

# Représentation de la position relative d'objets 2D au moyen d'un histogramme de forces

## The Notion of Histogram of Forces: a New Way to Represent the Relative Position of 2D-Objects

par Pascal MATSAKIS<sup>\*,†</sup>, Laurent WENDLING<sup>\*</sup>, Jacky DESACHY<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> IRIT - UPS,  
118 route de narbonne, 31062 Toulouse, France.

<sup>†</sup> CRIL Ingenierie - Groupe Coritec, 5 avenue Marcel Dassault, 31500 Toulouse.

{MATSAKIS,wendling,desachy}@irit.fr, fax : (33) 05.61.55.62.58, tél : (33) 05.61.55.68.82

### *résumé et mots clés*

L'évaluation des relations spatiales directionnelles (telles que « à droite de », « au sud de » ...) entre objets 2D repose généralement sur la constitution d'un histogramme d'angles. Un tel histogramme est supposé constituer une bonne représentation de la position relative d'un objet par rapport à un autre. Dans cet article, nous introduisons la notion d'histogramme de forces. Elle généralise et supplante celle d'histogramme d'angles. La manipulation des objets (entités de dimension 2) est ramenée à celle de leurs sections longitudinales (entités de dimension 1), non pas à celle de points. Il est ainsi possible de bénéficier de la puissance du calcul intégral et d'assurer un traitement incomparablement plus rapide aussi bien de données rasters que vecteurs, tout en tenant compte explicitement aussi bien de l'information angulaire que de l'information métrique.

Reconnaissance des formes, extraction de paramètres, relations spatiales, sous-ensembles flous.

### *abstract and key words*

The assessment of the directional spatial relations (such as "to the right of", "to the south of"... ) between 2D-objects relies generally on the computation of a histogram of angles, which is supposed to provide a reasonably good representation of the relative position of an object with regard to another. In this paper, we introduce the notion of histogram of forces. It generalizes and supersedes the one of histogram of angles. The objects are handled as longitudinal sections (1D-entities). It is thus possible to benefit in full by the power of integral calculus and to ensure a rapid processing of raster data as well as of vector data under explicit consideration of both angular and metric information.

Pattern recognition, parameter extraction, spatial relationships, fuzzy subsets.

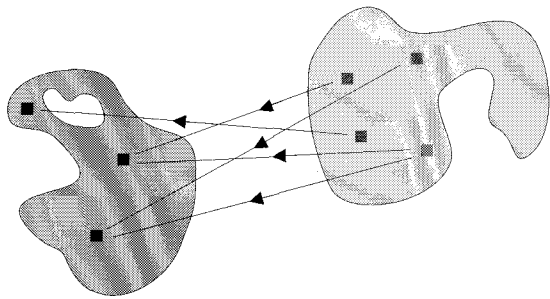
## 1. introduction

Savoir appréhender l'organisation spatiale d'objets bidimensionnels est essentiel dans le domaine de la vision par ordinateur.

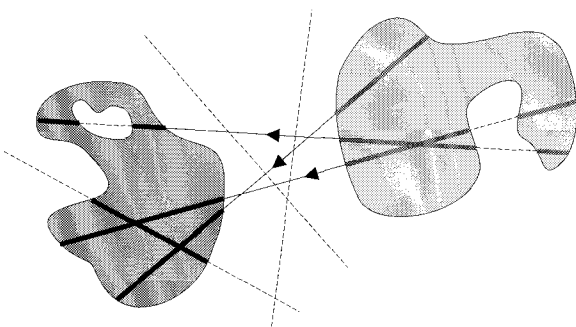
Nous introduisons dans cet article un nouveau mode de représentation de la position relative d'objets 2D. Typiquement, une telle représentation est utilisée pour évaluer les relations spatiales directionnelles (telles que « à droite de », « au sud de »...). Les applications potentielles ne se limitent pas pour autant à l'éva-

luation de relations spatiales ([Wen97]). Ajoutons que la notion de position relative ne saurait être rattachée aux seules relations directionnelles ([Fre75], [Ros85]). Généralement, c'est par un histogramme d'angles qu'est représentée la position d'un objet relativement à un autre. De nombreux travaux s'appuient actuellement, de manière plus ou moins explicite, sur ce mode de représentation ([Kri93], [Miy94], [Kel95], [Kel96]...). Mais le calcul de l'histogramme est coûteux. De plus, seules les données rasters peuvent être considérées. Surtout, l'information métrique n'est pas *explicitement* prise en compte : comme nous le montrerons ici, c'est un réel handicap pour le traitement d'objets bidimensionnels. Nous présentons dans cet article la notion d'histogramme de forces. Elle s'affranchit des faiblesses précédemment évoquées, généralise et supplante la notion d'histogramme d'angles.

Dans le paragraphe § 2, nous spécifions le type des objets 2D que nous manipulons et fixons un cadre axiomatique aux relations spatiales directionnelles entre ces objets. Le cadre en question sert de guide, § 3, pour la recherche de fonctions de traitement des sections longitudinales (figure 1b). Nous montrons, § 4, comment une telle fonction permet de faire correspondre un histogramme de forces à un couple d'objets. Nous indiquons ensuite quelle démarche suivre pour définir, en s'appuyant sur la notion d'histogramme de forces, une famille de relations spatiales directionnelles qui s'inscrive bien dans le cadre axiomatique fixé § 2. § 5 nous voyons comment procéder en pratique au traitement de données rasters et vecteurs. Enfin, une étude comparative est présentée § 6 et la conclusion est donnée § 7.



a) L'approche classique : considération de couples de points.



b) L'approche proposée : considération de couples de sections longitudinales.

Figure 1. – Représentation de la position relative de deux objets.

## 2. relations spatiales directionnelles

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $\theta$  et  $v$  deux réels quelconques. Notons  $\vec{i}_\theta$  et  $\vec{j}_\theta$  les images respectives de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  par la rotation d'angle  $\theta$ ,  $\Delta_\theta(v)$  la droite orientée dont le repère est défini par le vecteur  $\vec{i}_\theta$  et le point de coordonnées  $(0, v)$  – relativement à  $(O, \vec{i}_\theta, \vec{j}_\theta)$  – (figure 2).

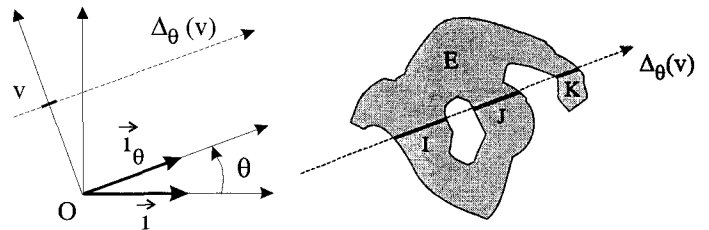


Figure 2. – Droites et sections longitudinales.  $E_\theta(v) = E \cap \Delta_\theta(v) = I \cup J \cup K$ .

### 2.1. relations entre points

La définition de relations spatiales directionnelles entre points ne porte pas à controverse. Tous les auteurs acceptent, pensons-nous, les formulations suivantes. Une *relation spatiale directionnelle* entre points est une relation binaire floue  $\mathcal{R}_\alpha$  entre points, où  $\alpha$  désigne un réel quelconque. A tout couple  $(A, B)$  de points distincts,  $\mathcal{R}_\alpha$  fait correspondre un élément de  $[0;1]$ . Cet élément  $\mathcal{R}_\alpha(A, B)$  est assimilé à la valeur de vérité d'une proposition  $A\mathcal{R}_\alpha B$  s'énonçant «  $A$  est dans la direction  $\alpha$  de  $B$  ». Le point  $A$  est l'*argument* de la proposition, le point  $B$  le *réfèrent*. Pour certaines valeurs de  $\alpha$ , et selon le contexte, des conventions particulières sont généralement adoptées. Ainsi, la relation  $\mathcal{R}_0$  est parfois notée  $A\_DROITE\_DE$ ,  $A\_L'EST\_DE\dots$  et la proposition  $A\mathcal{R}_0 B$  énoncée «  $A$  est à droite de  $B$  », «  $A$  est à l'est de  $B$  »... Les relations spatiales directionnelles entre points sont définies à partir d'un sous-ensemble flou de  $\mathbb{R}$  dont la fonction d'appartenance  $\mu$  est continue, périodique de période  $2\pi$ , paire, décroissante sur  $[0; \pi]$ , prend la valeur 1 en 0 et la valeur 0 en  $\pi/2$ . Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels,  $A$  et  $B$  deux points distincts. Si  $\beta$  est une mesure de l'angle  $(\vec{i}, \vec{BA})$  alors (figure 3) :  $\mathcal{R}_\alpha(A, B) = \mu(\beta - \alpha)$

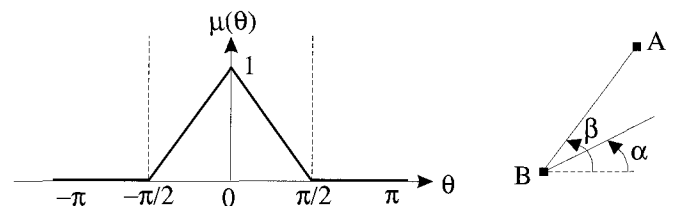


Figure 3. – Exemple de relations spatiales directionnelles entre points.

Le degré de vérité de la proposition «  $A$  est dans la direction  $\alpha$  de  $B$  » est  $\mu(\beta - \alpha)$ .

## 2.2. relations entre objets 2D

Comme l'ont souligné en particulier A.Rosenfeld et A.C.Kak [Ros82], s'il est facile de définir des relations spatiales directionnelles entre de simples points, le problème est autrement plus complexe lorsqu'il s'agit de traiter des objets bidimensionnels et que rentrent en jeu les paramètres forme, orientation, taille... Précisons tout d'abord la nature des objets que nous allons manipuler.

### Définition 1.

Soit  $E$  un ensemble borné non vide de points du plan, égal à l'adhérence de son intérieur ( $\bar{E} = E$ ). Nous dirons que  $E$  est un *objet net* si et seulement si : pour tout réel  $\theta$ , pour tout réel  $v$ ,  $E \cap \Delta_\theta(v)$  est l'union d'un nombre fini de segments deux à deux disjoints. L'ensemble  $E \cap \Delta_\theta(v)$  sera noté  $E_\theta(v)$  : nous dirons que c'est une *section longitudinale* de  $E$  (figure 2).

Par la suite, nous omettrons souvent l'adjectif « net » (la définition d'un « objet flou » est donnée à l'annexe 2). La condition  $\bar{E} = E$  permet de ne considérer que des objets purement bidimensionnels (*regular closed set* [Wor95]), ne comportant aucun greffon du type arc ou point isolé. Considérons maintenant une famille de relations binaires floues entre objets, correspondant à une famille de relations spatiales directionnelles (ces relations sont donc supposées insensibles au contexte : la position directionnelle d'un objet par rapport à un autre n'est pas du tout affectée par le reste de la scène). Nous reprendrons la terminologie et notations adoptées § 2.1. Il paraît naturel de supposer que les relations précédentes sont toutes définies sur exactement le même ensemble de couples d'objets : nous parlerons de l'ensemble des *couples évaluable* (typiquement, mais nous y reviendrons, il s'agira soit de l'ensemble de tous les couples d'objets, soit de l'ensemble réduit des couples d'objets disjoints). Des relations précédentes il semble également légitime d'attendre les propriétés que voici :

[A1] Soit  $A$  et  $B$  deux objets nets,  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels. Notons  $t_{\vec{u}}$  la translation de vecteur  $\vec{u}$ . Il existe un réel  $k_0$  tel que : pour toute valeur de  $k$  supérieure à  $k_0$ ,  $(t_{k \cdot \vec{i}_\beta}(A), B)$  est évaluable. De plus :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{R}_\alpha(t_{k \cdot \vec{i}_\beta}(A), B) = \mu(\beta - \alpha)$$

[A2] Soit  $A$  et  $B$  deux objets nets,  $\alpha$  un réel.

Si  $(A, B)$  est évaluable,  $(B, A)$  l'est également et :

$$\mathcal{R}_{\alpha+\pi}(B, A) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$$

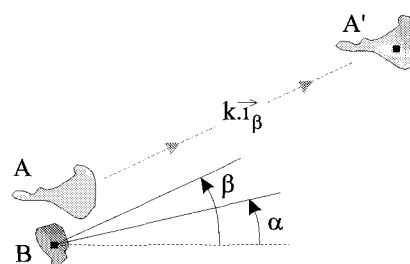
[A3] Soit  $A$  et  $B$  deux objets nets,  $\alpha$  un réel,  $sym$  une symétrie orthogonale d'axe  $\Delta_\beta(v)$ . Si  $(A, B)$  est évaluable,  $(sym(A), sym(B))$  l'est également et :

$$\mathcal{R}_{2\beta-\alpha}(sym(A), sym(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$$

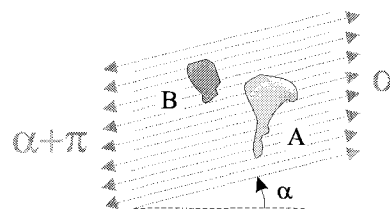
[A4] Soit  $A$  et  $B$  deux objets nets,  $\alpha$  un réel,  $hom$  une homothétie du plan de rapport strictement positif. Si  $(A, B)$  est évaluable,  $(hom(A), hom(B))$  l'est également et :

$$\mathcal{R}_\alpha(hom(A), hom(B)) = \mathcal{R}_\alpha(A, B)$$

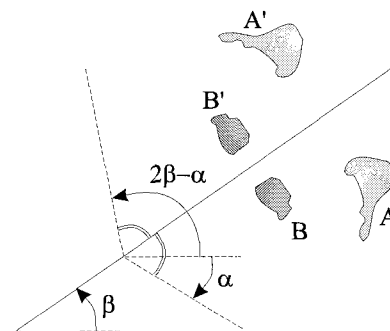
Nous parlerons désormais des *propriétés axiomatiques fondamentales* (figure 4). [A1] exprime que deux objets peuvent être assimilés à des points s'ils sont suffisamment distants. [A3] et [A4] définissent le comportement des relations spatiales directionnelles vis-à-vis des similitudes : [A4] exprime que les relations sont insensibles aux changements d'échelle, [A3] qu'aucune dimension de l'espace n'est privilégiée, aucune direction non plus. [A2] met en avant la notion d'inverse sémantique (selon [Fre75]). Ainsi,  $A$  est à gauche de  $B$  de la même manière que  $B$  est à droite de  $A$ . Comme on peut l'observer en parcourant la littérature (notamment



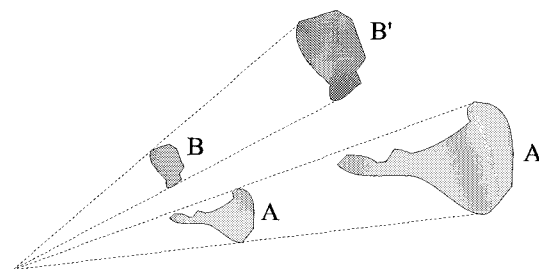
[A1]  $A$  peu de chose près,  $A'$  est situé par rapport à  $B$  comme le centre de  $A'$  est situé par rapport au centre de  $B$ . Et c'est d'autant plus vrai que  $k$  est grand.



[A2]  $B$  est dans la direction  $\alpha + \pi$  de  $A$  comme  $A$  est dans la direction  $\alpha$  de  $B$ .



[A3]  $A'$  est dans la direction  $2\beta - \alpha$  de  $B'$  comme  $A$  est dans la direction  $\alpha$  de  $B$ .



[A4]  $A'$  est situé par rapport à  $B'$  comme  $A$  est situé par rapport à  $B$ .  
Figure 4. – Les propriétés axiomatiques fondamentales.

les articles de J.Freeman [Fre75] et G.Retz-Schmidt [Ret88]), les points de vue qui viennent d'être exprimés sont globalement rejetés par les travaux menés dans les domaines de la linguistique et de la psychologie. Quoi qu'il en soit, ils sont – de façon plus ou moins explicite – largement adoptés par les informaticiens ([Peu87], [Koc88], [Kel90], [Kri93], [Miy94]...). Il faut bien s'accommoder à notre compréhension limitée des mécanismes de la perception humaine.

### 3. traitement des sections longitudinales

#### 3.1. introduction

Soit  $T$  l'ensemble des triplets  $(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$  où  $\theta$  et  $v$  décrivent  $\mathbb{R}$  et  $A$  et  $B$  décrivent l'ensemble des objets nets du plan. Rappelons que  $A_\theta(v)$  est une section longitudinale de  $A$  (§ 2.2, définition 1) :  $A_\theta(v) = A \cap \Delta_\theta(v)$ . De même :  $B_\theta(v) = B \cap \Delta_\theta(v)$ . Se donner  $\theta$  c'est se donner une direction, se donner ensuite  $v$  c'est choisir une droite orientée parmi celles qui admettent la direction  $\theta$ . Comment définir une fonction  $F$  de  $T$  dans  $\mathbb{R}_+$  de telle sorte que pour tout couple  $(A, B)$  d'objets, l'ensemble  $\{(\Delta_\theta(v), F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)))\}_{(\theta,v) \in \mathbb{R}^2}$  de données puisse représenter la position directionnelle de  $A$  par rapport à  $B$  – et permette donc notamment d'évaluer les relations spatiales directionnelles entre ces objets? Pour répondre à cette question, nous avons considéré que  $F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$  représente un poids : le poids des arguments qu'un observateur dont le champ de vision est limité à  $\Delta_\theta(v)$ , peut néanmoins trouver pour soutenir la proposition «  $A$  est dans la direction  $\theta$  de  $B$  ».

Notre cheminement nous a conduit des relations spatiales directionnelles vers  $F$  – pour le traitement des couples de sections longitudinales –, puis de  $F$  vers une seconde fonction  $f$  – pour le traitement plus fin des couples de segments –, puis de  $f$  vers une troisième fonction  $\varphi$  – pour le traitement des couples de points. Les propriétés axiomatiques [A1] à [A4] induisent en effet des propriétés axiomatiques sur  $F$ ; de celles-ci se déduit l'existence de la fonction  $f$ ; ces mêmes propriétés induisent aussi des propriétés axiomatiques sur  $f$ ; desquelles se déduit enfin l'existence de  $\varphi$ . Progression naturelle, dans la mesure où toute section longitudinale est une union de segments et où tout segment est une union de points. Progression qui nous ramène aux points, pourrait-on s'inquiéter! Certes. Mais seulement le temps d'un développement théorique. Car en pratique la fonction  $\varphi$  n'est pas directement sollicitée. Dans le paragraphe § 3.2 nous présentons les fonctions  $\varphi, f, F$ . Afin de gagner en concision et lisibilité, nous avons pris le parti d'introduire d'abord  $\varphi$ , puis  $f$ , puis  $F$ , et non le contraire. Des exemples concrets sont proposés § 3.3. Toutes les propriétés auxquelles il est fait référence sont consignées à l'annexe 1 située en fin d'article. Leurs principaux liens sont signalés

figure 14. Informons enfin le lecteur qu'il pourra trouver dans [Mat98] les démonstrations de toutes les propositions énoncées ici et une étude beaucoup plus poussée sur les histogrammes de forces.

#### 3.2. présentation générale des fonctions $\varphi, f, F$

##### 3.2.1. traitement des points : la fonction $\varphi$

Le traitement des couples de points est assuré par l'intermédiaire d'une application  $\varphi$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}_+$ , nulle sur  $\mathbb{R}_-$ , continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Soit  $A$  et  $B$  deux objets,  $\theta$  et  $v$  deux réels,  $M$  un point de  $A_\theta(v)$ ,  $N$  un point de  $B_\theta(v)$ . Nous considérons le couple  $(M, N)$  comme un argument avancé pour soutenir la proposition «  $A$  est dans la direction  $\theta$  de  $B$  » (figure 5).  $\varphi(x_M - x_N)$ , où  $x_M$  et  $x_N$  désignent les abscisses respectives de  $M$  et  $N$  sur  $\Delta_\theta(v)$ , représente le poids de cet argument. Il ne dépend que de la position relative de  $M$  et  $N$  sur  $\Delta_\theta(v)$  : ceci garantit qu'aucune direction n'est privilégiée (et est donc bien conforme au souhait exprimé par [A3]). Si  $x_M$  est inférieure ou égale à  $x_N$ , c'est-à-dire si  $x_M - x_N$  appartient à  $\mathbb{R}_-$ , l'argument avancé pour soutenir la proposition précédente ne tient pas : il est par conséquent naturel que son poids  $\varphi(x_M - x_N)$  soit nul. La continuité est une propriété analytique souvent jugée minimale, car vérifiée par la plupart des phénomènes physiques (du moins, à l'échelle humaine). Vouloir l'adopter semble légitime. Il est clair cependant qu'elle ne peut pas être exigée en 0 : en effet, si  $x_M - x_N$  est strictement positif

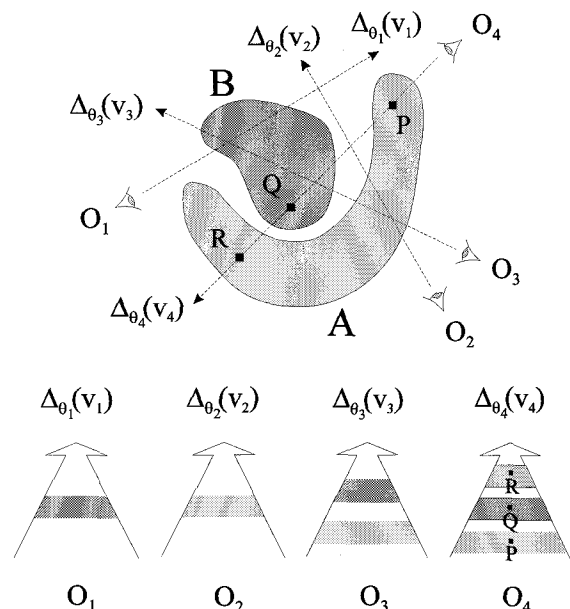


Figure 5. – Le rôle de  $\varphi$  dans le traitement des sections longitudinales.

Pour l'observateur  $O_4$ ,  $(R, Q)$  constitue un bon argument en faveur de la proposition «  $A$  est dans la direction  $\theta_4$  de  $B$  ». Mais pas  $(P, Q)$  :  $\varphi(x_P - x_Q) = 0$ . Quant aux autres observateurs, ils ne peuvent exhiber aucun argument pour soutenir leurs propositions respectives.

$M$  est (totalement) dans la direction  $\theta$  de  $N$ , alors que si  $x_M - x_N$  est strictement négatif  $M$  n'est (absolument) pas dans la direction  $\theta$  de  $N$ .

### 3.2.2. traitement des segments : la fonction $f$

Le traitement des couples de segments est assuré par l'intermédiaire d'une fonction  $f$  de  $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$  vers  $\mathbf{R}_+$ . Soit  $(I, J)$  un couple de segments d'une même droite. Il existe une infinité de valeurs  $\theta$  (elles sont égales modulo  $\pi$ ) telles que  $(\theta, I, J)$  appartienne à  $T$ . Choisissons-en une. Il existe maintenant un réel  $v$  et un seul tel que la droite orientée  $\Delta_\theta(v)$  porte  $I$  et  $J$ . Nous noterons  $a_I^\theta, b_I^\theta, a_J^\theta$  et  $b_J^\theta$ , avec  $a_I^\theta$  inférieur à  $b_I^\theta$  et  $a_J^\theta$  inférieur à  $b_J^\theta$ , les coordonnées – relativement au repère associé à  $\Delta_\theta(v)$  – des extrémités des segments  $I$  et  $J$  (figure 6).  $b_I^\theta - a_I^\theta$  et  $b_J^\theta - a_J^\theta$  sont des valeurs positives indépendantes du choix de  $\theta$  : nous les noterons  $d_I$  et  $d_J$ . Elles correspondent tout simplement aux longueurs des segments  $I$  et  $J$ .  $a_I^\theta - b_J^\theta$  est par contre une valeur quelconque, dépendante du choix de  $\theta$  : nous la noterons  $D_{IJ}^\theta$ .

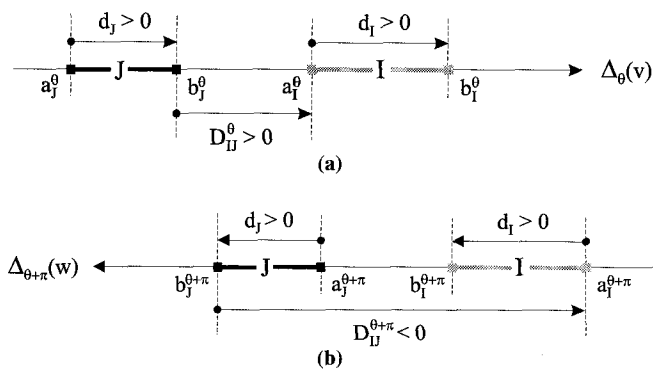


Figure 6. – Couple de segments d'une même droite. Notations.

Soit  $A$  et  $B$  deux objets,  $\theta$  et  $v$  deux réels,  $I$  l'un des segments constituant  $A_\theta(v)$ ,  $J$  l'un des segments constituant  $B_\theta(v)$ . Nous considérons le couple  $(I, J)$  comme un argument avancé pour soutenir la proposition «  $A$  est dans la direction  $\theta$  de  $B$  ».  $f(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J)$  représente le poids de cet argument. Il ne dépend que des dimensions des segments  $I$  et  $J$  et de leur position relative sur  $\Delta_\theta(v)$  (ce qui, encore une fois, est bien conforme au souhait exprimé par [A3]). Il semble naturel à ce stade d'évaluer  $f(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J)$  en capitalisant les poids  $\varphi(x_M - x_N)$  des arguments constitués par les couples de points  $(M, N)$ , où  $M$  et  $N$  décrivent respectivement  $I$  et  $J$  :

$$\begin{aligned} f(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J) &= \int_{a_I^\theta}^{b_I^\theta} \left( \int_{a_J^\theta}^{b_J^\theta} \varphi(u - v) . dv \right) . du \\ &= \int_{a_J^\theta}^{b_J^\theta} \left( \int_{a_I^\theta}^{b_I^\theta} \varphi(u - v) . du \right) . dv \\ &= \int_{D_{IJ}^\theta + d_J}^{d_I + D_{IJ}^\theta + d_J} \left( \int_0^{d_J} \varphi(u - v) . dv \right) . du \end{aligned}$$

### Définition 2

Soit  $\varphi$  une fonction de  $\mathbf{R}$  vers  $\mathbf{R}_+$ .

Nous dirons de la fonction suivante que c'est la fonction générée par  $\varphi$ .

$$\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$$

$$(x, y, z) \mapsto \int_{y+z}^{x+y+z} \left( \int_0^z \varphi(u - v) dv \right) du$$

### Proposition 1

Soit  $\varphi$  une application de  $\mathbf{R}$  vers  $\mathbf{R}_+$  et soit  $f$  la fonction générée par  $\varphi$ . Si  $\varphi$  est nulle sur  $\mathbf{R}_-$ , n'est nulle sur aucun intervalle ouvert non vide de  $\mathbf{R}_+^*$ , et est continue sur  $\mathbf{R}_+^*$ , alors  $f$  est continue sur  $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+$  et possède les propriétés [P1] à [P3].

Rappelons que toutes les propriétés sont consignées à l'annexe 1. Dans [P2],  $y > 0$  correspond au cas représenté figure 6a :  $(I, J)$  constitue un bon argument en faveur de la proposition «  $A$  est dans la direction  $\theta$  de  $B$  ». Dans [P1],  $x + y + z < 0$  correspond au cas représenté figure 6b :  $(I, J)$  ne constitue absolument pas un bon argument en faveur de la proposition «  $A$  est dans la direction  $\theta + \pi$  de  $B$  ». La signification de [P2] est suggérée figure 7.

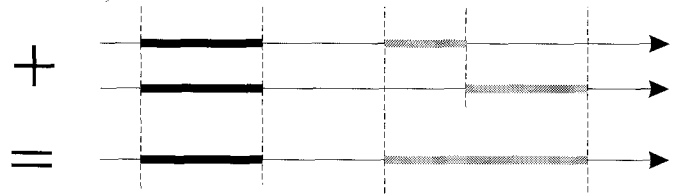


Figure 7. – La propriété [P2]. Interprétation.

### 3.2.3. traitement des sections longitudinales : la fonction $F$

Le traitement des couples de sections longitudinales est assuré par l'intermédiaire d'une fonction  $F$  de  $T$  vers  $\mathbf{R}_+$ . Soit  $A$  et  $B$  deux objets,  $\theta$  et  $v$  deux réels. Il existe un ensemble  $\{I_i\}_{i \in 1..n}$  de segments deux à deux disjoints, et un seul, tel que :  $A_\theta(v) = \cup_{i \in 1..n} I_i$ . De même, il existe un ensemble  $\{J_j\}_{j \in 1..m}$  de segments deux à deux disjoints, et un seul, tel que :  $B_\theta(v) = \cup_{j \in 1..m} J_j$ . Nous considérons le couple  $(A_\theta(v), B_\theta(v))$  comme un argument avancé pour soutenir la proposition «  $A$  est dans la direction  $\theta$  de  $B$  ».  $F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$  représente le poids de cet argument. Il semble naturel de l'évaluer en capitalisant les poids  $f(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J)$  des arguments constitués par les couples de segments  $(I, J)$ , où  $I$  et  $J$  décrivent respectivement  $\{I_i\}_{i \in 1..n}$  et  $\{J_j\}_{j \in 1..m}$  :

$$F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) = \sum_{i \in 1..n} \sum_{j \in 1..m} f(d_{I_i}, D_{I_i J_j}^\theta, d_{J_j})$$

**Définition 3**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  vers  $\mathbb{R}_+$  et  $F$  une fonction de  $T$  vers  $\mathbb{R}_+$ . Si  $f$  et  $F$  se partagent la propriété [P9] et si  $F$  possède la propriété [P10] alors nous dirons que  $F$  est la *fonction générée par  $f$* .

**Proposition 2**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  vers  $\mathbb{R}_+$  et soit  $F$  la fonction générée par  $f$ . Si  $f$  possède les propriétés [P1] à [P3] alors  $F$  possède les propriétés [P10] à [P14].

Nous verrons § 4 comment définir une famille de relations spatiales directionnelles à partir de la donnée d'une fonction  $F$  de traitement des sections longitudinales. Mais on peut se douter déjà que [P13] et [P14] vont contribuer à garantir les propriétés axiomatiques fondamentales [A2] et [A3] : les similitudes entre [P13] et [A2] d'une part, [P14] et [A3] d'autre part, sont évidentes. Quant à [P11] et [P12], même si le lien est plus délicat à établir, elles vont contribuer à garantir [A1]. Reste [A4]. Il existe un moyen simple d'assurer cette propriété. Mais sa mise en œuvre suppose que  $F$  possède [P15] (§ 4.2, proposition 8).

**3.3. une famille particulière de fonctions  $\varphi/f/F$**

Pour tout réel positif  $r$ , notons  $\varphi_r$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}_+$ , nulle sur  $\mathbb{R}_-$  et telle que :  $\forall d \in \mathbb{R}_+^*, \varphi_r(d) = 1/d^r$ . Notons  $f_r$  la fonction générée par  $\varphi_r$  et  $F_r$  celle générée par  $f_r$ .

**Proposition 3**

Soit  $r$  un réel positif.  $f_r$  est continue sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$  et possède les propriétés [P1] à [P4].

**Proposition 4**

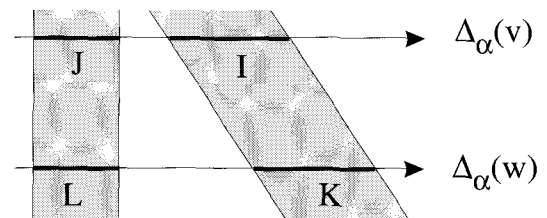
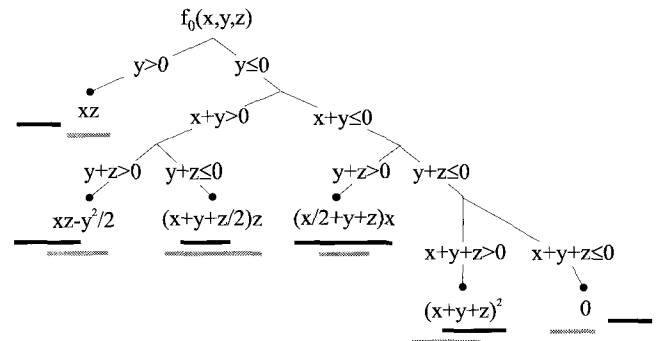
Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  vers  $\mathbb{R}_+$  et soit  $F$  la fonction générée par  $f$ . Si  $f$  possède les propriétés [P1] à [P4] alors  $F$  possède les propriétés [P10] à [P15].

Les fonctions  $F_r$  possèdent donc la propriété [P15]. Comme nous l'avons souligné il y a quelques instants (§ 3.2.3), cette caractéristique donne un moyen particulièrement simple de garantir [A4] (§ 4.2, proposition 8). L'importance des familles de fonctions  $\varphi_r/f_r/F_r$  tient également dans les particularités remarquables de deux de leurs membres :  $\varphi_0/f_0/F_0$  et  $\varphi_2/f_2/F_2$ . Soit  $A$  et  $B$  deux objets,  $\theta$  et  $v$  deux réels,  $M$  un point de  $A_\theta(v)$ ,  $N$  un point de  $B_\theta(v)$ . Supposons que le couple  $(M, N)$  constitue un bon argument en faveur de la proposition «  $A$  est dans la direction  $\theta$  de  $B$  » (autrement dit que  $M$  soit dans la direction  $\theta$  de  $N$ ).  $\varphi_0$  donne à cet argument un poids qui est indépendant de la distance  $MN$ . C'est la raison pour laquelle les histogrammes de forces générés à partir de  $\varphi_0/f_0/F_0$  sont au cas continu ce que les histogrammes d'angles sont au cas discret (§ 4.1, § 6). Venons-en aux

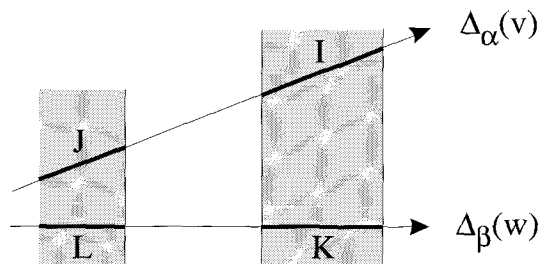
fonctions  $\varphi_2/f_2/F_2$ . Notons tout d'abord qu'en assimilant  $M$  et  $N$  à deux points matériels de masse unitaire, le poids attribué par  $\varphi_2$  peut être considéré comme la force gravitationnelle exercée par  $M$  sur  $N$  (force qui tend à déplacer  $N$  dans la direction  $\theta$ ). Nous reviendrons sur ce point § 4. Les propositions 5 et 6 ci-après donnent les expressions des fonctions  $f_0$  et  $f_2$  générées respectivement par  $\varphi_0$  et  $\varphi_2$ . Le fait que  $f_0$  possède la propriété [P5] ne surprendra personne : l'indépendance dont fait preuve  $\varphi_0$  vis-à-vis de la distance se traduit très naturellement sur  $f_0$  (figure 8a). Le fait que  $f_2$  possède la propriété [P6] est particulièrement intéressant : il traduit une indépendance de  $f_2$  vis-à-vis de l'échelle (figure 8b). § 6, nous considérons trois méthodes d'évaluation des relations spatiales directionnelles : l'une, dénotée **M2**, est fondée sur l'exploitation des histogrammes de forces générés à partir de  $f_2$  (§ 4). Les résultats spectaculaires obtenus par **M2** s'expliquent par l'indépendance dont nous venons de parler.

**Proposition 5**

$f_0$  possède les propriétés [P1] à [P4] et [P5]. Elle est définie par l'arbre suivant :



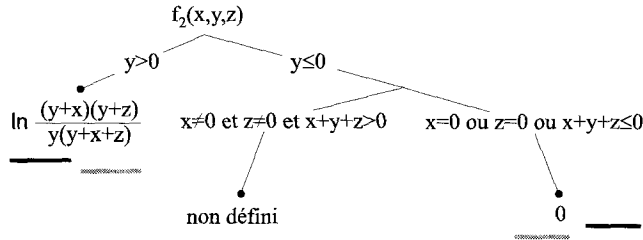
a) Indépendance vis-à-vis de la distance :  $F(\alpha, I, J) = F(\alpha, K, L)$  ([P5])



b) Indépendance vis-à-vis de l'échelle :  $F(\alpha, I, J) = F(\beta, K, L)$  ([P6])  
Figure 8. – Propriétés [P5] et [P6].

**Proposition 6**

$f_2$  possède les propriétés [P1] à [P4] et [P6]. Elle est définie par l'arbre suivant :



Rappelons que pour une fonction  $f$ , un couple de segments sur une droite orientée est un triplet  $(x, y, z)$  de réels (§ 3.2.2) : en particulier,  $x$  est la longueur du segment référent (représenté dans les arbres précédents par un trait noir),  $z$  celle du segment argument (représenté par un trait gris). Comme le montrent bien les propositions 5 et 6, l'expression algébrique qui correspond au traitement d'un couple donné de segments dépend de la position relative de ces segments. Même si nous anticipons là sur le paragraphe § 4, ajoutons que la fonction  $f_0$  étant définie sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  tout entier, les relations spatiales directionnelles auxquelles elle pourra donner naissance seront applicables à tout couple d'objets : autrement dit, tout couple d'objets sera évaluable.  $f_2$  n'autorise par contre que le traitement de segments disjoints : seuls les couples d'objets disjoints seront de ce fait évaluable (un moyen de contourner cette restriction est évoqué à l'annexe 3).

# 4. histogrammes de forces et relations spatiales directionnelles

## 4.1. histogrammes de forces

Posons, pour toute fonction  $F$  de  $T$  vers  $\mathbb{R}_+$  et pour tout couple  $(A, B)$  d'objets :

$$F^{AB} | \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \theta \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)).dv$$

Si  $F^{AB}$  est définie et non nulle sur  $\mathbb{R}$ , si d'autre part  $F$  est définie en  $(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v))$  pour tout couple  $(\theta, v)$  de réels, nous dirons du couple  $(A, B)$  qu'il est *F-évaluable*.  $F^{AB}(\theta)$  représente alors le poids total des arguments émis en faveur de la proposition «  $A$  est dans la direction  $\theta$  de  $B$  ». Une autre interprétation – physique celle-là – peut être donnée à  $F_2^{AB}(\theta)$  (rappelons que  $F_2$  est générée par  $f_2$ , elle-même générée par  $\varphi_2$ ). Nous l'avons amenée § 3.3. Assimilons chaque objet à une surface matérielle homogène de masse spécifique 1 : à une constante multiplicative

près,  $F_2^{AB}(\theta)$  est la résultante scalaire des forces gravitationnelles élémentaires exercées par les points de  $A$  sur ceux de  $B$  et tendant chacune à déplacer  $B$  dans la direction  $\theta$ . Remarquons d'autre part que  $F_0^{AB}$  est au cas continu ce que l'histogramme d'angles associé aux objets  $A$  et  $B$  numérisés est au cas discret : une illustration de cette correspondance, déjà évoquée § 3.3, est donnée § 6 par la figure 13a (la représentation graphique de  $F_0^{AB}$  est marquée **M0**, l'histogramme d'angles **M**). C'est pourquoi nous dirons de la fonction  $F^{AB}$  – lorsque  $(A, B)$  est  $F$ -évaluable – que c'est l'*histogramme de forces* associé à  $(A, B)$  (via  $F$ ). On peut considérer que cet histogramme est le résultat d'une compression de l'ensemble  $\{(\Delta_\theta(v), F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)))\}_{(\theta,v) \in \mathbb{R}^2}$  de données : comme lui (§ 3.1), il est censé représenter la position directionnelle de l'objet  $A$  par rapport à l'objet  $B$ . Les couples d'objets  $F_r$ -évaluable, c'est-à-dire auxquels il est possible d'associer un histogramme de forces (via  $F_r$ ), sont précisés ci-après :

**Proposition 7**

Soit  $r$  un réel positif. Si  $r$  appartient à  $[0; 1[$  tout couple d'objets est  $F_r$ -évaluable. Si  $r$  appartient à  $[1; 2]$ , les couples d'objets  $F_r$ -évaluable sont ceux dont les intérieurs sont disjoints (objets disjoints ou « tangents »). Si  $r$  appartient à  $[2; +\infty[$ , les couples d'objets disjoints sont  $F_r$ -évaluable, les couples d'objets dont les intérieurs sont sécants ne sont pas  $F_r$ -évaluable.

## 4.2. traitement des histogrammes : la fonction H

Un histogramme de forces est une application de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}_+$  périodique de période  $2\pi$ . Pour toute application  $h$  de ce type et pour tout réel  $\alpha$ , notons  $h \oplus \alpha$  la fonction définie par :

$$h \oplus \alpha | [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \theta \mapsto h(\theta + \alpha)$$

C'est un élément de  $App([-\pi, \pi], \mathbb{R}_+)$ , où  $App([-\pi, \pi], \mathbb{R}_+)$  désigne l'ensemble des applications de  $[-\pi, \pi]$  vers  $\mathbb{R}_+$ . Le traitement des histogrammes de forces – pour l'évaluation des relations spatiales directionnelles – est assuré par l'intermédiaire d'une application  $H$  de cet ensemble  $App([-\pi, \pi], \mathbb{R}_+)$  vers  $[0, 1]$ .

**Définition 4**

Soit  $F$  une fonction de  $T$  vers  $\mathbb{R}_+$  et soit  $H$  une application de  $App([-\pi, \pi], \mathbb{R}_+)$  vers  $[0, 1]$ . Considérons la famille  $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  de relations binaires floues définie sur exactement l'ensemble des couples  $(A, B)$   $F$ -évaluable d'objets par :  $\mathcal{R}_\alpha(A, B) = H(F^{AB} \oplus \alpha)$ . Nous dirons de  $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  que c'est la *famille de relations spatiales générée par  $F$  et  $H$* .

**Proposition 8**

Soit  $F$  une fonction de  $T$  vers  $\mathbb{R}_+$ ,  $H$  une application de  $App([-\pi, \pi], \mathbb{R}_+)$  vers  $[0, 1]$ ,  $\mu$  la fonction d'appartenance d'un

sous-ensemble flou « relations spatiales directionnelles entre points » (§ 2.1). Soit enfin  $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  la famille de relations générée par  $F$  et  $H$ .

SI  $F$  possède les propriétés [P10] à [P15] alors il existe une fonction  $f$  qui génère  $F$ .

SI cette fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ ,

SI  $H$  et  $\mu$  se partagent la propriété [P16]

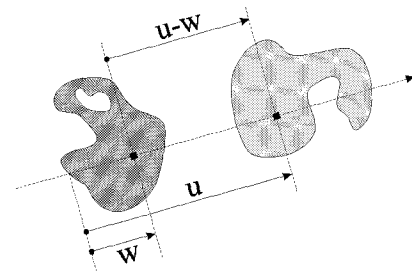
ET SI  $H$  possède les propriétés [P17] à [P18],

ALORS  $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  et  $\mu$  se partagent la propriété [A1] et  $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  possède les propriétés [A2] à [A4].

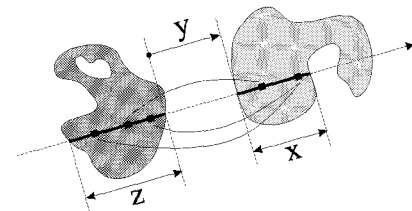
La propriété [P16] est bien sûr à rapprocher de [A1]. La proposition 8 étant donnée, nous sommes enfin en mesure de construire des familles de relations spatiales directionnelles, au sens large décrit § 2.2. La figure 9 récapitule le rôle des différentes fonctions  $\varphi$ ,  $f$ ,  $F$  et  $H$  dans une telle construction. Donnons un exemple. Soit  $\mu$  la fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou « relations spatiales directionnelles entre points ». Pour évaluer les relations entre deux objets rasters  $A$  et  $B$ , K. Miyajima et A. Ralescu [Miy94] normalisent l'histogramme d'angles associé à  $(A, B)$ , puis l'assimilent à un sous-ensemble flou. Ce dernier est ensuite confronté à celui défini par  $\mu$  en utilisant la notion de compatibilité ([Dub80]). Notons  $H_\mu^M$  ( $M$  pour Miyajima) la fonction de traitement des histogrammes ainsi définie. On montre que  $H_\mu^M$  et  $\mu$  se partagent la propriété [P16] et que  $H_\mu^M$  possède les propriétés [P17] et [P18]. En vertu des propositions 3, 4 et 8, la famille de relations générée par  $F_r$  et  $H_\mu^M$  possède donc, pour tout réel  $r$  positif, les propriétés [A2] à [A4]. Et elle se partage avec  $\mu$  la propriété [A1]. Dans le paragraphe § 6 nous mettons en jeu deux familles bien précises de relations spatiales directionnelles : celles générées par  $F_0$  et  $H_\mu^M$ ,  $F_2$  et  $H_\mu^M$ .

## 5. traitement de données rasters et vecteurs

En pratique, un histogramme de forces est représenté par un nombre limité de valeurs : l'ensemble des directions est discrétisé. D'autre part, la structure de données utilisée pour représenter les objets leur confère certaines caractéristiques. La prise en compte de ces caractéristiques, alliée à l'exploitation des propriétés de  $F$  et de la puissance du calcul intégral, permet de développer des algorithmes de calcul très efficaces. Ainsi, le traitement d'un couple évaluable  $(A, B)$  d'objets nets se traduit fondamentalement par un ensemble d'instanciations d'expressions algébriques prédéterminées. Chaque instanciation correspond au traitement d'un couple de trapèzes dans le cas de données vecteurs (figure 11), d'un couple de segments (plus exactement, de paquets de couples de pixels) dans le cas de données rasters (figure 10). Dans

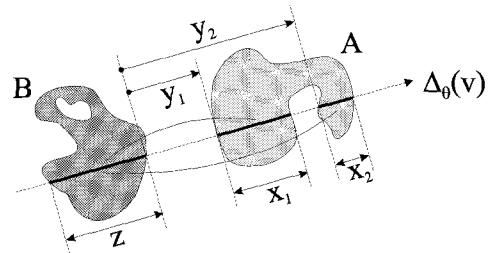


a) Traitement des points (§ 3.2.1) :  $\varphi(u - w)$



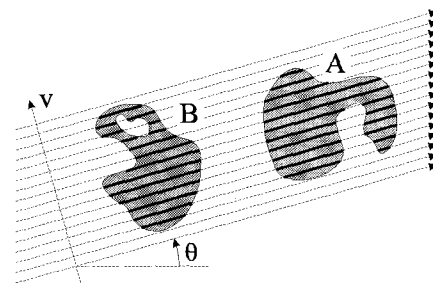
b) Traitement des segments (§ 3.2.2) :

$$f(x, y, z) = \int_{y+z}^{x+y+z} \left( \int_0^z \varphi(u-w) \cdot dw \right) \cdot du$$

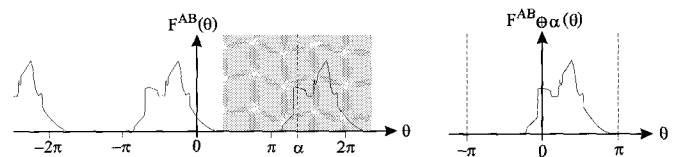


c) Traitement des sections longitudinales (§ 3.2.3) :

$$F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) = f(x_1, y_1, z) + f(x_2, y_2, z)$$



d) Traitement des directions (§ 4.1) :  $F^{AB}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) \cdot dv$



e) Traitement des histogrammes (§ 4.2) :  $\mathcal{R}_\alpha(A, B) = H(F^{AB} \oplus \alpha)$

Figure 9. - Calcul des histogrammes de forces et évaluation des relations spatiales directionnelles. Récapitulatif.



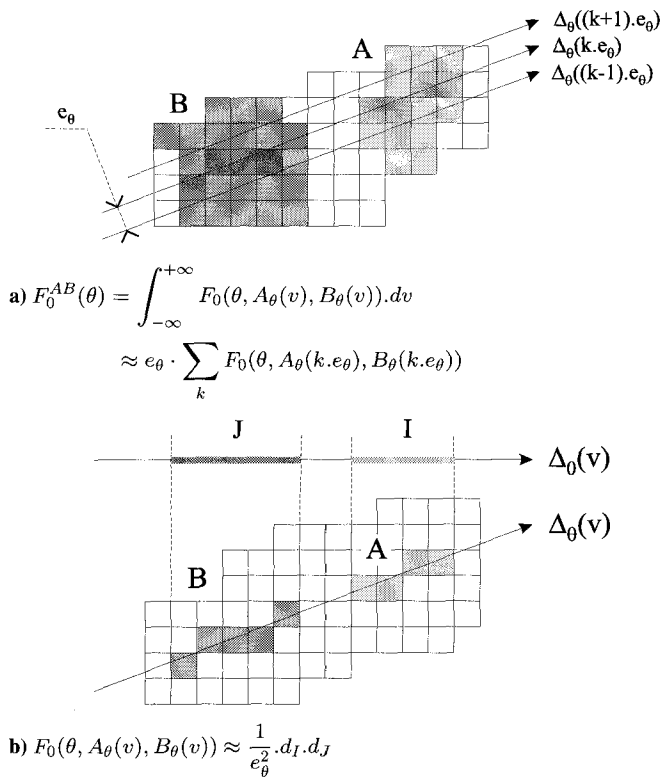


Figure 10. – Evaluation de  $F_0^{AB}(\theta)$  dans le cas de données rasters.

le premier cas, pour toute direction  $\theta$  considérée c'est la valeur exacte de  $F^{AB}(\theta)$  qui est calculée. A cet effet, un partitionnement des objets est effectué : il repose sur le tri des sommets de A et B selon la direction  $\theta + \pi/2$ . Dans le second cas,  $F^{AB}(\theta)$  est approché par une somme de Riemann. Cette approximation traduit un partitionnement des objets qui repose sur le tramage d'un faisceau de droites parallèles à partir de l'algorithme de Bresenham en arithmétique entière ([Rog88]).

## 6. étude comparative et résultats expérimentaux

Dans ce paragraphe, nous comparons trois méthodes d'évaluation de relations spatiales directionnelles. La première, **M**, est celle proposée par K. Miyajima et A. Ralescu dans [Miy94]. Elle repose sur le calcul d'histogrammes d'angles. Les deux autres, **M0** et **M2**, sont des variantes de **M**. Elles sont obtenues en substituant au calcul précédent celui d'histogrammes de forces : histogrammes définis à partir de la fonction  $f_0$  pour **M0**, de la fonction  $f_2$  pour **M2**. Rappelons que  $f_0$  satisfait [P5] et  $f_2$  [P6]. L'objectif ici n'est pas de faire une étude comparative des différentes familles de relations spatiales directionnelles qui ont été proposées dans

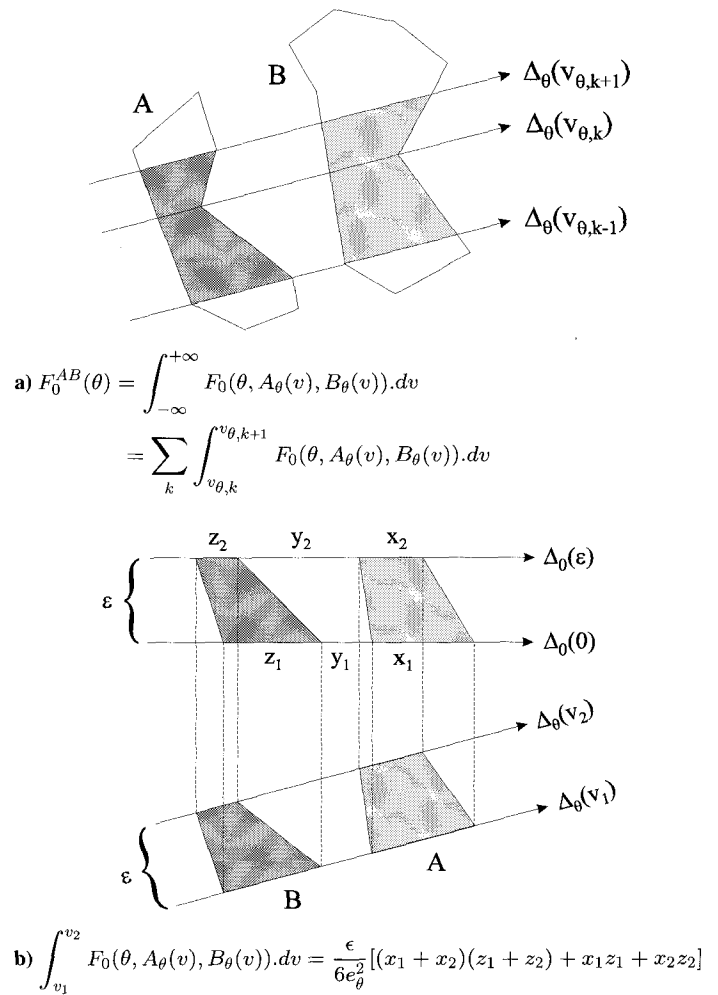


Figure 11. – Evaluation de  $F_0^{AB}(\theta)$  dans le cas de données vecteurs.

la littérature. Notons à ce propos que pour évaluer les relations spatiales entre deux objets, il n'est pas nécessaire de disposer – même implicitement – d'une représentation de la position relative de ces objets ([Blo96]). L'objectif n'est pas non plus d'analyser, défendre ou dénigrer la manière dont les différents types d'histogrammes sont exploités par **M**, **M0** et **M2**. Il s'agit seulement de montrer, *au-delà* du mode d'exploitation choisi, que la notion d'histogramme de forces généralise et supprime celle d'histogramme d'angles.

	méthode M	méthode M0	méthode M2
histogramme	d'angles	de forces $F_0^{AB}$	de forces $F_2^{AB}$
traitement de l'histogramme	par $H_\mu^M$ (§ 4.2) avec $\mu$ telle que ([Miy94]) : $\forall x \in [0, \pi/2], \mu(x) = \cos^2(x)$		

Les images tests 1 à 8 considérées ci-après (page 35) sont toutes des images numériques représentant des objets nets disjoints. La production d'un histogramme d'angles n'est en effet envisageable qu'à partir de données rasters. De plus, le traitement d'objets aux supports non disjoints n'est pas explicitement abordé dans

la littérature. Enfin, la manipulation d'objets flous est toujours ramenée à celle de leurs  $\alpha$ -coupes, qui sont des objets nets (en particulier, on peut démontrer que le schéma de calcul utilisé dans [Miy94] correspond à celui de la simple somme décrit à l'annexe 2). Notons que l'argument est figuré en blanc, le référent en gris. Les résultats, donnés en centièmes, sont généralement similaires pour les méthodes **M** et **M0** (même si le jugement émis par **M0** est systématiquement plus proche de celui qui serait vraisemblablement émis par un être humain). Ce n'est pas surprenant. Les histogrammes produits par **M** et **M0** sont des équivalents théoriques.

Leurs différences (figure 13a) sont essentiellement dues au fait que **M** privilégie les directions horizontales et verticales (figure 12). Notons d'autre part (figure 13) que la forme intrinsèque d'un histogramme d'angles n'apparaît que si une discrétisation suffisamment grossière de l'ensemble des directions est réalisée. Mais évidemment, les courbes obtenues sont alors dessinées au

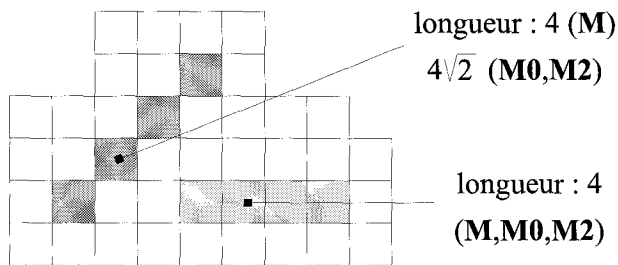
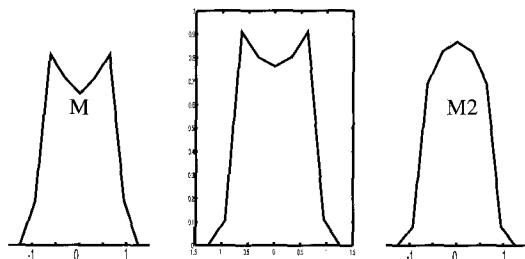
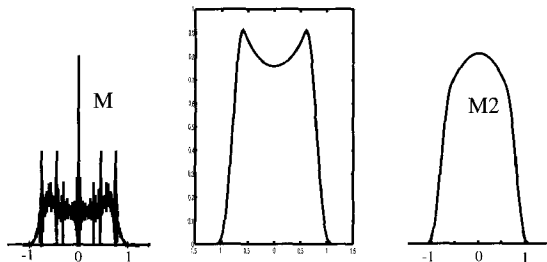


Figure 12. – Isotropie (M0,M2) et anisotropie (M).

Pour **M**, la longueur d'un segment n'est pas sa longueur euclidienne mais le nombre de pixels qui sont utilisés pour le représenter. Un segment diagonal sera donc toujours jugé plus court qu'il ne l'est en réalité, et jouera de ce fait un rôle amoindri dans l'évaluation des relations spatiales.



a) le pas de discrétisation a été fixé à 18 degrés.



b) le pas de discrétisation a été fixé à 1/3 de degré.

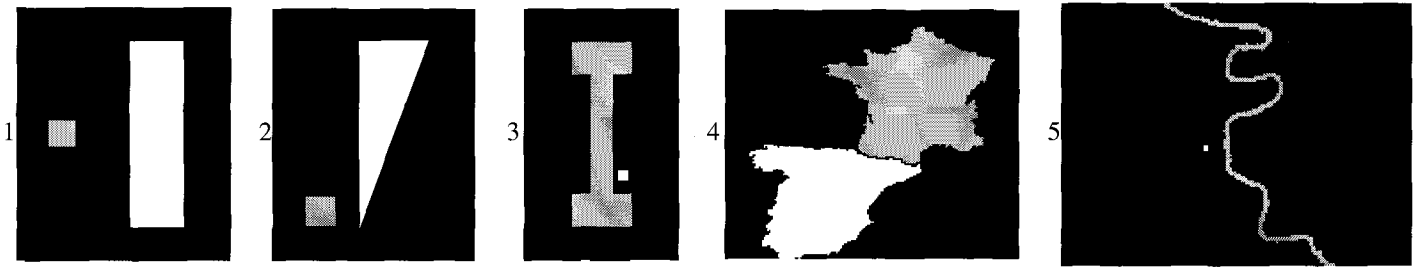
Figure 13. – Histogrammes d'angles (**M**) et de forces (**M0**, **M2**) associés à l'image test 1. Les directions  $\theta$  sont représentées en abscisses (unité le radian).

coureau. **M2**, qui est la seule méthode à prendre explicitement en compte l'information métrique, produit quant à elle des histogrammes bien spécifiques. Lorsque les configurations sont simples et mettent en jeu des objets aux dimensions analogues, ou lorsque l'argument se trouve suffisamment distant du référent, les résultats obtenus par **M2** d'une part, **M** et **M0** d'autre part, sont là aussi comparables. Dans les autres cas, il n'en va plus de même, et le jugement émis par **M2** apparaît systématiquement beaucoup plus adéquat.

La complexité maximale théorique en temps de la méthode **M** est  $\mathcal{O}(n^2)$  – où  $n$  désigne le nombre de pixels de l'image traitée –, celle des méthodes **M0** et **M2** est  $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$  (le traitement de données vecteurs pour la constitution d'histogrammes de forces est quant à lui de complexité  $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$  – où  $n$  désigne cette fois le nombre total de sommets des objets). En pratique, même pour une image très bruitée d'objets très tourmentés, de nombreux couples de pixels peuvent être traités par paquets et les méthodes **M0** et **M2** sont beaucoup plus efficaces que **M**. Le temps de calcul d'un histogramme de forces est évidemment proportionnel au nombre de directions considérées. Des tests effectués sur un panel de configurations ont montré qu'il est judicieux de fixer le pas de discrétisation entre 2 et 3 degrés. Les différentes méthodes ont été implémentées en langage C sur une Sparc 4 à 100MHz, sans souci prononcé d'optimisation. L'image 4 par exemple –  $170 \times 160$  pixels – a été traitée par les méthodes **M0/M2** et **M** en respectivement environ 3 et 141 secondes CPU. Et l'image homothétique de  $2 \times 170 \times 160$  pixels en environ 6 secondes ( $2 \times 3$ ) par **M0/M2**, 560 secondes ( $2^2 \times 141$ ) par **M**!

## 7. conclusion

Comment représenter la position relative d'objets 2D? Dans cet article, nous avons introduit la notion originale d'histogramme de forces. Elle généralise et supplante celle d'histogramme d'angles habituellement utilisée. Nous avons examiné tout particulièrement deux types extrêmes d'histogrammes de forces. L'un néglige totalement l'information métrique : la notion d'histogramme de forces rejoint alors celle d'histogramme d'angles, tout en s'affranchissant de ses faiblesses (traitements coûteux, et uniquement de données rasters, anisotropie, etc.). L'autre prend fortement en compte l'information métrique : devant certaines configurations, seuls les histogrammes de ce type restent de bonnes représentations de positions relatives d'objets. L'histogramme de forces constitue un puissant outil de représentation, ayant de nombreuses applications potentielles. Diverses façons de l'exploiter, notamment pour la définition de relations spatiales directionnelles en meilleure adéquation avec la perception humaine, peuvent d'ores et déjà être puisées telles quelles dans la littérature.



	1			2			3			4			5		
	M	M0	M2	M	M0	M2	M	M0	M2	M	M0	M2	M	M0	M2
droite	77	77	82	33	41	64	26	38	58	09	13	19	03	03	02
gauche	00	00	00	00	00	00	02	05	07	48	47	40	41	51	75
dessus	24	21	18	68	60	40	56	56	48	00	00	01	45	37	21
dessous	24	21	18	05	05	05	84	67	33	53	55	65	71	59	28



	6			7			8		
	M	M0	M2	M	M0	M2	M	M0	M2
droite	11	11	10	78	57	31	94	71	32
gauche	11	11	10	11	11	10	11	11	10
dessus	00	00	00	00	00	00	00	00	00
dessous	89	89	91	29	51	75	09	36	74

**ANNEXE 1 : liste des propriétés**

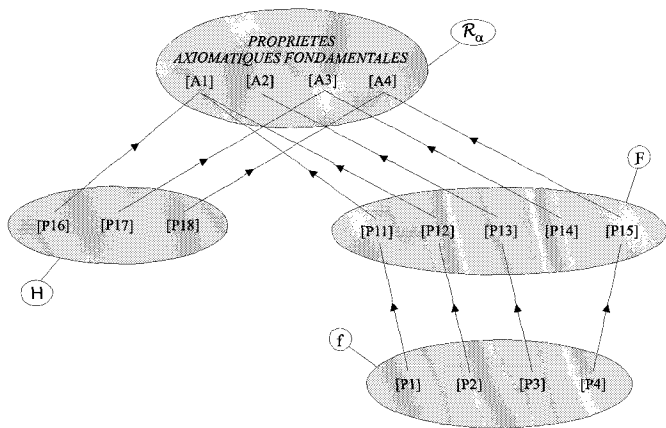


Figure 14. – Principaux liens entre les propriétés [P1] à [P18].

Les propriétés [P1] à [P8] sont définies pour toute fonction  $f$  de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  vers  $\mathbb{R}_+$  (§ 3.2.2).

[P1]  $f$  est définie et nulle sur

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ / x + y + z < 0\}$$

[P2]  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$  et ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+^3$ . De plus :  $\forall (x_1, x_2, y, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ ,  $f(x_1 + x_2, y, z) = f(x_1, y, z) + f(x_2, x_1 + y, z)$

[P3] Soit  $(x, y, z)$  un élément de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ . Si  $f$  est définie en  $(x, y, z)$  alors elle l'est en  $(z, y, z)$  et :  $f(z, y, x) = f(x, y, z)$

[P4] Il existe une application  $g$  de  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}$  telle que pour tout élément  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  et pour tout élément  $k$  de  $\mathbb{R}_+^*$ , si  $f$  est définie en  $(x, y, z)$  alors elle l'est en  $(kx, ky, kz)$  et :  $f(kx, ky, kz) = g(k) \cdot f(x, y, z)$

[P5] Soit  $(x, y_1, y_2, z)$  un élément de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ . Si  $f$  est définie en  $(x, y_1, z)$  alors elle l'est en  $(x, y_2, z)$  et :  $f(x, y_2, z) = f(x, y_1, z)$

[P6] Soit  $(x, y, z)$  un élément de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$  et  $k$  un élément de  $\mathbb{R}_+^*$ . Si  $f$  est définie en  $(x, y, z)$  alors elle l'est en  $(kx, ky, kz)$  et :  $f(kx, ky, kz) = f(x, y, z)$

[P7] Il existe un réel strictement positif  $y_0$  tel que pour tout élément  $(x, y_1, y_2, z)$  de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ , si  $f$  est définie en  $(x, y_1, z)$  alors elle l'est en  $(x, y_2, z)$  et :  $(x + y_1 + z < y_0$  et  $x + y_2 + z < y_0) \Rightarrow f(x, y_2, z) = f(x, y_1, z)$

[P8] Il existe un réel strictement positif  $y_0$  tel que pour tout élément  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$  et pour tout élément  $k$  de

$\mathbf{R}_+^*$ , si  $f$  est définie en  $(x, y, z)$  alors elle l'est en  $(kx, ky, kz)$  et :  $(ky > y_0 \text{ et } y > y_0) \Rightarrow f(kx, ky, kz) = f(x, y, z)$

La propriété [P9] exprime un lien entre une fonction  $f$  de  $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$  vers  $\mathbf{R}_+$  et une fonction  $F$  de  $T$  vers  $\mathbf{R}_+$ . Les propriétés [P10] à [P15] sont définies pour toute fonction  $F$  de  $T$  vers  $\mathbf{R}_+$  (§ 3.2.3).

[P9] Soit  $\theta$  un réel,  $I$  et  $J$  deux segments tels que  $(\theta, I, J)$  appartienne à  $T$ .  $F$  est définie en  $(\theta, I, J)$  ssi  $f$  est définie en  $(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J)$ . Et dans ce cas :  $F(\theta, I, J) = f(d_I, D_{IJ}^\theta, d_J)$

[P10] Soit  $(\theta, I, J)$  un élément de  $T$ . Il existe un ensemble  $\{I_i\}_{i \in 1..n}$  de segments deux à deux disjoints, et un seul, tel que :  $I = \cup_{i \in 1..n} I_i$ . De même, il existe un ensemble  $\{J_j\}_{j \in 1..m}$  de segments deux à deux disjoints, et un seul, tel que :  $J = \cup_{j \in 1..m} J_j$ .  $F$  est définie en  $(\theta, I, J)$  ssi elle l'est en  $(\theta, I_i, J_j)$  pour tout élément  $i$  de  $1..n$  et pour tout élément  $j$  de  $1..m$ . Et dans ce cas :

$$F(\theta, I, J) = \sum_{i \in 1..n} \sum_{j \in 1..m} F(\theta, I_i, J_j).$$

[P11] Soit  $\theta$  un réel,  $I$  et  $J$  deux segments disjoints non dégénérés tels que  $(\theta, I, J)$  appartienne à  $T$ .  $F$  est définie en  $(\theta, I, J)$ . De plus,  $F$  prend une valeur non nulle en  $(\theta, I, J)$  si et seulement si il existe un élément  $(M, N)$  de  $I \times J$  tel que  $M$  soit dans la direction  $\theta$  de  $N$  :  $F(\theta, I, J) \neq 0 \Leftrightarrow (\exists (M, N) \in I \times J / \angle(\vec{i}, N\vec{M}) \equiv \theta [2\pi])$ .

[P12] Soit  $(\theta, I', J')$  un élément de  $T$ ,  $I$  et  $J$  deux segments disjoints tels que  $(\theta, I, J)$  appartienne à  $T$ . Si  $I'$  et  $J'$  sont inclus respectivement dans  $I$  et  $J$  alors  $F$  est définie en  $(\theta, I', J')$  et :  $F(\theta, I', J') \leq F(\theta, I, J)$

[P13] Soit  $(\theta, I, J)$  un élément de  $T$ . Si  $F$  est définie en  $(\theta, I, J)$  alors elle l'est en  $(\theta + \pi, J, I)$  et :

$$F(\theta + \pi, J, I) = F(\theta, I, J)$$

[P14] Soit  $(\theta, I, J)$  un élément de  $T$ ,  $sym$  une symétrie orthogonale d'axe  $\Delta_\beta(v)$ . Si  $F$  est définie en  $(\theta, I, J)$  alors elle l'est en  $(2\beta - \theta, sym(I), sym(J))$  et :

$$F(2\beta - \theta, sym(I), sym(J)) = F(\theta, I, J)$$

[P15] Il existe une application  $G$  de  $\mathbf{R}_+^*$  vers  $\mathbf{R}_+$  telle que pour tout élément  $(\theta, I, J)$  de  $T$  et pour toute homothétie  $hom$  de rapport  $k$  strictement positif, si  $F$  est définie en  $(\theta, I, J)$  alors elle l'est en  $(\theta, hom(I), hom(J))$  et  $F(\theta, hom(I), hom(J)) = G(k).F(\theta, I, J)$

La propriété [P16] exprime un lien entre une application  $H$  de  $App([-\pi, \pi], \mathbf{R}_+)$  vers  $[0, 1]$  et une application  $\mu$  de  $\mathbf{R}$  vers  $[0, 1]$ . Les propriétés [P17] et [P18] sont définies pour toute application  $H$  de  $App([-\pi, \pi], \mathbf{R}_+)$  vers  $[0, 1]$  (§ 4.2).

[P16]  $\forall \delta \in \mathbf{R}, \forall \eta \in \mathbf{R}_+^*, \exists \epsilon \in ]0, \pi[ / \forall h \in App^*([-\pi, \pi], \mathbf{R}_+), (\bar{h}|_{[\delta-\pi, \delta-\epsilon] \cup [\delta+\epsilon, \delta+\pi]} \equiv 0 \Rightarrow |H(h) - \mu(\delta)| < \eta)$   
 $App^*([-\pi, \pi], \mathbf{R}_+)$  désigne l'ensemble  $App([-\pi, \pi], \mathbf{R}_+)$  privé de l'application nulle et  $\bar{h}$  désigne la fonction définie

sur  $\mathbf{R}$ , périodique de période  $2\pi$ , dont la restriction à  $[-\pi, \pi]$  est  $h$ . On s'intéresse au cas où  $\bar{h}$  est nulle sur  $[\delta - \pi, \delta - \epsilon] \cup [\delta + \epsilon, \delta + \pi]$ , c'est-à-dire au cas où  $\bar{h}$  se « concentre » de la valeur  $\delta$ .

[P17]  $\forall (h_1, h_2) \in App([-\pi, \pi], \mathbf{R}_+)^2, \{\forall \theta \in [-\pi, \pi], h_1(-\theta) = h_2(\theta)\} \Rightarrow H(h_1) = H(h_2)$

[P18]  $\forall (h_1, h_2) \in App([-\pi, \pi], \mathbf{R}_+)^2, \{\exists K \in \mathbf{R}_+^* / h_1 = K.h_2\} \Rightarrow H(h_1) = H(h_2)$

## ANNEXE 2 : traitement d'objets flous

### Définition 5

Un objet flou est un sous-ensemble flou  $E$  du plan dont toute  $\alpha$ -coupe  $E^\alpha$ , avec  $\alpha$  élément de  $]0, 1]$ , est un objet net. Soit  $E$  un objet flou et  $\theta$  et  $v$  deux réels :  $E \cap \Delta_\theta(v)$  est un sous-ensemble flou du plan noté  $E_\theta(v)$  et appelé section longitudinale de  $E$ .

Le traitement d'objets nets pour la constitution d'histogrammes de forces peut facilement s'étendre aux objets flous. Considérons une fonction  $F$  définie pour le traitement de sections longitudinales d'objets nets. Soit  $n$  un entier positif non nul et  $(\alpha_i)_{i \in 1..n+1}$  une suite strictement décroissante de réels telle que :  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_{n+1} = 0$ . Soit  $(A, B)$  un couple d'objets flous dont les fonctions d'appartenance prennent leurs valeurs dans  $\{\alpha_i\}_{i \in 1..n+1}$ . Comment associer à  $(A, B)$  un histogramme de forces? Ramener le traitement de sous-ensembles flous à celui de leurs  $\alpha$ -coupes est une démarche courante. De nombreux procédés ont été exposés dans la littérature. La question posée peut par exemple trouver sa réponse dans l'un des schémas de calcul décrits ci-dessous. Ils dérivent directement de schémas génériques proposés l'un par D.Dubois et M.C.Jaulent [Dub87], l'autre par R.Krishnapuram et al. [Kri93].  $m_i$  désigne, pour tout élément  $i$  de  $1..n$ , la différence  $\alpha_i - \alpha_{i+1}$ .

### Le schéma de la double somme

$$F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j F(\theta, (A_\theta(v))^{\alpha_i}, (B_\theta(v))^{\alpha_j}) \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j F(\theta, (A^{\alpha_i})_\theta(v), (B^{\alpha_j})_\theta(v))$$

Il est facile d'en déduire que :

$$F^{AB} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j F^{A^{\alpha_i} B^{\alpha_j}}$$

### Le schéma de la simple somme

$$F(\theta, A_\theta(v), B_\theta(v)) = \sum_{i=1}^n m_i F(\theta, (A_\theta(v))^{\alpha_i}, (B_\theta(v))^{\alpha_i}) \\ = \sum_{i=1}^n m_i F(\theta, (A^{\alpha_i})_\theta(v), (B^{\alpha_i})_\theta(v))$$

Nous avons cette fois :  $F^{AB} = \sum_{i=1}^n m_i F^{A^{\alpha_i} B^{\alpha_i}}$

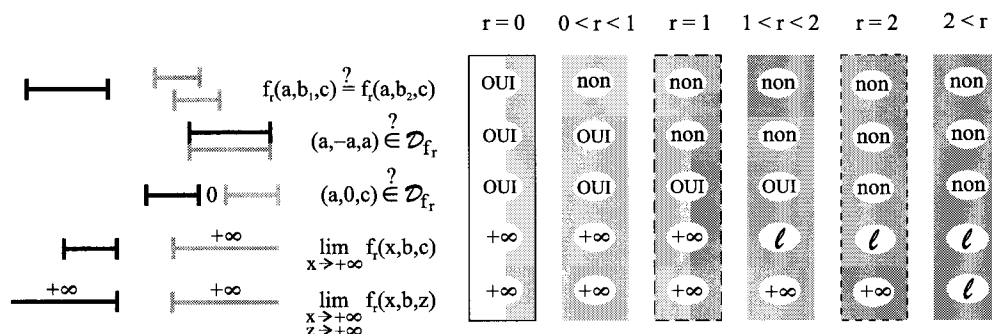


Figure 15. – Répartition des fonctions  $f_r$  en six classes.  $a, b, b_1, b_2, c$  désignent des réels strictement positifs.  $\mathcal{D}_{f_r}$  désigne le domaine de définition de  $f_r$ .

### ANNEXE 3 : vers une prise en compte explicite et modulable de l'information métrique

Les objets nets peuvent être des  $\alpha$ -coupes d'objets flous produits par une segmentation floue. Il faut donc accepter qu'ils puissent ne pas être disjoints. Comme nous l'avons vu (proposition 6),  $f_2$  reste insensible aux changements d'échelle. Malheureusement,  $f_2$  n'autorise que la manipulation d'objets disjoints. Considérons alors les propriétés [P7] et [P8]. Ce sont des versions affaiblies respectivement de [P5] et [P6] : [P7] exprime une indépendance vis-à-vis de la distance *en deçà* d'un certain seuil  $y_0$ , [P8] vis-à-vis de l'échelle *au-delà* d'un certain seuil  $y_0$ . Il est facile de trouver des applications  $f$  vérifiant [P1] à [P3] et [P8]. Nous pouvons même contraindre  $f$  à satisfaire simultanément [P7]. Il suffit par exemple d'adopter comme fonction génératrice la fonction  $\varphi$  définie de la façon suivante, où  $y_0$  désigne un réel strictement positif :

$$\forall d \in \mathbb{R}_+^*, (d \leq y_0 \Rightarrow \varphi(d) = \varphi_0(d))$$

$$\text{et } (y_0 < d \Rightarrow \varphi(d) = y_0^2 \cdot \varphi_2(d))$$

La fonction  $F$  associée ne possède plus la propriété [P15], et [A4] n'est donc plus garantie. Il existe un moyen simple de remédier à ce problème, mais nous ne développerons pas ce point ici. Notons simplement que  $\varphi$  est définie à partir des  $\varphi_r$ . En attribuant ainsi à ces dernières le rôle de fonctions génératrices de référence, nous jetons le principe même d'une prise en compte explicite et modulable de l'information métrique. Une telle prise en compte exige évidemment d'avoir à l'esprit les propriétés que les  $\varphi_r$  induisent sur les  $f_r$ . Le choix de  $\varphi$  peut par exemple s'opérer en répondant à des questions telles que : « les objets considérés sont-ils susceptibles de se chevaucher? » (figure 15 / ligne 2), « ou tout au moins d'être en contact? » (figure 15 / ligne 3), « peuvent-ils être étendus? » (figure 15 / lignes 4 et 5)...

### BIBLIOGRAPHIE

- [Blo96] I. Bloch, "Fuzzy relative position between objects in images : a morphological approach, ICIP'96, Lausanne, Vol. II, 987-990, 1996.
- [Dub87] D.Dubois, M.C.Jaulent, "A general approach to parameter evaluation in fuzzy digital pictures", *Pattern Recognition Letters* 6, pp.251-259, 1987.

- [Dub80] D.Dubois, H. Prade, "Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications", *Mathematics in science and engineering*, vol 144, pp40, 1980.
- [Fre75] J.Freeman, "The modelling of spatial relations", *Computer Graphics and Image Processing*, vol.4, pp.156-171, 1975.
- [Kel90] J.M. Keller, L. Sztandera, "Spatial relations among fuzzy subsets of an image", *Proc. of the First Int. Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis*, College Park, University of Maryland, pp.207-211, 1990.
- [Kel95] J.M. Keller, X. Wang, "Comparison of spatial relation definitions in computer vision", *ISUMA-NAFIPS'95*, College Park MD, pp.679-684, 1995.
- [Kel96] J.M. Keller, X. Wang, "Learning Spatial Relationships in Computer Vision", *FUZZ-IEEE*, 1996.
- [Koc88] L. T. Kõczy, "On the description of relative position of fuzzy patterns", *Pattern Recognition Letters* 8, pp21-28, 1988.
- [Kri93] R.Krishnapuram, J.M.Keller, Y.Ma, "Quantitative analysis of properties and spatial relations of fuzzy image regions", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol.1, no.3, pp.222-233, 1993.
- [Mat98] P.Matsakis, "Relations spatiales structurelles et interprétation d'images", Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse III, janvier 1998.
- [Miy94] K.Miyajima, A.Ralescu, "Spatial organization in 2D segmented images : representation and recognition of primitive spatial relations", *Fuzzy Sets and Systems*, vol.65, iss.2/3, pp.225-236, 1994.
- [Peu87] D.J.Peuquet, Z.CI-Xiang, "An algorithm to determine the directional relationship between arbitrarily-shaped polygons in the plane", *Pattern Recognition*, vol.20, no.1, pp.65-74, 1987.
- [Ret88] G.Retz-Schmidt, "Various Views on Spatial Prepositions", *AI Magazine* 9, pp.95-105, 1988.
- [Rog88] D.F.Rogers, *Algorithmes pour l'infographie*, McGraw-Hill, Paris, 1988.
- [Ros82] A.Rosenfeld, A.C.Kak, *Digital picture processing*, vol.2, Academic Press, pp.263-264, 1982.
- [Ros85] A. Rosenfeld, R. Klette, "Degree of adjacency and surroundedness", *Pattern Recognition*, vol. 18, pp. 169-177, 1985.
- [Wen97] L. Wendling, J. Desachy, "Isomorphism between Strong Fuzzy Relational Graphs based on k-formulae", Workshop Graph Based Representation, IAPR, à paraître dans *Lecture Notes in Computer Advances*, 1997.
- [Win75] P.H.Winston, *The psychology of computer vision*, McGraw-Hill, New York, 1975.
- [Wor95] M.F.Worboys, *GIS - A computing perspective*, Taylor & Francis, 1995.

Manuscrit reçu le 5 décembre 1996.

## Représentation de la position relative d'objets 2D

### LES AUTEURS

#### Pascal MATSAKIS



Pascal Matsakis est titulaire d'une licence de mathématiques et docteur en informatique. De 1995 à 1997, il est ingénieur recherche et développement de la société CRIL Ingenierie. Actuellement ATER à l'UPS (Université Paul Sabatier, Toulouse III), il travaille au sein du département TCI (Traitement et Compréhension d'Images) de l'IRIT (Institut de Recherche en Informatique de Toulouse). Ses principaux centres d'intérêt et travaux de recherche portent sur l'analyse d'images satellitaires, la reconnaissance des formes et l'intelligence artificielle.

#### Laurent WENDLING



Laurent Wendling est titulaire d'un ingénieur en intelligence artificielle, reconnaissance des formes et robotique et d'un doctorat en informatique. Il est actuellement ATER à l'Université Paul Sabatier. Ses axes de recherche concernent l'intégration et le développement de méthodes de théorie des graphes dans le cadre de la reconnaissance des formes.

#### Jacky DESACHY



Jacky Desachy est professeur à l'Université Paul Sabatier. Il est directeur de l'équipe TCI (Traitement et Compréhension d'Images) à l'IRIT (Institut de Recherche en Informatique de Toulouse).