méthodes linéaires et de MUSIC

Le résultat obtenu dans le théorème 2 confronté à la variance d'estimation des DDA obtenue par MUSIC [17] implique qu'asymptotiquement :

$$\text{var}_{\text{MPEB}}(\hat{\theta}_i) = \text{var}_{\text{MUSIC}}(\hat{\theta}_i) \quad (92)$$

Ceci sera confirmé dans la section simulation. Par ailleurs, on rappelle que les performances asymptotiques en termes de variance d'estimation des DDA des méthodes « linéaires » BEWE (B) et SWEDE, ont été analysées respectivement dans [5] et [10]. On rappelle ici les résultats :

$$\text{var}_{\text{BEWE}}(\hat{\theta}_i) = \frac{\sigma^2}{2N\gamma_i} [\mathbf{S}^{-1} + \sigma^2\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{A}})^{-1}\mathbf{S}^{-1}]_{ii} \quad (93)$$

où  $\bar{\mathbf{A}}$  contient  $K$  lignes non nécessairement contigues de  $\mathbf{A}$  et

$$\begin{aligned} \text{var}_{\text{SWEDE}}(\hat{\theta}_i) &= \frac{\sigma^2}{2N\gamma_i} \left\{ \mathbf{S}^{-1} + \frac{\sigma^2}{\gamma_i} [2\text{Ré}(\mathbf{S}^{-*}\mathbf{A}_2^{-*}\mathbf{P}_2^*\xi_{i,2}^*\xi_{i,1}^H \right. \\ &\quad \left. \mathbf{P}_1^H\mathbf{A}_1^{-H}\mathbf{S}^{-1}) + \mathbf{S}^{-1}((\mathbf{A}_2^H\mathbf{A}_2)^{-1}\xi_{i,1}^H(\mathbf{I} + \mathbf{P}_1^H\mathbf{P}_1)\xi_{i,1} \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{A}_1^H\mathbf{A}_1)^{-1}\xi_{i,2}^H(\mathbf{I} + \mathbf{P}_2^H\mathbf{P}_2)\xi_{i,2})\mathbf{S}^{-1}] \right\}_{ii} \end{aligned}$$

où

$$\xi_i = \begin{bmatrix} \xi_{i1} \\ \xi_{i2} \end{bmatrix} \quad (94)$$

et  $\xi_i = \mathbf{D}\mathbf{V}^\dagger\mathbf{d}_i$ .

Il est notamment démontré dans [5] et [10] que

$$\begin{aligned} \text{var}_{\text{BEWE}}(\hat{\theta}_i) &> \text{var}_{\text{MUSIC}}(\hat{\theta}_i) \\ \text{var}_{\text{SWEDE}}(\hat{\theta}_i) &> \text{var}_{\text{MUSIC}}(\hat{\theta}_i) \end{aligned}$$

pour  $N$  fixé de sorte que l'on conclut que la méthode MPEB est, asymptotiquement, la meilleure des méthodes « linéaires » haute résolution. Ses performances *asymptotiques* sont celles de MUSIC, et ceci quel que soit le rapport signal sur bruit, avec une complexité de calcul réduite. Remarquons qu'une étude antérieure [9] a montré que la version MPOBS a des performances *non asymptotiques* identiques à MUSIC mais pour un rapport signal sur bruit pas trop faible.

## 5. application numérique des résultats théoriques et simulations

Dans cette section, nous confrontons les résultats théoriques obtenus pour les variances d'estimation de la variance du bruit (théorème 1) et des directions d'arrivée par la méthode MPEB (théorème 2) avec des résultats de simulations. Nous comparons également les performances des méthodes proposées tant pour l'estimation de la variance du bruit que pour l'estimation des DDA avec d'autres méthodes comparables de la littérature.

### 5.1. estimation de la variance du bruit (figures 1 à 4)

Nous comparons les performances de la méthode proposée en (29) avec, d'une part, la méthode du maximum de vraisemblance qui estime la variance du bruit par la moyenne arithmétique des  $M - K$  plus petites valeurs propres de  $\hat{\mathbf{R}}$  et, d'autre part, une autre méthode linéaire proposée dans [11]. Les résultats théoriques correspondants à ces deux méthodes de référence sont ceux de [11].

Les figures 1 à 4 représentent la racine carrée de l'erreur quadratique (REQM) moyenne entre la vraie valeur de la variance du bruit et son estimée par la méthode considérée. Les courbes en traits pleins ou discontinus correspondent aux résultats théoriques tandis que les notations '\*', 'o', 'x' correspondent aux résultats de simulations. Pour les résultats de simulations, 100 essais sont utilisés pour tracer les points.

La figure 1 illustre les performances des estimateurs en fonction du nombre  $N$  d'observations (snapshots), lorsque 2 sources sont présentes à  $\theta_1 = 0$  et  $\theta_2 = 20$  degrés avec un rapport signal sur bruit (RSB)  $RSB = 2$  dB par source et par capteur et une antenne

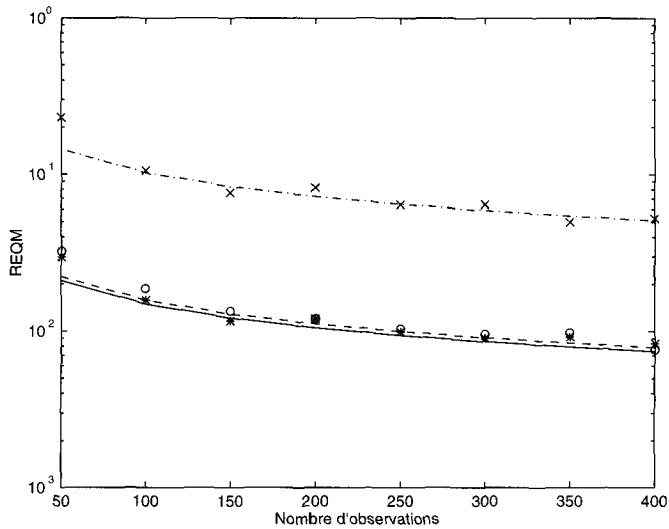


Figure 1. – Estimation de la variance du bruit. Influence du nombre d'observations sur la REQM : Méthode proposée (\*)-( - -), Méthode linéaire de [11] (x)-(-.), Méthode du maximum de vraisemblance (o)-(-).

linéaire uniforme de  $M = 20$  capteurs espacés d'une demi longueur d'onde. On peut voir que les résultats de simulations sont en très bon accord avec la théorie prédite par le théorème 1. Par ailleurs, la méthode proposée ici pour estimer la variance du bruit a des performances nettement meilleures que la méthode de [11]. Les résultats obtenus sont très proches de ceux obtenus pour la méthode du maximum de vraisemblance de référence. La figure 2 correspondant à  $N = 400$  observations et  $RSB = 0$  dB, montre d'ailleurs que, conformément à la théorie, les performances de la méthode proposée atteignent d'autant mieux les performances de la méthode du maximum de vraisemblance que le nombre de capteurs est grand.

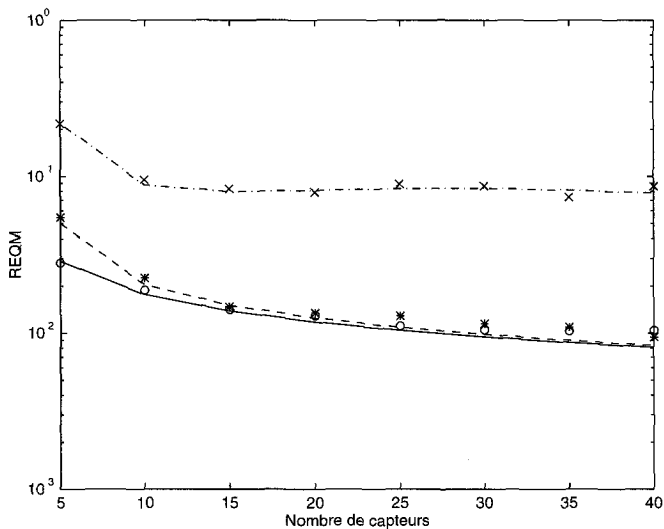


Figure 2. – Estimation de la variance du bruit. Influence du nombre de capteurs sur la REQM : Méthode proposée (\*)-( - -), Méthode linéaire de [11] (x)-(-.), Méthode du maximum de vraisemblance (o)-(-).

La figure 3 illustre les performances des estimateurs en fonction de  $RSB$  lorsque  $N = 400$  observations et  $M = 20$  capteurs. On voit, là encore, une très bonne adéquation entre la théorie et les simulations. La méthode proposée se comporte quasiment comme la méthode du maximum de vraisemblance.

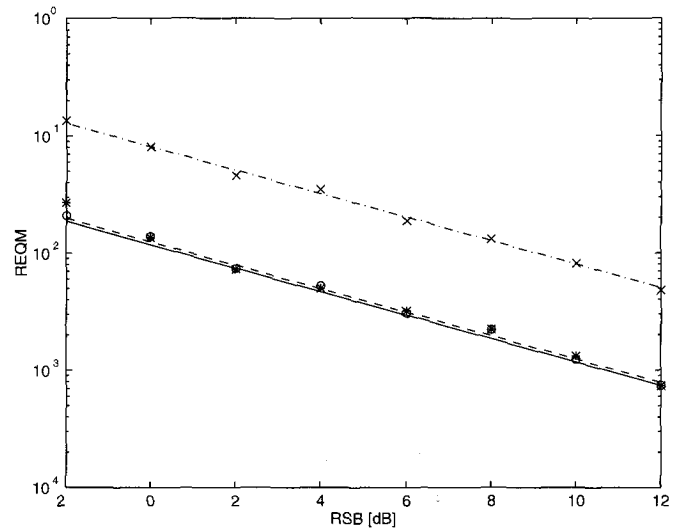


Figure 3. – Estimation de la variance du bruit. Influence du RSB sur la REQM : Méthode proposée (\*)-( - -), Méthode linéaire de [11] (x)-(-.), Méthode du maximum de vraisemblance (o)-(-).

La figure 4 illustre les performances des estimateurs en fonction de l'écartement des deux sources, lorsque  $RSB = 5$  dB,  $M = 20$  capteurs et  $N = 400$  observations. On constate que les performances de la méthode proposée ne se dégradent, par rapport à la méthode du maximum de vraisemblance, que pour de faibles écartements et quelles restent, même dans ces conditions, très satisfaisantes.

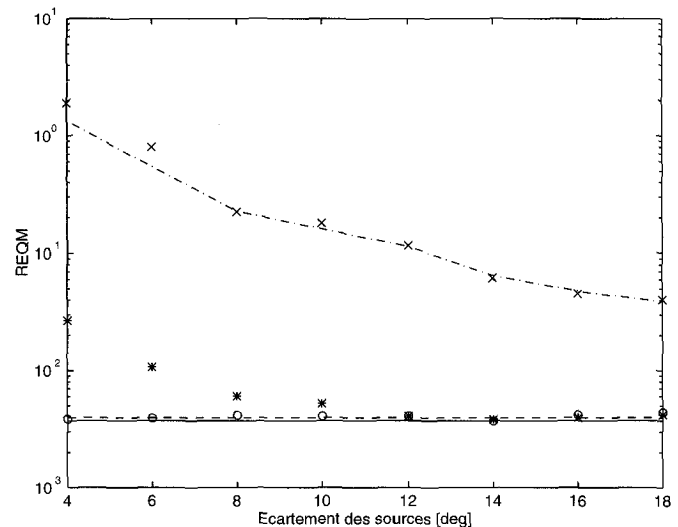


Figure 4. – Estimation de la variance du bruit. Influence de l'écartement des sources sur la REQM : Méthode proposée (\*)-( - -), Méthode linéaire de [11] (x)-(-.), Méthode du maximum de vraisemblance (o)-(-).

### 5.2. estimation des DDA (figures 5 à 8)

Nous comparons les performances de la MPEB proposée en section 3.2.2 pour estimer les DDA avec celles des méthodes BEWE, SWEDE et MUSIC.

Les figures 5 à 8 représentent la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne entre la vraie valeur de la DDA et son estimée par la méthode considérée (en fait on fait la moyenne sur les estimées des deux sources). Les courbes en traits pleins ou discontinus correspondent aux résultats théoriques tandis que les notations '\*', 'o', 'x', '+' correspondent aux résultats de simulations. Pour les résultats de simulations, 200 essais sont utilisés pour tracer les points.

La figure 5 illustre les performances des estimateurs en fonction du nombre  $N$  d'observations (snapshots), lorsque 2 sources sont présentes à  $\theta_1 = 5$  et  $\theta_2 = 15$  degrés avec  $RSB = 0$  dB et une antenne linéaire uniforme de  $M = 20$  capteurs. Pour construire les estimateurs des méthodes BEWE, SWEDE et MPEB, on a considéré que  $\tilde{A}$  pour BEWE et MPEB et  $A_1$  pour SWEDE contenaient les lignes 1 et 15 de  $A$ , tandis que  $A_2$  contenait les lignes 2 et 10 et que, finalement,  $\tilde{A}$  et  $A_3$  contenaient les lignes restantes de  $A$ . Conformément à la théorie, on peut voir que les performances de MPEB atteignent bien celles de MUSIC et sont donc meilleures que celles de BEWE et SWEDE.

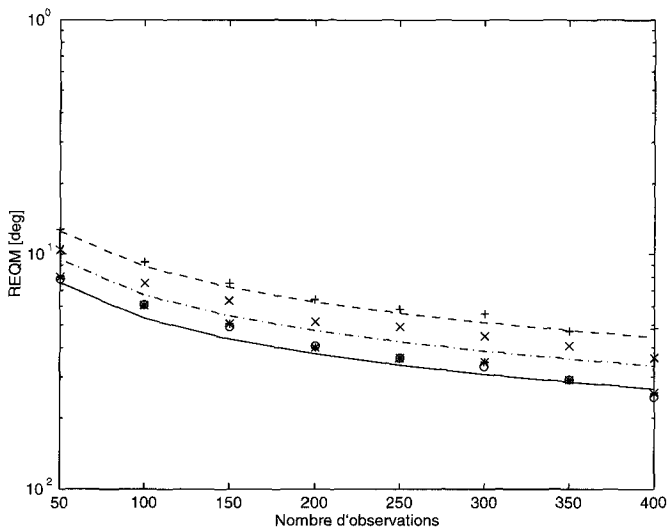


Figure 5. - Estimation des DDA. Influence du nombre d'observations sur la REQM : MPEB (\*)-(---), BEWE (+)-(- -), SWEDE (G) (x)-(-), MUSIC (o)-(-).

La figure 6 illustre les performances des estimateurs en fonction  $RSB$  lorsque  $N = 50$  observations et  $M = 20$  capteurs. Là encore, on peut voir que sur une grande plage de  $RSB$ , MPEB se comporte comme MUSIC. Comme l'indique la théorie, les résultats des différentes méthodes se rejoignent quand  $RSB$  devient très grand.

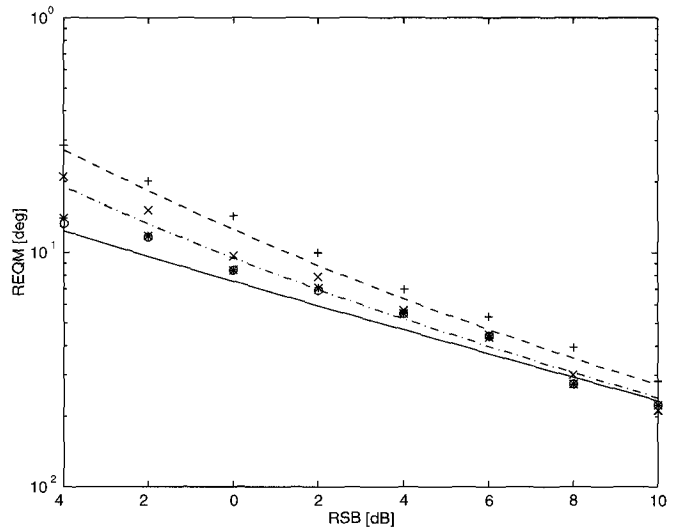


Figure 6. - Estimation des DDA. Influence du RSB sur la REQM : MPEB (\*)-(---), BEWE (+)-(- -), SWEDE (G) (x)-(-), MUSIC (o)-(-).

La figure 7 illustre les performances des estimateurs en fonction de l'écartement des sources lorsque  $RSB = 0$  dB,  $N = 400$  observations et  $M = 20$  capteurs. Les résultats prédits par la théorie sur les performances de MPEB sont en bon accord avec les simulations. Sur la plage d'écartement des sources considérée, MPEB et MUSIC estiment les DDA avec les mêmes performances et montrent une relative indépendance avec l'écartement des sources. Par contre, on peut voir que les performances des méthodes BEWE et SWEDE varient considérablement en fonction de l'écartement des sources. En fait, il s'avère, comme cela avait déjà été remarqué dans [5], que les performances des méthodes BEWE et SWEDE dépendent fortement du choix des lignes de  $A$  pour définir les sous matrices  $\tilde{A}$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ . C'est ce

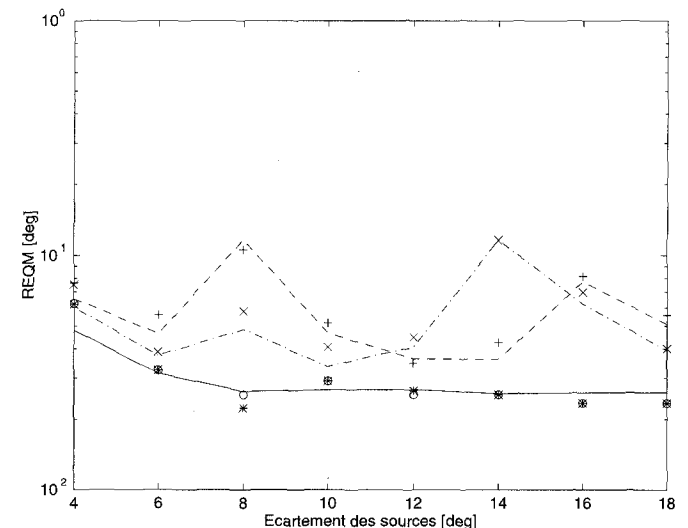


Figure 7. - Estimation des DDA. Influence de l'écartement des sources sur la REQM (choix de lignes non contiguës) : MPEB (\*)-(---), BEWE (+)-(- -), SWEDE (G) (x)-(-), MUSIC (o)-(-).

que l'on peut voir en comparant les résultats de la figure 7 à ceux de la figure 8 où on a choisi les lignes 1 et 2 pour  $\tilde{\mathbf{A}}$  et  $\mathbf{A}_1$  et les lignes 3 et 4 pour  $\tilde{\mathbf{A}}$  et  $\mathbf{A}_2$ . On peut voir sur la figure 8 qu'on retrouve alors une relative stabilité des performances des méthodes BEWE et SWEDE en fonction de l'écartement des sources, tandis que les résultats de MPEB sont inchangés.

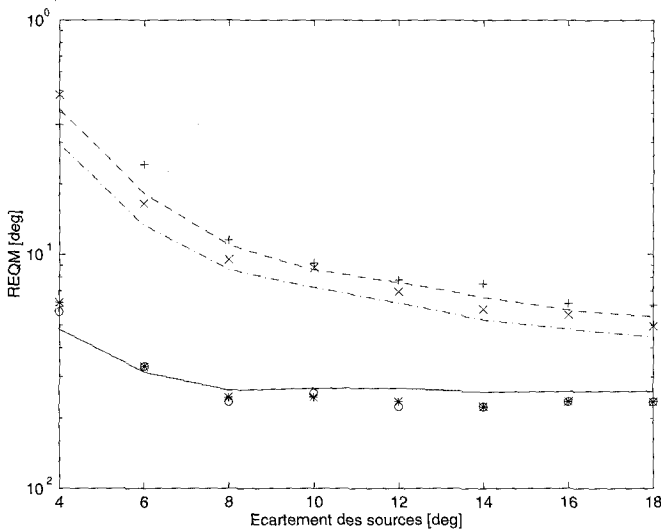


Figure 8. – Estimation des DDA. Influence de l'écartement des sources sur la REQM (choix de lignes contiguës) : MPEB (\*)-(--), BEWE (+)-(- -), SWEDE (x)-(-.), MUSIC (o)-(-).

Finalement, la méthode MPEB présente, conformément aux résultats théoriques établis dans cet article, des performances asymptotiques comparables à celles de MUSIC. On se souviendra, par ailleurs, qu'elle nécessite moins de calculs que MUSIC.

## 6. conclusion

Nous avons présenté dans cet article une synthèse des méthodes « linéaires » de sous-espaces pour l'estimation des DDA. Ces méthodes sont dites « linéaires », par opposition à la recherche des éléments propres d'une matrice, parce qu'elles n'effectuent que des opérations linéaires sur la matrice de covariance ou la matrice des données. L'intérêt essentiel de ces méthodes est leur grande simplicité de mise en oeuvre qui en font des méthodes applicables en temps réel. En plus, leur principe reste valable quelle que soit la géométrie de l'antenne. Nous nous sommes attachés, au cours de cette synthèse, à établir les liens qui existent entre les différentes méthodes ainsi qu'entre leurs différentes variantes. Nous avons, par ailleurs, présenté différentes versions de la méthode du Propagateur qui proviennent des différentes façons d'estimer l'opérateur à partir des observations. Par l'intermédiaire

de la méthode MPEB, nous avons donné une méthode « linéaire » d'estimation de la variance du bruit lorsque celui-ci peut être supposé blanc. Cette méthode constitue une alternative moins complexe à la recherche de la valeur propre minimale de la matrice de covariance comme cela est fait pour MUSIC.

Au cours de cette synthèse, nous avons calculé la complexité de chacune des méthodes discutées. Il est apparu que la complexité des méthodes BEWE, SWEDE et MPOBS est linéaire par rapport au nombre de capteurs  $M$ , ce qui donne un gain de l'ordre de  $M^2$  opérations par rapport à MUSIC. Les méthodes MPEB et MPCOV requièrent de l'ordre de  $M^2$  multiplications apportant encore un gain de  $M$  par rapport à MUSIC.

Enfin, nous avons établi les performances asymptotiques d'estimation de la variance du bruit et des DDA par la méthode MPEB, et nous les avons comparées aux résultats concernant les autres méthodes mentionnées dans cet article et qui ont été établies par d'autres auteurs. Les résultats théoriques, comme les résultats de simulations nous ont montré : i) que la méthode « linéaire » proposée pour estimer la variance du bruit a des performances très proches de la méthode du maximum de vraisemblance qui consiste à moyenner les  $M - K$  valeurs propres les plus petites de la covariance estimée, et ceci d'autant plus que le nombre de capteur est grand; ii) que cette méthode a des performances supérieures à celles d'une autre méthode linéaire qui avait été présentée par d'autres auteurs; iii) que la méthode MPEB pour estimer les DDA a, conformément à la théorie, les mêmes performances asymptotiques que MUSIC quel que soit le rapport signal sur bruit, et donc des performances supérieures aux autres méthodes « linéaires ». Rappelons qu'une étude antérieure a montré que la version MPOBS du Propagateur a des performances non asymptotiques identiques à MUSIC pour un rapport signal sur bruit moyen ou fort. Enfin, dans le prolongement de cet article, une étude concernant la comparaison des méthodes linéaires pour la détermination du nombre de sources devrait être proposée ultérieurement.

### Annexe A : Démonstration du lemme 1.

En utilisant les notations (70), en ne gardant que les termes du premier ordre en  $\tilde{\mathbf{H}}_2$  et  $\tilde{\mathbf{G}}_2$  et en remarquant que  $\Pi \mathbf{G}_2 = \mathbf{0}$ , on obtient :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{H}}_2 \hat{\Pi} \simeq \tilde{\mathbf{H}}_2 \Pi - \mathbf{H}_2 \mathbf{G}_2^{\dagger H} \hat{\mathbf{G}}_2^H \Pi - \mathbf{H}_2 \Pi \hat{\mathbf{G}}_2 \mathbf{G}_2^{\dagger} \\ \hat{\Pi} \simeq \Pi - \mathbf{G}_2^{\dagger H} \hat{\mathbf{G}}_2^H \Pi - \Pi \hat{\mathbf{G}}_2 \mathbf{G}_2^{\dagger} \end{cases} \quad (95)$$

Avec ces approximations et les notations (70), l'expression (29) donnant l'estimée  $\hat{\sigma}^2$  de  $\sigma^2$  devient :

$$\hat{\sigma}^2 \simeq \text{Ré} \left\{ \frac{\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}}}{\mathcal{D} + \tilde{\mathcal{D}}} \right\} \quad (96)$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{D} \triangleq \eta \triangleq \text{tr} \{ \Pi \} \\ \mathcal{N} \triangleq \text{tr} \{ \mathbf{H}_2 \Pi \} = \sigma^2 \eta = \sigma^2 \mathcal{D} \\ \tilde{\mathcal{N}} \triangleq \text{tr} \{ \tilde{\mathbf{H}}_2 \Pi - \mathbf{H}_2 \mathbf{G}_2^{\dagger H} \tilde{\mathbf{G}}_2^H \Pi - \mathbf{H}_2 \Pi \tilde{\mathbf{G}}_2 \mathbf{G}_2^{\dagger} \} \\ \tilde{\mathcal{D}} \triangleq \text{tr} \{ -\mathbf{G}_2^{\dagger H} \tilde{\mathbf{G}}_2^H \Pi - \Pi \tilde{\mathbf{G}}_2 \mathbf{G}_2^{\dagger} \} \end{cases} \quad (97)$$

En ne gardant que les termes du premier ordre en  $\tilde{\mathbf{H}}_2$  et  $\tilde{\mathbf{G}}_2$  dans (96), il vient :

$$\hat{\sigma}^2 \simeq \text{Ré} \left\{ \frac{\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}}}{\mathcal{D}} - \frac{\mathcal{N} \tilde{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}^2} \right\} \quad (98)$$

Compte tenu du fait que  $\tilde{\mathbf{G}}_2 = O(\frac{1}{\sqrt{N}})$  et  $\tilde{\mathbf{H}}_2 = O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ , quand  $N \rightarrow \infty$ , on déduit aisément de (98) que

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 + O(\frac{1}{\sqrt{N}})$$

**Annexe B :** Démonstration du théorème 1.

L'approximation (98) de  $\hat{\sigma}^2$  se réécrit en se souvenant de l'expression (28) de  $\sigma^2$  :

$$\hat{\sigma}^2 = \text{Ré} \left\{ \frac{\Delta}{\eta} \right\} \quad (99)$$

avec

$$\begin{cases} \Delta = \alpha + \sigma^2 \beta \\ \alpha = \text{tr} \{ \hat{\mathbf{H}}_2 \Pi - \mathbf{H}_2 \mathbf{G}_2^{\dagger H} \hat{\mathbf{G}}_2^H \Pi - \mathbf{H}_2 \Pi \hat{\mathbf{G}}_2 \mathbf{G}_2^{\dagger} \} \\ \beta = \text{tr} \{ \mathbf{G}_2^{\dagger H} \hat{\mathbf{G}}_2^H \Pi + \Pi \hat{\mathbf{G}}_2 \mathbf{G}_2^{\dagger} \} \end{cases} \quad (100)$$

L'expression de la variance d'estimation de  $\sigma^2$  s'écrit avec ces notations :

$$\begin{aligned} & \text{E}[(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2] \\ &= \frac{1}{2\eta^2} \text{E} \left[ \text{Ré} \{ \alpha^2 + |\alpha|^2 + \sigma^4 \beta^2 + \sigma^4 |\beta|^2 + 2\sigma^2 \alpha \beta + 2\sigma^2 \alpha \beta^* \} \right] \\ & \quad - \frac{2}{\eta} \text{E} \left[ \text{Ré} \{ \sigma^2 \alpha + \sigma^4 \beta \} \right] + \sigma^4 \end{aligned} \quad (101)$$

Dans l'idée de calculer l'expression (101), on réécrit  $\alpha$  et  $\beta$  définis en (100) à l'aide des notations (30) (31). Il vient :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \text{tr} \{ \tilde{\mathbf{x}}(t) \tilde{\mathbf{x}}^H(t) \Pi \\ & \quad - \mathbf{H}_2 \mathbf{G}_2^{\dagger H} \tilde{\mathbf{x}}(t) \tilde{\mathbf{x}}^H(t) \Pi - \mathbf{H}_2 \Pi \tilde{\mathbf{x}}(t) \tilde{\mathbf{x}}^H(t) \mathbf{G}_2^{\dagger} \} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}^H(t) \mathbf{M} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \text{tr} \{ \mathbf{G}_2^{\dagger H} \tilde{\mathbf{x}}(t) \tilde{\mathbf{x}}^H(t) \Pi + \Pi \tilde{\mathbf{x}}(t) \tilde{\mathbf{x}}^H(t) \mathbf{G}_2^{\dagger} \} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}^H(t) \mathbf{M}' \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{G}_2^{\dagger} \mathbf{H}_2 \Pi \\ -\Pi \mathbf{H}_2 \mathbf{G}_2^{\dagger H} & \Pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Pi \end{bmatrix} \quad (103)$$

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}_2^{\dagger} \Pi \\ \Pi \mathbf{G}_2^{\dagger H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

car  $\mathbf{H}_2 \Pi = \sigma^2 \Pi$  et  $\mathbf{G}_2^{\dagger} \Pi = \mathbf{0}$ . On déduit aisément que  $\beta = 0$  et on calcule

$$\text{E}[\alpha] = \text{tr} \{ \mathbf{M} \mathbf{R} \} = \sigma^2 \text{tr} \{ \Pi \} = \sigma^2 \eta$$

Par conséquent, la variance (101) de  $\hat{\sigma}^2$  devient :

$$\text{E}[(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2] = \text{E} \left[ \frac{\alpha^2}{\eta^2} \right] - \sigma^4 \quad (104)$$

On a, de plus,

$$\alpha^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{t=1}^N \sum_{u=1}^N \mathbf{x}^H(t) \mathbf{M} \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(u) \mathbf{M} \mathbf{x}(u) \quad (105)$$

Sous l'hypothèse que les vecteurs d'observation  $\mathbf{x}(t)$  sont gaussiens, centrés, circulaires et indépendants deux à deux, on utilise l'expression (2.4) de [19] qui donne l'espérance mathématique du produit de quatre matrices à composantes aléatoires et gaussiennes et qui s'exprime suivant :

$$\begin{aligned} \text{E}[\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D}] &= \text{E}[\mathbf{A} \mathbf{B}] \text{E}[\mathbf{C} \mathbf{D}] + \text{E}[\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}] \text{E}[\mathbf{D} \otimes \mathbf{B}] \\ & \quad + \text{E}[\mathbf{A} \mathbf{E}[\mathbf{B} \mathbf{C}] \mathbf{D}] - \text{E}[\mathbf{A}] \text{E}[\mathbf{B}] \text{E}[\mathbf{C}] \text{E}[\mathbf{D}] \end{aligned} \quad (106)$$

où  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  sont des matrices de dimensions respectives  $(p, q)$ ,  $(q, 1)$ ,  $(1, s)$   $(s, t)$  et où  $\otimes$  indique le produit de Kronecker. En choisissant  $\mathbf{A} = \mathbf{x}^H(t) \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{x}^H(u)$  pour l'expression (105), on établit que :



$$\begin{aligned}
 E[\alpha^2] &= \frac{1}{N^2} \sum_{t=1}^N \sum_{u=1}^N E[\mathbf{x}^H(t) \mathbf{M} \mathbf{x}(t)] E[\mathbf{x}^H(u) \mathbf{M} \mathbf{x}(u)] \\
 &\quad + E[\mathbf{x}^H(t) \mathbf{M} \mathbf{E}[\mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(u)] \mathbf{M} \mathbf{x}(u)] \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{t=1}^N \sum_{u=1}^N [\text{tr}\{\mathbf{M} \mathbf{R}\}^2 + \text{tr}\{\mathbf{M} \mathbf{R} \mathbf{M} \mathbf{R}\} \delta_{t,u}]
 \end{aligned} \tag{107}$$

où  $\delta_{t,u}$  est le symbole de Kronecker.

Finalement, on trouve

$$E[\alpha^2] = \text{tr}\{\mathbf{M} \mathbf{R}\}^2 + \frac{1}{N} \text{tr}\{(\mathbf{M} \mathbf{R})^2\} \tag{108}$$

En utilisant les définitions (103) et (26), (27), on trouve :

$$E[(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2] = \frac{\sigma^4}{N \text{tr}\{\mathbf{\Pi}\}} \tag{109}$$

Il ne nous reste donc plus qu'à évaluer  $\text{tr}\{\mathbf{\Pi}\} = M - K - \text{tr}\{\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{A}}^H \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^H\}$ . La matrice  $\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{A}}^H \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^H$  étant de dimension  $(M-K) \times (M-K)$  et de rang  $K$ , en supposant  $M-K > K$ , il existe  $M-2K$  valeurs propres nulles qui sont associées aux vecteurs propres  $\mathbf{v}$  orthogonaux à  $\tilde{\mathbf{A}}$  c'est à dire tels que  $\tilde{\mathbf{A}}^H \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Les autres valeurs propres  $\lambda$  vérifient :

$$\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{A}}^H \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^H \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

où  $\mathbf{v}$  est un vecteur non nul et non orthogonal à  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Il vient encore en multipliant à gauche par  $\tilde{\mathbf{A}}^H$  cette dernière équation :

$$\tilde{\mathbf{A}}^H \mathbf{v} = \lambda \tilde{\mathbf{A}}^H \mathbf{v}$$

ce qui indique que les  $K$  valeurs propres non nulles sont égales à  $\lambda = 1$ . Par conséquent :

$$\text{tr}\{\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{A}}^H \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^H\} = K$$

On obtient alors le résultat du théorème 1.

### Annexe C : Démonstration du théorème 2.

Avec la notation (88) de  $\tilde{\theta}_i$ , on établit que :

$$E[\tilde{\theta}_i^2] = \frac{E[(\text{Ré}\{\rho\})^2]}{\gamma_i^2} \tag{110}$$

D'autre part, en remplaçant :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}(t) \tilde{\mathbf{x}}^H(t) \\ \hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}(t) \tilde{\mathbf{x}}^H(t) \end{cases} \tag{111}$$

dans l'expression de  $\rho$  en (89) avec (87), il vient :

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}^H(t) \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{x}(t) \tag{112}$$

où  $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{G}(\mathbf{G}^H \mathbf{G})^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_i \alpha_i^H$  est une matrice de dimension  $M \times (M-K)$ . On calcule alors

$$E[\tilde{\theta}_i^2] = \frac{1}{4N^2 \gamma_i^2} \sum_{t=1}^N \sum_{u=1}^N E[w_1 + 2w_2 + w_3] \tag{113}$$

où

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \mathbf{x}^H(t) \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(u) \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{x}(u) \\
 w_2 &= \mathbf{x}^H(t) \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^T(u) \tilde{\mathbf{M}}^* \mathbf{Q}^T \mathbf{x}^*(u) \\
 w_3 &= \mathbf{x}^T(t) \tilde{\mathbf{M}}^* \mathbf{Q}^T \mathbf{x}^*(t) \mathbf{x}^T(u) \tilde{\mathbf{M}}^* \mathbf{Q}^T \mathbf{x}^*(u)
 \end{aligned} \tag{114}$$

Comme dans l'annexe A, on utilise la relation (2.4) de [19] pour calculer l'espérance mathématique de ces 3 termes. Ainsi, à l'aide de (106), on établit que :

$$\begin{aligned}
 E[w_1] &= \text{tr}\{\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{R}\}^2 + \text{tr}\{(\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{R})^2\} \delta_{t,u} \\
 E[w_2] &= \text{tr}\{\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{R}\} \text{tr}\{\mathbf{Q} \tilde{\mathbf{M}}^H \mathbf{R}\} + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{R} \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{M}}^H \mathbf{R}\} \delta_{t,u} \\
 E[w_3] &= \text{tr}\{\mathbf{Q} \tilde{\mathbf{M}}^H \mathbf{R}\}^2 + \text{tr}\{(\mathbf{Q} \tilde{\mathbf{M}}^H \mathbf{R})^2\} \delta_{t,u}
 \end{aligned} \tag{115}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{\theta}_i^2] &= \frac{1}{4\gamma_i^2} [\text{tr}\{\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{R}\}^2 + \text{tr}\{\mathbf{Q} \tilde{\mathbf{M}}^H \mathbf{R}\}^2 \\
 &\quad + 2\text{tr}\{\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{R}\} \text{tr}\{\mathbf{Q} \tilde{\mathbf{M}}^H \mathbf{R}\}] \\
 &\quad + \frac{1}{4N\gamma_i^2} [\text{tr}\{(\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{R})^2\} + \text{tr}\{(\mathbf{Q} \tilde{\mathbf{M}}^H \mathbf{R})^2\} \\
 &\quad + 2\text{tr}\{\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{R} \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{M}}^H \mathbf{R}\}]
 \end{aligned} \tag{116}$$

On calcule  $\text{tr}\{\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{R}\}$  à l'aide de (23), et en remarquant que  $\mathbf{Q}^H \mathbf{A} = \mathbf{0}$  :

$$\text{tr}\{\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{R}\} = \sigma^2 \text{tr}\{\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H\} \tag{117}$$

qui donne d'après l'expression de  $\tilde{\mathbf{M}}$  :

$$\text{tr}\{\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{R}\} = \sigma^2 \alpha_i^H \mathbf{Q}^H \mathbf{G}(\mathbf{G}^H \mathbf{G})^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_i \tag{118}$$

On remarque que  $\tilde{\mathbf{a}}_i = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{e}_i$  où  $\mathbf{e}_i$  est un vecteur de dimension  $K$  dont seule la composante  $i$  est non nulle et égale à 1, et on calcule d'après l'expression de  $\mathbf{G} = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{S}}^H$  :

$$\mathbf{G}(\mathbf{G}^H \mathbf{G})^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_i = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}_i \tag{119}$$

$$\text{tr}\{\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^H \mathbf{R}\} = \sigma^2 \alpha_i^H \mathbf{Q}^H \mathbf{A}^\dagger \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}_i = 0 \tag{120}$$

puisque  $\mathbf{Q}^H \mathbf{A} = \mathbf{0}$ .

## Performances asymptotiques et complexité

Avec un même genre de calcul on démontre aisément que

$$\text{tr}\{(\bar{\mathbf{M}}\mathbf{Q}^H\mathbf{R})^2\} = 0 \quad (121)$$

et

$$\begin{aligned} \text{tr}\{\bar{\mathbf{M}}\mathbf{Q}^H\mathbf{R}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{M}}^H\mathbf{R}\} &= \sigma^4\gamma_i\mathbf{e}_i^H\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{e}_i \\ &+ \sigma^2\gamma_i\mathbf{e}_i^H\mathbf{S}^{-1}\mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (122)$$

De même, puisque  $\mathbf{G}^H\mathbf{Q} = 0$ , on trouve :

$$\text{tr}\{\mathbf{Q}\bar{\mathbf{M}}^H\mathbf{R}\} = 0 \text{ et } \text{tr}\{(\mathbf{Q}\bar{\mathbf{M}}^H\mathbf{R})^2\} = 0 \quad (123)$$

En injectant ces expressions dans (116), on obtient le résultat (91) du théorème 2.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Bienvenu and L. Kopp, « Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach », *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-31, no. 10, pp. 1235-1247, Oct. 1983.
- [2] R.O. Schmidt, « Multiple emitter location and signal parameters estimation », *Proc. RADC Spectrum Estimation Workshop*, Rome, NY, Oct. 1979.
- [3] C. C. Yeh, « Projection approach for bearing estimations », *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, no. 5, pp. 1347-1349, Oct. 1986.
- [4] C. C. Yeh, « Simple computation of projection matrix for bearing estimations », *Proc. Inst. Elec. Eng.*, Part F, vol. 134, no. 2, pp. 146-150, Apr. 1987.
- [5] P. Stoica and T. Söderström, « Statistical analysis of a subspace method for bearing estimation without eigendecomposition », *Proc. Inst. Elec. Eng.*, Part F, vol. 139, no. 4, pp. 301-305, Aug. 1992.
- [6] J. Munier and G.Y. Delisle, « Spatial analysis using new properties of the cross-spectral matrix », *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 39, no. 3, pp. 746-749, Mar. 1991.
- [7] S. Marcos and M. Benidir, « On a high resolution array processing method non-based on the eigenanalysis approach », *Proc. ICASSP*, pp. 2955-2958, Albuquerque, NM, Apr. 1990.
- [8] S. Marcos and M. Benidir, « Source bearing estimation and sensor positioning with the propagator method », in : F.T. Luk, ed., *Adv. Signal Processing Alg., Arch., and Implementations.*, SPIE, vol. 1348, pp. 312-323, San Diego, Jul. 1990.
- [9] S. Marcos, A. Marsal, and M. Benidir, « The Propagator method for source bearing estimation », *Signal Processing*, vol. 42, no. 2, pp. 121-138, Mar. 1995.
- [10] A. Eriksson, P. Stoica, and T. Söderström, « On-line subspace algorithms for tracking moving sources », *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 9, pp. 2319-2330, Sept. 1994.
- [11] P. Stoica, T. Söderström and V. Simonyte, « On estimating the noise power in array processing », *Signal Processing*, vol. 26, no. 2, pp. 205-220, Feb. 1992.
- [12] D.H. Johnson, « The application of spectral analysis methods to bearing estimation problems », *Proc. of IEEE*, vol. 70, pp. 1018-1028, 1982.
- [13] D.H. Johnson and D.E. Dudgeon, *Array Signal Processing*, Prentice-Hall, Signal Processing Series, A.V. Oppenheim Editor, 1993.
- [14] T.J. Shan, M. Wax and T. Kailath, « On spatial smoothing for direction of arrival estimation of coherent signals », *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-33, no. 4, pp. 806-811, Aug. 1985.
- [15] G. H. Golub and C.F. Van Loan, *Matrix Computations*. Baltimore, MD. Johns Hopkins University Press, 1989, 2nd. ed.
- [16] R. Roy and T. Kailath, « ESPRIT : Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques », *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-37, no. 7, pp. 984-995, July 1989.
- [17] P. Stoica and A. Nehorai, « MUSIC, maximum likelihood and Cramer-Rao bound », *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-37, no. 12, pp. 720-741, May 1989.
- [18] S. Marcos and M. Benidir, « Adaptive subspace algorithm for direction finding and tracking », in : F.T. Luk, ed., *Advanced Signal Processing Algorithms.*, SPIE, vol. 2563, pp. 230-241, San Diego, Jul. 1995.
- [19] P.H.M. Janssen and P. Stoica, « On the expectation of the product of four matrix-valued gaussian random variables », *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-33, no. 9, pp. 867-870, Septembre 1988.
- [20] R.J. Serfling, *Approximation theorems of mathematical statistics*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1980.

Manuscrit reçu le 7 Mars 1996.

## LES AUTEURS

### Sylvie MARCOS



Sylvie Marcos est ingénieur de l'Ecole Centrale de Paris (Chatenay-Malabry, 1984), Docteur de l'Université Paris-Sud (Orsay, 1987) et Habilitée à diriger des recherches en Sciences (Orsay, 1995). Elle est Chargée de Recherche CNRS depuis 1988 et travaille au Laboratoire des Signaux et Systèmes à SUPELEC à Gif-sur-Yvette. Ses domaines d'intérêt sont le filtrage adaptatif et ses applications en communications numériques ainsi que le traitement d'antenne.

### Javier SANCHEZ-ARAUJO



Javier Sanchez-Araujo est né à Mexico en Janvier 1969. Il est ingénieur de l'Université de Mexico (1992) et titulaire d'un diplôme de spécialisation en électronique rapide de SUPELEC (1994). Depuis 1994, il effectue sa thèse au Laboratoire des Signaux et Systèmes à SUPELEC à Gif-sur-Yvette. Ses domaines d'intérêt sont les algorithmes de sous espaces pour la localisation et la poursuite de sources.