

# La notion de localisation dans le plan temps-fréquence

## Remarks on the notion of time-frequency localization

par Patrick FLANDRIN

Ecole Normale Supérieure de Lyon Laboratoire de Physique (Umr 5672 Cnrs)  
46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07. Courriel : flandrin@physique.ens-lyon.fr

### *résumé et mots clés*

L'idée de représentation temps-fréquence d'un signal est en général associée à celle d'une forme de localisation dans le plan. Ce point de vue se heurte à un certain nombre de limites qui sont autant de façons d'exprimer des relations d'incertitude entre le temps et la fréquence. Dans le cas de signaux « chirps », des représentations adaptées peuvent néanmoins se localiser de façon très précise sur des courbes spécifiques du plan, la construction de telles représentations pouvant se faire sur la base d'arguments essentiellement géométriques. Décrire un signal conjointement en temps et en fréquence permet en corollaire d'interpréter les courbes sur lesquelles la représentation se localise en termes de « fréquences instantanées ».

Analyse temps-fréquence, signaux modulés, localisation, symétries.

### *abstract and key words*

The idea behind a time-frequency representation is often connected with that of some form of localization in the plane. This point of view is faced with a number of limitations, which all express in some way uncertainty relations between time and frequency. In the case of « chirps », there exist however adapted representations which can localize very accurately on specific curves of the plane, and whose construction can be merely justified on the basis of geometric arguments. As a corollary, such joint descriptions, in both time and frequency, allow for an interpretation of the corresponding localization curves in terms of « instantaneous frequencies ».

Time frequency analysis, chirps, localization, symmetries.

« Je cherche en même temps l'éternel et l'éphémère ».  
G. Percé

## 1. introduction

En 1955 paraît un article fondamental, signé par A. Blanc-Lapierre et B. Picinbono, sur « la notion de spectre instantané de puissance » [5]. On y trouve une réflexion critique sur le paysage encore assez désert d'un domaine peu exploré (penser conjointement en termes de temps et de fréquence), et une exposition très claire des grandes interrogations qui resteront à la base de la plupart des recherches conduites sur ce thème depuis. Parmi elles, l'idée même de pouvoir rendre la notion de fréquence dépendante du temps est évoquée de façon très

explicite, soulignant la « contradiction interne » de toute tentative de définition d'une *fréquence instantanée* [5, page 18] :

« L'expression de *fréquence instantanée* contient, en quelque sorte, une contradiction interne : la fréquence n'est parfaitement définie que pour un signal exactement *sinusoïdal* mais alors elle n'est pas *instantanée* mais *éternelle*. »

Faisant écho (par anticipation) à la phrase de G. Percé mise en exergue, partir à la recherche de « l'inaccessible fréquence instantanée » (selon les termes d'Y. Meyer [11, Préface]) s'apparente ainsi à vouloir concilier l'inconciliable et – sauf à déclarer la question indigne d'intérêt et le débat clos avant d'être ouvert –, plusieurs voies sont possibles. La première se situe dans le droit fil

de travaux comme ceux de J. Ville [34] autour de l'idée de signal analytique, et consiste à chercher une définition mathématique non ambiguë d'une fonction fréquentielle du temps, en accord raisonnable avec l'intuition physique. La deuxième (dont J. Ville se trouve être encore l'un des premiers instigateurs) consiste à chercher, plutôt qu'une extension unidimensionnelle, un substitut bidimensionnel à la fréquence de Fourier. Offrant ainsi à un signal la possibilité de se déployer dans un plan temps-fréquence, la notion de fréquence(s) instantanée(s) peut s'envisager comme un corollaire de la description mixte, en termes de localisation sur une (des) trajectoire(s) du plan. Quoique le premier point de vue ait connu récemment des développements nouveaux et intéressants [23,27,29,33], nous nous placerons ici dans la deuxième perspective, choisissant de privilégier l'approche conjointe et d'en discuter les capacités de localisation sur des courbes interprétables *a posteriori* en termes d'évolution fréquentielle.

## 2. temps et fréquence

Sous sa forme temporelle, qui est généralement première pour l'analyse, la représentation  $x(t)$  d'un signal privilégie une description en termes d'occurrence d'événements. De façon duale, la représentation de Fourier  $X(\omega)$  du même signal, définie par<sup>1</sup>

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt,$$

met prioritairement l'accent sur des fréquences constitutives, mais sans localisation dans le temps et, qui plus est, sans nécessaire lien avec une réalité physique sous-jacente. On peut à cet égard rappeler la citation bien connue de J. Ville [34] :

« Si nous considérons en effet un morceau [de musique] contenant plusieurs notes (ce qui est le moins qu'on puisse demander) et qu'une note, *la* par exemple, figure une fois dans le morceau, l'analyse harmonique [de Fourier] nous présentera la fréquence correspondante avec une certaine amplitude et une certaine phase, sans localiser le *la* dans le temps. Or, il est évident qu'au cours du morceau il est des instants où l'on n'entend pas le *la*. La représentation est néanmoins mathématiquement correcte, parce que les phases des notes voisines du *la* sont agencées de manière à détruire cette note par interférence lorsqu'on ne l'entend pas et à la renforcer, également par interférence, lorsqu'on l'entend; mais s'il y a dans cette conception une habileté qui honore l'analyse mathématique, il ne faut pas se dissimuler qu'il y a également une défiguration de la réalité : en effet, quand on n'entend pas le *la*, la raison véritable est que le *la* n'est pas émis. »

1. On adoptera la convention d'utiliser des lettres minuscules pour désigner des grandeurs temporelles et les majuscules correspondantes pour leurs transformées de Fourier. On exprimera par ailleurs ces dernières en fonction de la *pulsation*  $\omega = 2\pi f$ , la variable  $f$  étant la fréquence proprement dite.

Ainsi, quoique la représentation de Fourier fournisse une description mathématique particulièrement intéressante dans nombre de cas (oscillations entretenues, vibrations en régime permanent, ...), elle trouve naturellement ses limites d'interprétation dès lors que les signaux analysés contiennent des événements transitoires, des changements brusques, des évolutions de leur contenu spectral, ... en bref des caractéristiques que l'usage commun qualifie, de façon qualitative, de « non-stationnarités ». Plutôt alors que de se satisfaire de deux descriptions partiellement adaptées et mutuellement exclusives d'une même réalité, la tentation est naturelle de chercher à les placer dans un cadre plus général qui à la fois permette de donner à la notion de fréquence une possibilité d'évolution temporelle, et de concilier description mathématique et interprétation physique. C'est l'objet de l'analyse temps-fréquence [10, 11, 12, 22].

### 2.1. des analyses à fenêtre ...

La façon la plus simple d'introduire une dépendance temporelle dans la représentation spectrale de Fourier est de la rendre « locale » en l'appliquant, non pas au signal tout entier, mais à des segments de celui-ci prélevés séquentiellement à l'aide d'une fenêtre glissante  $h(t)$ . La représentation résultante, appelée transformée de Fourier à court-terme, s'écrit

$$F_x^{(h)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \overline{h(s-t)} e^{-i\omega(s-t/2)} ds, \quad (1)$$

mettant l'accent sur une interprétation « active en temps » (par application de la fenêtre) et « passive en fréquence » (les propriétés spectrales de la transformée, par exemple sa résolution, découlant du choix fait dans le domaine temporel).

Une forme duale mais strictement équivalente, « active en fréquence » et « passive en temps », peut être obtenue en réécrivant (1) sous la forme

$$F_x^{(h)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) \overline{H(\xi-\omega)} e^{it(\xi-\omega/2)} \frac{d\xi}{2\pi}, \quad (2)$$

privilégiant cette fois une interprétation en termes de déroulement d'une histoire temporelle en sortie d'un banc de filtres.

Une troisième forme, encore équivalente, consiste à ne privilégier ni le temps ni la fréquence dans la lecture du plan et à écrire

$$F_x^{(h)}(t, \omega) = \langle x, h_{t,\omega} \rangle, \quad (3)$$

expression dans laquelle

$$h_{t,\omega}(s) := h(s-t) e^{i\omega(s-t/2)} \quad (4)$$

est un « atome » temps-fréquence (i.e., un signal raisonnablement localisé en temps et en fréquence) et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel de  $L^2(\mathbb{R})$ . Dans cette interprétation, la transformée  $F_x^{(h)}(t, \omega)$  mesure essentiellement un degré de ressemblance entre le signal

analysé et une batterie de signaux analysants, tous déduits d'une brique de base unique par translation en temps et en fréquence vers le point d'intérêt.

Dans la limite d'une fenêtre infiniment étroite en temps ( $h(t) \rightarrow \delta(t)$ ) ou infiniment étroite en fréquence ( $H(\omega) \rightarrow \delta(\omega)$ ), les représentations (1) et (2) tendent vers le signal lui-même ou vers son spectre, respectivement. Cependant, si une localisation parfaite de l'atome analysant (4) est possible relativement à la variable de temps ou de fréquence, c'est évidemment au détriment de l'autre variable, tout signal  $h(t)$  vérifiant l'inégalité (dite aussi « relation d'incertitude » [15])

$$\inf_{t_0, \omega_0} \|(t - t_0) h\|_2 \|\omega - \omega_0\|_2 \geq \frac{1}{2}, \quad (5)$$

avec  $\|h\|_2^2 = \langle h, h \rangle$  et égalité si et seulement si  $h(t)$  est une gaussienne.

## 2.2. ... à Wigner-Ville

Quelle que soit l'interprétation choisie, la nécessité de recourir à une fenêtre, un filtre ou un atome temps-fréquence introduit dans la représentation correspondante une part d'arbitraire, couplant de manière étroite des propriétés intrinsèques du signal analysé à des caractéristiques propres au système qui l'analyse. Un atome temps-fréquence ne pouvant – d'après (5) – être parfaitement localisé en un point du plan, le choix est généralement fait de recourir à l'analyse la plus « neutre » possible, i.e., à encombrement proche du minimum donné par (5), et sans directionnalité privilégiée dans le plan. La contrepartie de cette neutralité supposée est d'être inadaptée par principe à toutes les situations pour lesquelles une (ou des) fréquence(s) évolue(nt) au cours du temps, l'intuition suggérant alors de faire usage d'atomes portant en eux-même une structure de phase qui soit localement adaptée à celle du signal. La façon la plus simple d'aller dans cette direction est de s'inspirer de la technique bien connue du *filtrage adapté* et de prendre pour fenêtre d'analyse l'image retournée dans le temps du signal analysé. Appliquant ce principe, il est immédiat de constater que l'on aboutit à la représentation

$$F_x^{(x-)}(t, \omega) = \frac{1}{2} W_x \left( \frac{t}{2}, \frac{\omega}{2} \right), \quad (6)$$

où  $W_x(t, \omega)$  n'est autre que la *distribution de Wigner-Ville* [24, 34, 35]

$$W_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left( t + \frac{\tau}{2} \right) \overline{x \left( t - \frac{\tau}{2} \right)} e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (7)$$

La définition de la distribution de Wigner-Ville trouve ainsi une justification simple en termes d'analyse « à fenêtre », avec comme conséquence la propriété de localisation :

$$x(t) = \{i(\omega_0 t + \alpha t^2/2)\} \Rightarrow W_x(t, \omega) = \delta(\omega - (\omega_0 + \alpha t)), \quad (8)$$

généralisation aux phases *quadratiques* de la propriété de localisation de la transformation de Fourier pour les phases *linéaires* :

$$x(t) = \{i\omega_0 t\} \Rightarrow X(\omega) = \delta(\omega - \omega_0). \quad (9)$$

Cette propriété appelle quelques commentaires. En première lecture (et c'est celle-ci que l'on trouve le plus souvent dans la littérature), il s'agit d'une propriété de localisation parfaite pour les « chirps » linéaires, i.e., les signaux dont la fréquence instantanée varie linéairement dans le temps. Il y a en fait là un abus de langage, dans la mesure où l'exponentielle complexe de (8) ne saurait être un signal analytique [26, 27, 28], condition nécessaire pour que la dérivée de sa phase puisse s'interpréter comme une fréquence instantanée au sens usuel. La deuxième lecture se contente alors de stipuler – mais c'est néanmoins un résultat particulièrement intéressant – que la distribution de Wigner-Ville est susceptible de se localiser parfaitement sur une droite quelconque du plan temps-fréquence, et ceci de la même façon que la transformée de Fourier se localise parfaitement sur une raie spectrale dans le cas d'un signal monochromatique, l'interprétation temps-fréquence de cette dernière situation étant de correspondre au cas particulier d'une droite parallèle à l'axe des temps.

## 3. « chirps » et localisation

Convenons d'appeler « chirp » tout signal complexe de la forme

$$x(t) = a(t) e^{i\varphi(t)}, \quad (10)$$

les oscillations contrôlées par la phase  $\varphi(t)$  étant supposées lentes vis-à-vis des variations de la fonction (positive)  $a(t)$ . Dans le cas où le signal ainsi représenté est analytique,  $a(t)$  définit l'amplitude instantanée du signal  $\text{Re}\{x(t)\}$ , la quantité  $\varphi'(t) := (d\varphi/dt)(t)$  s'identifiant quant à elle à sa pulsation instantanée  $\omega_x(t)$  [34].

Lorsqu'on l'applique à un « chirp » de la forme (10), la distribution de Wigner-Ville (7) peut en fait s'écrire [13]

$$W_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [b_t(\tau) e^{i\psi_t(\tau)}] e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (11)$$

avec

$$b_t(\tau) := a \left( t + \frac{\tau}{2} \right) a \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \quad (12)$$

et

$$\psi_t(\tau) := \varphi \left( t + \frac{\tau}{2} \right) - \varphi \left( t - \frac{\tau}{2} \right). \quad (13)$$

Ainsi réécrite, la distribution de Wigner-Ville n'est donc autre que la transformée de Fourier d'un « chirp » modifié dont la phase locale (en  $\tau$ ) est paramétrée par le temps courant  $t$  et vaut  $\psi_t(\tau)$ . Par suite, à supposer que le « chirp » analysé  $x(t)$  soit unimodulaire (i.e., que  $a(t) = 1$ ), la distribution de Wigner-Ville

résultante sera parfaitement localisée – et ceci à tout instant  $t$  – dès lors que la dérivée partielle de la phase locale, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \psi_t(\tau) = \frac{1}{2} \left[ \varphi' \left( t + \frac{\tau}{2} \right) + \varphi' \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right], \quad (14)$$

sera constante en  $\tau$ .

Au vu de l'équation fonctionnelle associée à cette condition, les seules solutions sont données par les phases  $\varphi(t)$  quadratiques et correspondent donc à une localisation sur les droites du plan. La propriété de localisation (8) trouve ainsi une explication géométrique très simple en termes d'auto-adaptation de l'analyse par compensation de phase : un « chirp » linéaire montant compense un « chirp » linéaire descendant pour créer une fréquence pure.

### 3.1. interférences et localisation

La notion de compensation de phase évoquée ci-dessus met en évidence le caractère quadratique de la distribution de Wigner-Ville. En conséquence, l'analogie selon laquelle cette dernière se comporte vis-à-vis des « chirps » linéaires comme la transformée de Fourier vis-à-vis des fréquences pures ne peut être poursuivie de façon stricte dans le cas où plusieurs « chirps » sont présents simultanément. En effet, comme toute transformation quadratique, la distribution de Wigner-Ville obéit à un principe de superposition lui aussi quadratique, et selon lequel

$$W_{ax+by} = |a|^2 W_x + |b|^2 W_y + I, \quad (15)$$

expression dans laquelle  $I$  désigne un terme interférentiel oscillant, traduisant l'existence d'interactions entre les signaux  $x$  et  $y$  dans le calcul de la distribution de leur somme.

Une analyse fine du mécanisme d'interférences [19] montre que toute paire de composantes crée dans le plan temps-fréquence une contribution interférentielle au voisinage du milieu géométrique de la droite joignant les termes en interaction, cette contribution oscillant dans la direction orthogonale à la droite mentionnée, et ceci d'autant plus rapidement que les termes interagissant sont plus éloignés.

Ce résultat montre en fait qu'interférences et localisation ne sauraient être séparées, dans la mesure où c'est exactement le même mécanisme qui est à l'œuvre pour l'un et l'autre des phénomènes. En effet, tout signal peut toujours être segmenté en composantes arbitraires au gré de l'utilisateur, ce qui, dans le cas des « chirps », conduit par passage à la limite à une application ponctuelle de la règle d'interférences entre toutes paires de points appartenant à la courbe (de pseudo-fréquence instantanée)  $\varphi'(t)$ . Par suite, la localisation n'est possible que si tous les points d'interaction appartiennent eux-mêmes à la courbe en question : on retrouve ainsi la propriété déjà établie de localisation sur les droites du plan, la droite étant la seule courbe pouvant être définie

comme lieu de tous ses points-milieu (au sens de milieux des segments joignant deux points quelconques de la courbe).

Une façon complémentaire d'exprimer la même réalité s'appuie sur la formule (dite de Janssen [20]) :

$$W_x^2(t, \omega) = \iint_{-\infty}^{+\infty} W_x \left( t + \frac{\tau}{2}, \omega + \frac{\xi}{2} \right) W_x \left( t - \frac{\tau}{2}, \omega - \frac{\xi}{2} \right) \frac{d\tau d\xi}{2\pi}, \quad (16)$$

selon laquelle l'existence d'une valeur non nulle de la distribution de Wigner-Ville en un point du plan temps-fréquence résulte de la superposition de contributions provenant de points répartis symétriquement autour du point considéré.

Selon ces différentes interprétations, la notion même de « composante », attachée à une notion qualitative d'existence cohérente localisée dans le plan, peut se voir comme résultat d'une interférence constructive dans une distribution de Wigner-Ville. Une illustration de cette notion d'émergence progressive d'une composante cohérente par superposition interférentielle est donnée en figure 1.

### 3.2. « chirps » non linéaires et moyennes généralisées

Le principe de localisation sur les « chirps » linéaires par interférences constructives peut être vu comme un principe tout à fait général, adaptable à des cas non linéaires moyennant que les règles de construction interférentielle soient changées en conséquence [14].

Ainsi, on sait qu'il existe des représentations temps-fréquence parfaitement localisables sur les lois de retard de groupe du type

$$t_X(\omega) = t_0 + c\omega^{k-1}, k \leq 0. \quad (17)$$

Ce sont les représentations  $B_X^{(k)}(t, \omega)$  de la classe de Bertrand, issues d'un principe de covariance associé aux extensions à trois paramètres du groupe affine [4]. Pour en éclairer la définition, on peut repartir de la distribution de Wigner-Ville (7), qui admet l'écriture équivalente

$$W_X(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X \left( \omega + \frac{\xi}{2} \right)}_{\text{avance}} \underbrace{X \left( \omega - \frac{\xi}{2} \right)}_{\text{retard}} \underbrace{e^{i\omega t}}_{\text{Fourier}} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (18)$$

lorsqu'on la construit sur le spectre  $X(\omega)$  du signal analysé. Cette écriture met en évidence le rôle-clé joué par les translations fréquentielles, celles-là même qui interviennent dans le groupe de Weyl-Heisenberg, groupe par rapport auquel un principe de covariance conduit à la classe de Cohen dont la distribution de Wigner-Ville est un élément central. Remplaçant alors le groupe de Weyl-Heisenberg par le groupe affine passe par l'abandon des translations fréquentielles au profit des dilatations, l'analyse

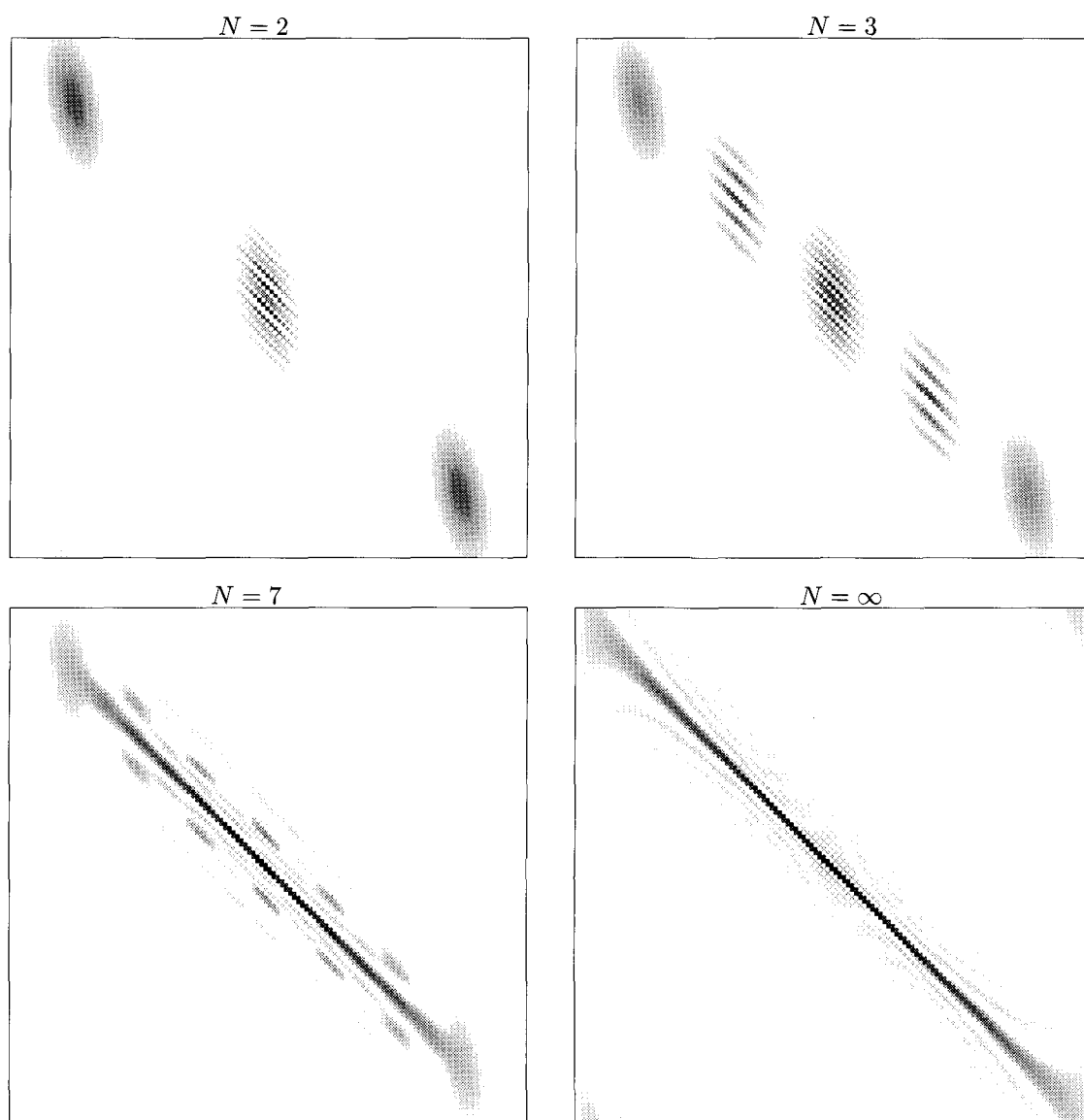


Figure 1. – Interférences et localisation. La propriété de localisation de la distribution de Wigner-Ville sur les droites du plan temps-fréquence peut se voir comme une conséquence de ses règles de construction interférentielle. Les contributions interférentielles étant toujours situées au voisinage du «point-milieu» de la droite joignant deux composantes en interaction, la figure illustre comment un nombre  $N$  croissant de composantes élémentaires alignées crée un nombre croissant de termes interférentiels, alignés eux aussi. Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , ceci conduit, par interférences constructives, à une localisation parfaite sur la droite qui est lieu de tous ses points-milieu. (Pour chaque image, le temps est en abscisse, la fréquence en ordonnée et l'amplitude est codée en niveaux de gris, seules les valeurs positives étant représentées.)

conduite par J. et P. Bertrand conduisant *in fine* à la classe générale de représentations admissibles [4]

$$B_X^{(k)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(\omega \lambda_k(u))}_{\text{dilatation}} \underbrace{\overline{X(\omega \lambda_k(-u))}}_{\text{compression}} \underbrace{\mu_k(u) e^{i\omega t \zeta_k(u)}}_{\text{pseudo-Fourier}} du. \quad (19)$$

Dans cette représentation, le signal  $x(t)$  est supposé analytique (i.e., son spectre  $X(\omega)$  est nul par hypothèse sur la demi-droite

réelle des fréquences négatives), la quantité  $\zeta_k(u)$  intervenant dans la structure de Fourier modifiée a pour valeur  $\zeta_k(u) = \lambda_k(u) - \lambda_k(-u)$ , où  $\lambda_k(u)$  est la fonction définie par

$$\lambda_k(u) = \left( k \frac{e^{-u} - 1}{e^{-ku} - 1} \right)^{1/(k-1)} \quad (20)$$

pour  $k \neq 0, 1$  et prolongée par continuité lorsque  $k = 0$  ou  $1$ . Le poids  $\mu_k(u)$ , *a priori* arbitraire, participe quant à lui au contrôle des propriétés de  $B_X^{(k)}(t, \omega)$ . Ainsi, on peut montrer [4] que la

propriété de localisation n'est possible que si  $k \leq 0$  et nécessite alors la relation

$$\mu_k(u) = (\lambda_k(u) \lambda_k(-u))^{1/2} \zeta'_k(u), \quad (21)$$

conduisant (pour  $k < 0$ , le cas  $k = 0$  s'obtenant par continuité) au résultat

$$\begin{aligned} X_k(\omega) &= \omega^{-1/2} \{-i(t_0\omega + c\omega^k/k)\} \Rightarrow \\ B_{X_k}^{(k)}(t, \omega) &= \omega^{-1} \delta(t - (t_0 + c\omega^{k-1})). \end{aligned} \quad (22)$$

Ce résultat, qui est à rapprocher de celui donné en (8), garantit qu'une localisation parfaite des distributions de Bertrand est possible, mais en remplaçant les droites du cas Wigner-Ville (associées aux « chirps » linéaires) par des hyperboles généralisées (associées à des « chirps » en lois de puissance). Dans la mesure où, tout comme les distributions de Wigner-Ville, les distributions de Bertrand sont quadratiques, leurs propriétés de localisation sur des courbes du plan peuvent se voir comme une simple conséquence de l'application ponctuelle des règles d'interférence qui en gouvernent la géométrie. Ainsi, par extension de ce qui a été dit en Section 3.1, dire qu'une distribution quadratique se localise sur une courbe non linéaire du plan est équivalent à dire que tout couple de points appartenant à la courbe en question interagit de telle sorte que la contribution interférentielle qu'il crée appartienne elle aussi à la même courbe. Dans le cas Wigner-Ville, on a mentionné que le mécanisme d'interférences reposait de façon fondamentale sur une règle de construction de « point-milieu », gouvernée en fait par l'idée de moyenne arithmétique usuelle :

$$(a, b) \mapsto A(a, b) = \frac{a + b}{2}. \quad (23)$$

On peut alors montrer [14] que le cas Bertrand obéit à une logique semblable, la règle de construction étant cette fois gouvernée par la moyenne généralisée

$$(a, b) \mapsto L_k(a, b) = \left( \frac{1}{k} \frac{a^k - b^k}{a - b} \right)^{1/(k-1)}, \quad (24)$$

soit encore la moyenne de Galvani, cas particulier des moyennes logarithmiques généralisées de Stolarsky [31].

Cette moyenne généralisée admet un certain nombre de cas particuliers bien connus, comme les moyennes géométrique pour  $k = -1$ , logarithmique pour  $k = 0$  et arithmétique pour  $k = 2$ . En ce qui concerne ce dernier cas, on ne peut espérer de localisation parfaite (car  $k > 0$ ) mais on peut néanmoins remarquer que l'on retrouve la règle classique associée à la distribution de Wigner-Ville, cette dernière n'étant précisément autre que la distribution  $B_X^{(2)}(t, \omega)$  lorsque  $x(t)$  est analytique.

Une illustration de la règle de point-milieu modifiée (au sens de la moyenne de Galvani) est donnée en figure 2.

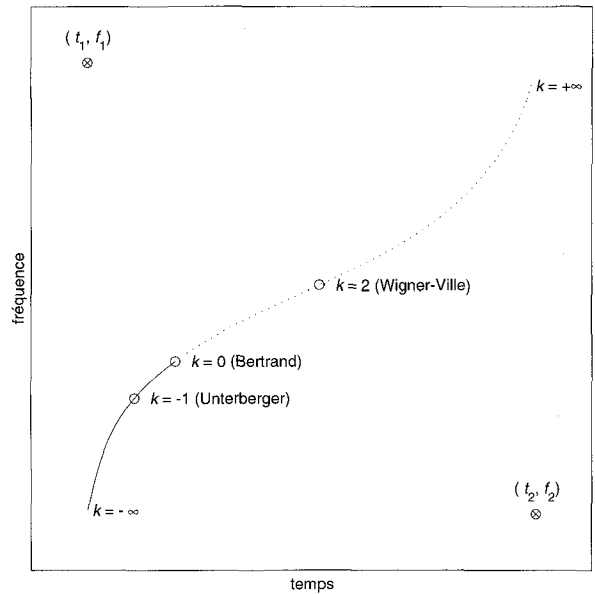


Figure 2. – Interférences et moyennes généralisées. Dans le cas des distributions affines de Bertrand de paramètre  $k \in \mathbb{R}$ , la contribution interférentielle entre deux composantes centrées en  $(t_1, f_1)$  et  $(t_2, f_2)$  est située au voisinage d'un point lié à la moyenne de Galvani des points en interaction. La figure représente la trajectoire de ce « point-milieu » modifié, lorsque  $k$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Quoique la règle de construction interférentielle puisse être formellement envisagée pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , seules les valeurs négatives de  $k$  (trait continu) garantissent une possibilité de localisation parfaite aux distributions associées.

### 3.3. symétries

Si l'on revient à la notion de moyenne arithmétique attachée à la distribution de Wigner-Ville, l'association d'un point-milieu  $c = A(a, b)$  décrite en (23) admet l'interprétation duale

$$b = 2c - a, \quad (25)$$

selon laquelle les deux points  $a$  et  $b$  en interaction sont symétriques l'un de l'autre par rapport au point interférentiel  $c$ . Là encore, la notion de symétrie utilisée est usuelle, mais elle peut se prêter à diverses généralisations. Parmi celles-ci, la plus naturelle est de passer de la moyenne arithmétique (23) à une moyenne quasi-arithmétique du type [18]

$$c = \varphi^{-1} \left( \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} \right), \quad (26)$$

où  $\varphi(\cdot)$  est une fonction strictement monotone, ce qui résulte en la symétrie modifiée :

$$b = \varphi^{-1} (2\varphi(c) - \varphi(a)). \quad (27)$$

Dans le cas des moyennes généralisées (24) gouvernant la géométrie des distributions de Bertrand, le situation de quasi-arithmétique est cependant l'exception, le calcul montrant que la compatibilité entre les formes (24) et (26) n'est possible que si  $k = -1, 1/2$  ou  $2$  [14].

Le cas particulier  $k = 2$  correspond à choisir pour fonction de distortion  $\varphi$  l'identité. Il redonne bien sûr la distribution de Wigner-Ville, dont un calcul direct montre [16, 30] qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$W_X(t, \omega) = \langle X, \mathbf{D}_{t, \omega} \mathbf{I} \mathbf{D}_{-t, -\omega} X \rangle, \quad (28)$$

où  $\mathbf{D}_{t, \omega}$  est l'opérateur de déplacement dans le plan temps-fréquence, de maille  $(t, \omega)$ , et  $\mathbf{I}$  l'opérateur de parité, tel que  $(\mathbf{I}x)(t) = x(-t)$  et  $(\mathbf{I}X)(\omega) = X(-\omega)$ . Sous cette forme, la distribution de Wigner-Ville apparaît donc explicitement comme étant valeur moyenne d'un opérateur de symétrie centré au point d'évaluation.

Si l'on se restreint aux distributions localisables, la condition nécessaire  $k \leq 0$  conduit à la seule solution  $k = -1$ , associée à la fonction de distortion  $\varphi(a) = \log a$ . La moyenne quasi-arithmétique associée s'écrit alors

$$c = \exp \left\{ \frac{\log a + \log b}{2} \right\} = \sqrt{ab}, \quad (29)$$

ce qui se réduit à une moyenne géométrique, la symétrie résultante prenant la forme d'une inversion ( $b = c^2/a$ ) et la distribution correspondante :

$$B_X^{(-1)}(t, \omega) = f \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + 1/\gamma^2) X(\gamma \omega) \overline{X(\gamma/\omega)} e^{i\omega t(\gamma - 1/\gamma)} d\gamma \quad (30)$$

s'identifiant à la distribution d'Unterberger (sous sa forme active) [32] (voir aussi [4] et [17]).

L'existence d'une symétrie sous-jacente à la définition d'une distribution temps-fréquence permet *via* l'écriture en valeur moyenne (28) ou la généralisation que l'on peut en donner à partir de (30) – d'interpréter la valeur prise par la distribution en un point comme une mesure de la façon dont le signal est « centré » en ce point, au sens de la géométrie considérée. Là encore, la possibilité de localisation sur une courbe du plan admet une interprétation simple, puisqu'elle nécessite que la courbe en question soit lieu de tous ses centres de symétrie, au sens toujours de la géométrie considérée. On caractérise ainsi de façon directe les droites dans le cas de la symétrie centrale usuelle (Wigner-Ville) et les hyperboles « au carré » dans le cas de l'inversion (Unterberger).

### 3.4. au-delà du quadratique

La distribution de Wigner-Ville, qu'on l'écrive sous sa forme temporelle (7) ou fréquentielle (18), combine les deux ingrédients d'être quadratique en le signal et linéaire en les arguments des signaux intervenant dans le produit dont on prend la transformée de Fourier (cf. l'éq. (18)). Il en résulte, au niveau de la localisation, un lien privilégié entre la distribution de Wigner-Ville et les droites du plan, avec pour conséquence que, si l'on souhaite élargir la propriété de localisation à des courbes non linéaires du plan, il est

nécessaire de relâcher l'une au moins des contraintes de structure mentionnées précédemment.

La première voie consiste à conserver le caractère quadratique de la transformation, mais à introduire une forme adéquate de non-linéarité dans les arguments des signaux que l'on multiplie avant transformation. On a vu, avec les distributions de Bertrand (cf. l'éq. (19)), que ce type de structure modifiée permettait en effet d'atteindre l'objectif visé d'une localisation sur des courbes non linéaires, en l'occurrence en lois de puissance.

Une deuxième démarche est cependant envisageable, qui cette fois consiste à privilégier l'aspect linéaire des transformations de coordonnées dans les arguments des signaux manipulés, mais à en former des produits d'ordre supérieur à deux, de façon à étendre, en l'itérant, l'avantage que la bilinéarité offre à la distribution de Wigner-Ville en termes de compensation de phase. Cette direction ouvre la voie aux distributions de Wigner-Ville polynômiales [6], cadre général dont nous ne considérerons ici que le cas particulier quartique [1, 25].

Dans le cas quartique, la structure imposée peut être choisie de la forme

$$Q_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t, \omega) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (31)$$

avec

$$R_x(t, \omega) = x(t + b_0\tau) x(t + b_1\tau) \overline{x(t + b_2\tau)} \overline{x(t + b_3\tau)}, \quad (32)$$

où les  $b_i$  sont des paramètres réels *a priori* arbitraires. En référence au cas Wigner-Ville pour lequel l'unimodularité et un choix quelconque de phase  $\varphi(t)$  quadratique dans le modèle (10) conduit à la localisation  $W_x(t, \omega) = \delta(\omega - \varphi'(t))$ , l'intuition suggère qu'un choix convenable des  $b_i$  devrait permettre une localisation de même nature pour  $Q_x(t, \omega)$ , et ceci pour toute phase cubique. L'analyse générale de cette question conduit à identifier une famille de distributions (31) admissibles, caractérisées par [25]

$$b_1 = \frac{1}{3} \frac{3b_0 - 1}{2b_0 - 1}, \quad (33)$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \left[ -1 + b_0 + b_1 \pm \sqrt{(b_0 - b_1)^2 + 2b_0 + 2b_1 - 1} \right], \quad (34)$$

$$b_3 = b_0 + b_1 - b_2 - 1, \quad (35)$$

le paramètre libre  $b_0$  devant vérifier  $b_0 \geq b_+$  ou  $b_0 \leq b_-$ , avec

$$b_{\pm} = \frac{\sqrt{3}}{6} \left( -1 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \right). \quad (36)$$

Ainsi, une localisation parfaite sur des phases cubiques est possible dès l'ordre quatre, et ceci d'une infinité de manières. Parmi l'ensemble des  $b_0$  admissibles, on peut néanmoins trouver des valeurs privilégiées qui garantissent une certaine forme « d'optimalité ». Ainsi, des considérations de simplicité algorithmique (deux  $b_i$  identiques sur quatre) et de localisation (concentration maximale pour les gaussiennes et délocalisation minimale pour les phases quartiques) conduisent à choisir pour  $b_0$  l'une des trois valeurs  $b_+$ ,  $b_-$  ou  $1/2 + \sqrt{3}/6$ .

L'approche suivie dans le cas quartique est conceptuellement extensible à des ordres supérieurs, mais au prix d'une complexité croissante de l'analyse, de la mise en œuvre et de l'interprétation. Plutôt que de s'engager dans cette direction, on peut en fait remarquer qu'une représentation d'ordre donné peut se voir comme une représentation d'ordre inférieur, paramétrée par un noyau dépendant du signal analysé. Cette interprétation est celle qui prévalait dans l'introduction de la distribution de Wigner-Ville comme transformée de Fourier à court-terme « auto-adaptée » (cf. l'éq. (6)), et elle peut être encore invoquée, *mutatis mutandis*, pour lire (31) comme une forme de pseudo-distribution de Wigner-Ville dans laquelle interviendrait un noyau lui-même quadratique en le signal. La portée de cette modification auto-adaptée de la définition de base est cependant limitée par le fait que le noyau mis en jeu, s'il dépend bien du signal, en dépend en fait d'une manière universelle et non locale. En d'autres termes, la structure de l'adaptation ne dépend pas du point d'évaluation, ce qui en limite les avantages à des classes très particulières de signaux. Afin d'aller plus avant, un pas supplémentaire peut donc être franchi en autorisant le noyau (ou la fenêtre) à dépendre des caractéristiques locales (en temps et en fréquence) du signal analysé. Plusieurs solutions ont été proposées en ce sens, que nous ne détaillerons pas (on pourra pour cela se reporter par exemple à [9]), nous contentant de mettre ici l'accent sur une approche très générale : la réallocation.

### 3.5. réallocation

Afin de justifier le principe de la technique de réallocation – qui, bien qu'introduite au milieu des années 70 [21], n'a guère été utilisée jusqu'à un passé assez récent [2]–, le plus simple est de repartir de la définition du spectrogramme. Sous sa forme standard, celui-ci n'est autre que le module carré d'une transformée de Fourier à court-terme et s'écrit donc :

$$\left| F_x^{(h)}(t, \omega) \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \overline{h(s-t)} e^{-i\omega(s-t/2)} ds \right|^2. \quad (37)$$

Le spectrogramme étant, par structure, une distribution temps-fréquence quadratique covariante par les translations en temps et en fréquence, il appartient à la classe de Cohen. Il peut donc s'exprimer en fonction de la distribution de Wigner-Ville du signal analysé, conduisant à la deuxième définition :

$$\left| F_x^{(h)}(t, \omega) \right|^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} W_x(s, \xi) W_h(s-t, \xi-\omega) \frac{ds d\xi}{2\pi}, \quad (38)$$

qui est strictement équivalente à (37), mais met explicitement l'accent sur le fait qu'un spectrogramme résulte d'un lissage de la distribution de Wigner-Ville. Dans cette interprétation, le lissage sous-jacent au calcul d'un spectrogramme présente l'avantage de réduire l'influence des termes interférentiels oscillants susceptibles d'être présents dans une distribution de Wigner-Ville, mais il présente en même temps l'inconvénient d'étaler dans le plan

les composantes éventuellement bien localisées de cette dernière. Une façon de concilier les avantages des deux représentations (faible niveau d'interférences du spectrogramme et bonne localisation de Wigner-Ville) est alors de recourir au principe de *réallocation*, que l'on peut justifier de la façon suivante. Lorsque l'on calcule classiquement un spectrogramme en un point d'évaluation  $(t, \omega)$  du plan, la valeur obtenue résulte en fait – par l'opération de lissage (38) – de la somme de toutes les contributions de la distribution de Wigner-Ville du signal dans un domaine temps-fréquence équivalent défini par le support essentiel de la distribution de Wigner-Ville de la fenêtre à court-terme utilisée. On remplace ainsi une *distribution* de valeurs par un *nombre unique* qui la résume, et l'on affecte ce résultat au *centre géométrique* du domaine considéré. C'est au niveau de cette dernière étape que la méthode trouve sa limitation, dans la mesure où, dans le cas général (non uniforme), ce centre géométrique n'a aucune raison d'être adapté à la distribution. En raisonnant par analogie avec la mécanique, la valeur obtenue en évaluant la « masse » totale d'une distribution devrait plutôt être affectée au *centre de gravité* de la distribution dans le domaine. C'est le principe de la réallocation, qui consiste à évaluer en chaque point  $(t, \omega)$  le centre de gravité local  $(\hat{t}_x(t, \omega), \hat{\omega}_x(t, \omega))$  de la distribution de Wigner-Ville du signal « vu » à travers la fenêtre temps-fréquence  $W_h$  centrée en  $(t, \omega)$ , et à déplacer la valeur ainsi obtenue du point d'évaluation vers ce centre de gravité :

$$S_x^{(h)}(t, \omega) \rightarrow \iint S_x^{(h)}(s, \xi) \delta(t - \hat{t}_x(s, \xi), \omega - \hat{\omega}_x(s, \xi)) \frac{ds d\xi}{2\pi}. \quad (39)$$

Conceptuellement, la réallocation peut se voir comme le séquençement de deux opérations : la première est un lissage, qui a pour effet de gommer les oscillations interférentielles, mais avec l'inconvénient de délocaliser les composantes utiles ; la seconde agit à la manière d'un post-traitement qui reconcentre les contributions (délocalisées) ayant survécu à la première opération. On conçoit alors aisément qu'une distribution de Wigner-Ville localisée sur une droite du plan retrouve sa localisation après lissage et réallocation, puisque le centre de gravité de toute distribution linéique appartient nécessairement au support (localisé) de cette dernière. Plus généralement, un bénéfice analogue sera obtenu dès lors que le signal analysé se comportera *localement* comme un « chirp » linéaire, à l'échelle de la fenêtre temps-fréquence de lissage. Une illustration de ce comportement est donnée en figure 3.

D'un point de vue pratique (et algorithmique [3]), les deux opérations mentionnées plus haut ne sont pas séquençées, l'évaluation des centres de gravité locaux étant obtenue de façon efficace selon [2]

$$\hat{t}_x(t, \omega) = t + \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_x^{(Th)}}{F_x^{(h)}} \right\} (t, \omega) \quad (40)$$

et

$$\hat{\omega}_x(t, \omega) = \omega - \operatorname{Im} \left\{ \frac{F_x^{(Dh)}}{F_x^{(h)}} \right\} (t, \omega), \quad (41)$$



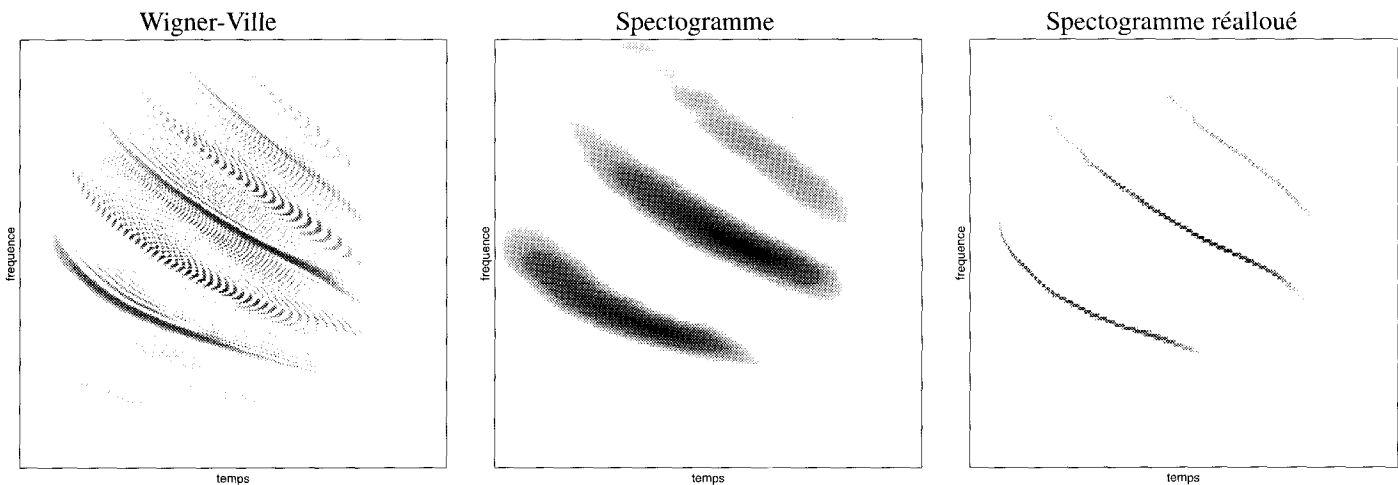


Figure 3. – Wigner-Ville, spectrogramme et spectrogramme réalloué. Dans le cas d'un signal multi-composantes formé de plusieurs « chirps » (ici, un cri d'écholocation de chauve-souris, fourni par Curtis Condon, Ken White et Al Feng du Beckman Center de l'Université de l'Illinois), la distribution de Wigner-Ville garantit une bonne localisation sur les composantes individuelles, mais au prix de l'existence de termes interférentiels qui en réduisent la lisibilité. Parce qu'il est une version lissée de la distribution de Wigner-Ville, le spectrogramme s'affranchit de l'essentiel des contributions interférentielles (qui sont oscillantes), mais au prix d'une perte de localisation des composantes propres. Le spectrogramme réalloué, obtenu en déplaçant les valeurs du spectrogramme du point de calcul vers le centre de gravité local de la distribution de Wigner-Ville, combine les avantages des deux représentations, une localisation quasi-parfaite étant obtenue dès lors que les « chirps » sont localement linéaires, à l'échelle de la fenêtre temps-fréquence de lissage.

les opérateurs  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{D}$  étant définis par  $(\mathcal{T}h)(t) = th(t)$  et  $(\mathcal{D}h)(t) = (dh/dt)(t)$ , respectivement.

La présentation qui vient d'être donnée de la réallocation se rapporte au seul spectrogramme, mais le principe en est en fait extensible bien au-delà de ce cadre. Ainsi, toute distribution (lissée) de la classe de Cohen, de la classe affine, de la classe hyperbolique, ... admet une forme réallouée qui en accroît la localisation et peut se mettre en œuvre au moyen d'opérateurs spécifiques partageant avec ceux de (40) et (41) le principe d'être construits sur trois représentations standard calculables en parallèle [2].

Il importe cependant de noter que la réallocation du spectrogramme (qui a seule été proposée dans les travaux pionniers de Kodera *et al.* [21]) se prête à une interprétation particulièrement intéressante. En effet, on peut montrer que les opérateurs de réallocation définis en (40) et (41) admettent la forme équivalente

$$\hat{t}_x(t, \omega) = \frac{t}{2} - \frac{\partial}{\partial \omega} \arg F_x^{(h)}(t, \omega) \quad (42)$$

et

$$\hat{\omega}_x(t, \omega) = \frac{\omega}{2} - \frac{\partial}{\partial t} \arg F_x^{(h)}(t, \omega). \quad (43)$$

Ceci montre que les centres de gravité locaux vers lesquels les valeurs moyennées sont réallouées ne sont en fait autres que les retard de groupe et fréquence instantanée du signal « vu » à travers une fenêtre temps-fréquence locale. Cette interprétation permet [8] de relier les résultats fournis par la réallocation de spectrogramme avec ceux des approches « arête et squelette » [7]. Elle fournit aussi un pont entre l'idée « globale » de fréquence instantanée (au sens de Ville : une fréquence à un instant) et celle,

« locale », que l'on peut attacher à l'émergence de concentrations énergétiques le long de trajectoires dans le plan.

## 4. conclusion

La contradiction interne à l'expression « fréquence instantanée » exclut d'en espérer une définition unique et satisfaisante à tous égards. Une voie d'approche consiste à aborder la question directement dans le plan temps-fréquence. Plutôt que de s'intéresser à des représentations qui permettraient d'accéder à des définitions pré-établies, on peut prendre comme point de départ une représentation temps-fréquence et s'appuyer sur elle pour interpréter en termes de « fréquences instantanées » ses lieux de localisation (ou de concentration énergétique) dans le plan. Si cette approche n'est bien sûr pas exempte d'arbitraire (le choix de la représentation n'étant pas unique), le renversement de perspective qu'elle opère est néanmoins susceptible de réconcilier, de façon simple et opératoire, description mathématique et interprétation physique.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.O. Amblard and Lacoume, J.L. (1992). Construction of fourth order Cohen's class : a deductive approach. *IEEE Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis TFTS-92*, Victoria (BC), 257–260.
- [2] F. Auger and Flandrin, P. (1995). Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by using the reassignment method. *IEEE Trans. on Signal Proc.* 43 (5), 1068–1089.

- [3] F. Auger, Flandrin, P., Lemoine, O. and Gonçalves, P. (1998). *Time-Frequency Toolbox, for use with MATLAB*. Logiciel et documentation téléchargeables depuis le site <http://www.physique.ens-lyon.fr/ts/tfb.html>.
- [4] J. Bertrand and Bertrand, P. (1992). A class of affine Wigner functions with extended covariance properties. *J. Math. Phys.* 33 (7), 2515–2527.
- [5] A. Blanc-Lapierre et Picinbono, B. (1955). Remarques sur la notion de spectre instantané de puissance. *Publ. Sci. Univ. Alger B* 1, 2–32.
- [6] B. Boashash and Ristic, B. (1992). Polynomial Wigner-Ville distributions and time-varying higher-order spectra. *IEEE-SP Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, Victoria (BC), 31–34.
- [7] R. Carmona, Hwang, W.L. and Torrésani, B. (1998). *Practical Time-Frequency Analysis*. Academic Press, San Diego, CA.
- [8] E. Chassande-Mottin (1998). *Méthodes de réallocation dans le plan temps-fréquence pour l'analyse et le traitement de signaux non stationnaires*. Thèse de Doctorat, Univ. de Cergy-Pontoise. Document téléchargeable depuis le site <http://www.physique.ens-lyon.fr/ts/these/e8.html>.
- [9] L. Cohen, (1990). Distributions concentrated along the instantaneous frequency. *SPIE Meeting on Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures and Implementations*, 1348, 149–157.
- [10] L. Cohen, (1995). *Time-Frequency Analysis*. Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, NJ.
- [11] P. Flandrin, (1998). *Temps-Fréquence* (2ème éd.). Hermès, Paris.
- [12] P. Flandrin, (1999). *Time-Frequency/Time-Scale Analysis*. Academic Press, San Diego, CA.
- [13] P. Flandrin and Escudié, B. (1984). An interpretation of the pseudo-Wigner-Ville distribution. *Signal Proc.* 6 (1), 27–36.
- [14] P. Flandrin and Gonçalves, P. (1996). Geometry of affine time-frequency distributions. *Appl. Comp. Harm. Anal.* 3 (1), 10–39.
- [15] G.B. Folland and Sitaram, A. (1997). The uncertainty principle : a mathematical survey. *J. Fourier Anal. Appl.* 3 (3), 207–238.
- [16] A. Grossmann, (1976). Parity operator and quantization of  $\delta$ -functions. *Commun. Math. Phys.* 48, 191–194.
- [17] A. Grossmann et Escudié, B. (1991). Une représentation bilinéaire en temps et échelle des signaux d'énergie finie. 13ème Coll. GRETSI, Juan-les-Pins, 33–36.
- [18] G. Hardy, Littlewood, J.E. and Pólya, G. (1934). *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [19] F. Hlawatsch, and Flandrin, P. (1998). The interference structure of the Wigner distribution and related time-frequency signal representations. In [24], pp. 59–133].
- [20] A.J.E.M. Janssen (1982). On the locus and spread of pseudo-density functions in the time-frequency plane. *Philips J. Res.* 37, 79–110.
- [21] K. Kodera, de Villelardy, C. and Gendrin, R. (1976). A new method for the numerical analysis of non-stationary signals. *Phys. Earth and Plan. Int.* 12, 142–150.
- [22] G. Longo and Picinbono, B. (eds., 1989). *Time and Frequency Representation of Signals and Systems*, CISM Courses and Lectures 309, Springer-Verlag, Wien.
- [23] P. Loughlin, and Tacer, B. (1996). On the amplitude and frequency-modulation decomposition of signals. *J. Acoust. Soc. Amer.* 100, 1594–1601.
- [24] W.F.G. Mecklenbräuker and Hlawatsch, F. (eds., 1998). *The Wigner Distribution — Theory and Applications in Signal Processing*. Elsevier, Amsterdam.
- [25] J.C. O'Neill and Flandrin, P. (1998). Two excursions in the quartic domain. *IEEE Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis TFTS-98*, Pittsburgh, PA, 321–324.
- [26] B. Picinbono (1997). On instantaneous amplitude and phase of signal. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 45 (3), 552–560.
- [27] B. Picinbono, (1998). Some remarks on instantaneous amplitude and frequency of signals. *IEEE Int. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis TFTS-98*, Pittsburgh, PA, 293–300.
- [28] B. Picinbono et Martin, W. (1983). Représentation des signaux par amplitude et phase instantanées. *Ann. Télécomm.* 38 (5-6), 179–190.
- [29] M. Poletti, (1997). The homomorphic analytic signal. *IEEE Trans. on Signal Proc.* 45, 1943–1953.
- [30] A. Royer, (1977). Wigner function as expectation value of a parity operator. *Phys. Rev. A* 15 (2), 449–450.
- [31] K.B. Stolarsky, (1975). Generalizations of the logarithmic mean. *Math. Mag.* 48, 87–92.
- [32] A. Unterberger, (1984). The calculus of pseudo-differential operators of Fuchs type. *Comm. in Part. Diff. Eq.* 9, 1179–1236.
- [33] D. Vakman, (1996). On the analytic signal, the Teager-Kaiser energy algorithm, and other methods for defining amplitude and frequency. *IEEE Trans. on Signal Proc.* 44, 791–797.
- [34] J. Ville, (1948). Théorie et applications de la notion de signal analytique. *Câbles et Transm.* 2ème A. (1), 61–74.
- [35] E.P. Wigner, (1932). On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.* 40, 749–759.

Manuscrit reçu le 2 mars 1999.

### L' AUTEUR

Patrick FLANDRIN



Ingénieur (ICPI Lyon, 1978), Docteur-Ingénieur (INP Grenoble, 1982), Docteur ès Sciences Physiques (INP Grenoble, 1987). Directeur de Recherches CNRS (2ème classe non fumeur, quoique lauréat du Prix Scientifique Philip Morris en 1991).