

# Du contrôle en mécanique des fluides

## The control problem in fluid mechanics

par Christine BENARD

Ecole Normale Supérieure  
45 rue d'Ulm  
75005 Paris

### *résumé et mots clés*

L'objet principal du contrôle en mécanique des fluides concerne la transition laminaire-turbulente, dont on souhaite soit avancer soit reculer le seuil. Cet article de revue insiste sur l'approche linéaire, laquelle consiste à n'essayer de contrôler que les équations linéarisées au voisinage d'un point de fonctionnement. Il montre que l'approche suivie se résume pour l'essentiel à du placement de pôles. Il montre également que certains contrôles conçus de cette façon sont robustes pour des perturbations finies, c'est-à-dire dans des conditions non linéaires.

Contrôle mécanique des fluides, instabilités.

### *abstract and key words*

Control in Fluid Mechanics deals mainly with the laminar-turbulent transition, the threshold of which is wanted to be either decreased or increased. This review article insists on the linear point of view, which reduces the problem to the control of linearized equations in the neighbourhood of a solution of the complete set of equations. It shows that the method used in most of the published works is in fact a pole placement method. It underlines also that in some cases, the control built on a linear basis may lead to a control that is robust in highly non-linear conditions.

Control fluid mechanics, instabilities.

## 1. introduction

Depuis environ quinze ans, l'idée d'utiliser le contrôle en boucle ouverte ou fermée pour modifier les mouvements convectifs d'un fluide en écoulement s'est progressivement développée. Pratiquement ce qui est en jeu est, la plupart du temps, le contrôle de la transition d'un régime d'écoulement laminaire à un régime d'écoulement turbulent.

Dans certaines situations, l'intérêt est de réduire l'effet des forces visqueuses exercées par l'écoulement sur parois et obstacles : en aéronautique, la réduction des forces de traînée est un enjeu majeur. Le but du contrôle est alors de maintenir un écoulement laminaire, ou simplement de « réduire la turbulence » [Bewley *et al.*, 1994] [Choi *et al.*, 1994], alors que les conditions d'opération sont très au-delà du seuil de transition à la turbulence.

La communauté des chercheurs et ingénieurs en aéronautique joue, du fait de ces enjeux, un rôle déterminant dans le développement du contrôle « actif » (par action intentionnelle sur une entrée

temporelle en boucle ouverte ou fermée). Mais une part importante de leurs travaux ne se limite pas à l'analyse du déplacement de seuils critiques et attaque le problème dans sa globalité, en cherchant à traiter les écoulements turbulents à l'aide de méthodes de contrôle sous-optimal [Abergel *et al.*, 1990] où l'on minimise une fonctionnelle de coût construite à partir des variables responsables des effets de frottement aux parois (vortex axés dans la direction de l'écoulement) ou des forces de frottement elles-mêmes.

D'autres communautés de la Mécanique des Fluides ont également commencé à étudier le contrôle du régime d'un écoulement. En effet, dans de nombreux procédés industriels, l'enjeu est de minimiser les fluctuations aléatoires des paramètres du système (températures, vitesses, concentrations) et donc également de parvenir à fonctionner, au-dessus du seuil de transition, en conditions laminares plutôt que turbulentes, ou même de réussir à arrêter toute convection alors qu'une convection laminaire est naturellement présente. Ces questions se posent pour la plupart des procédés d'élaboration de matériaux. Pour d'autres procédés (génie chimique par exemple), il peut au contraire être souhaitable d'induire la turbulence en deçà du seuil, afin d'augmenter les échanges de chaleur ou le mélange des espèces et donc éventuellement la vitesse de réactions chimiques.

Les premières prédictions théoriques sur la possibilité de contrôler les instabilités à l'origine de la transition à la turbulence ont été faites par Gaster [Gaster (1965)] pour le cas d'un écoulement le long d'une plaque plane dans un milieu semi-infini, dans le cadre d'une analyse linéaire des perturbations. L'idée est simplement d'essayer de détruire les ondes de Tollmien-Schlichting (TS) qui perturbent la couche limite à la paroi au-dessus d'une certaine valeur du nombre de Reynolds (lequel caractérise l'ordre de grandeur du rapport des forces d'inertie aux forces de frottements agissant dans le fluide). Dans la mesure où ces ondes sont de fréquence connue, le problème est de mesurer leur amplitude (module et phase) et de générer une onde de même fréquence, accordée en amplitude, afin d'annuler l'onde TS qui perturbe l'écoulement.

Du point de vue expérimental, la question initiale a été d'être capable d'exciter l'onde TS perturbatrice en amont de l'écoulement, de détecter son amplitude en aval et de créer l'onde qui la détruit. Ce n'est qu'en 1982 [Liepmann *et al.* (1982a) et (1982b)] que l'expérience a été réalisée. L'instabilité est provoquée par le chauffage périodique d'une résistance électrique disposée en une bande étroite sur la plaque, perpendiculairement à l'écoulement, à une faible distance du bord d'attaque (figure 1). La perturbation de la force visqueuse en aval sur la paroi est mesurée (figure 2) par des capteurs à film chaud en différentes positions : ils permettent de vérifier qu'une approximation bidimensionnelle, dans le plan de la figure, est correcte, et que, plus on s'éloigne du bord d'attaque (plus le Reynolds croît), plus l'onde TS perturbe l'effort

tangentiel sur la paroi. On voit d'abord des bouffées turbulentes, aux faibles valeurs de  $x$ , jusqu'à un comportement chaotique, aux valeurs plus élevées de  $x$ .

L'utilisation d'un capteur à film chaud pour renvoyer l'information sur une bande électrique chauffante en amont du capteur, par un simple bouclage proportionnel (figure 3) permet effectivement de détruire la perturbation si la phase est bien accordée en opposition (figure 4).

Deux caractéristiques de ces travaux sont à souligner, car elles sont centrales dans les approches que va développer une part importante des mécaniciens des fluides (à l'exception des spécialistes de la turbulence) sur le contrôle des écoulements pendant les deux décennies qui les ont suivis :

- On se fonde sur une analyse linéaire des perturbations,
- On sélectionne des modes d'action (localisation, variable utilisée, fréquence spatiale ou temporelle) qui induisent des réponses importantes de la part de l'écoulement, en se fondant sur la connaissance que l'on a de la « réceptivité » de l'écoulement [Hill, 1995].

Un atout et une difficulté majeurs pour la communauté des Mécaniciens des Fluides, en abordant le problème du contrôle, viennent du développement considérable des études de stabilité des écoulements. Ces études analysent comment les solutions des équations du système divergent – en particulier dans le cadre d'une approximation linéaire – sans qu'aucune entrée forcée (« active »)

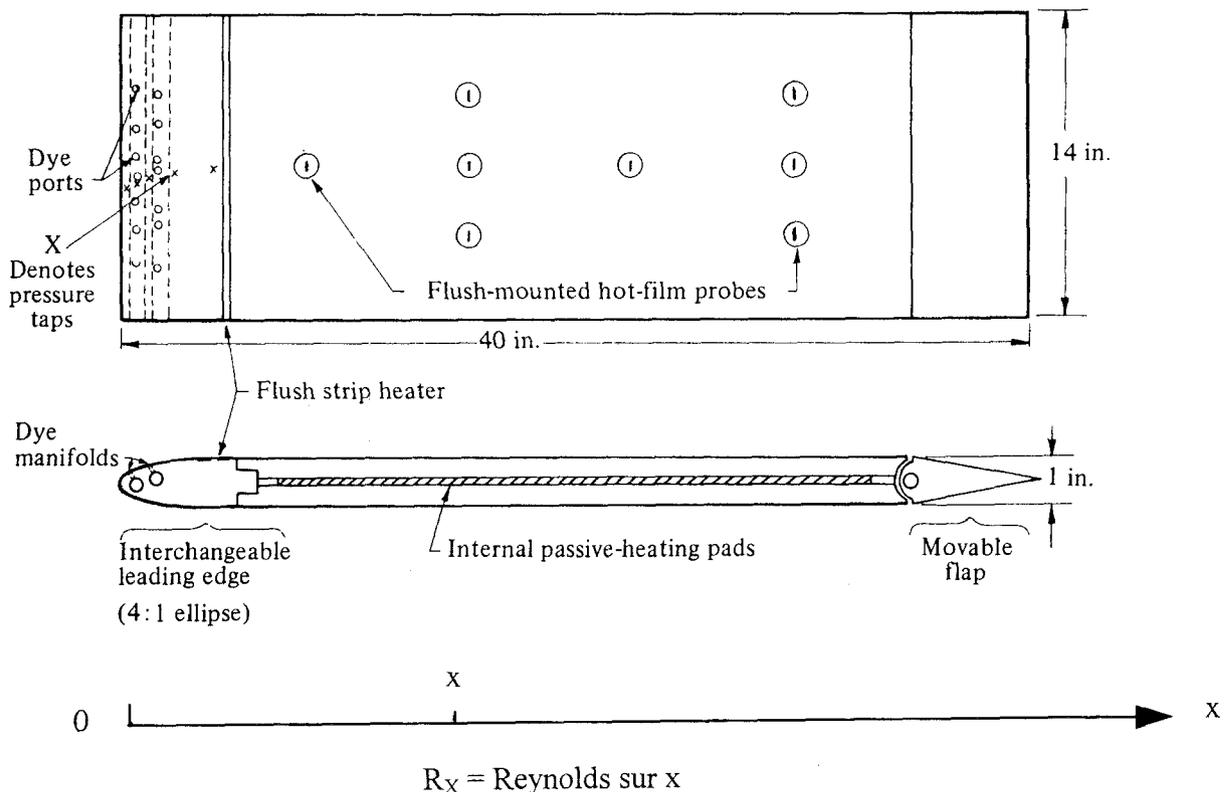


Figure 1. - Observation d'ondes de Tollmien-Schlichting dans une couche limite sur une plaque plane. (d'après Liepmann, 1982a).

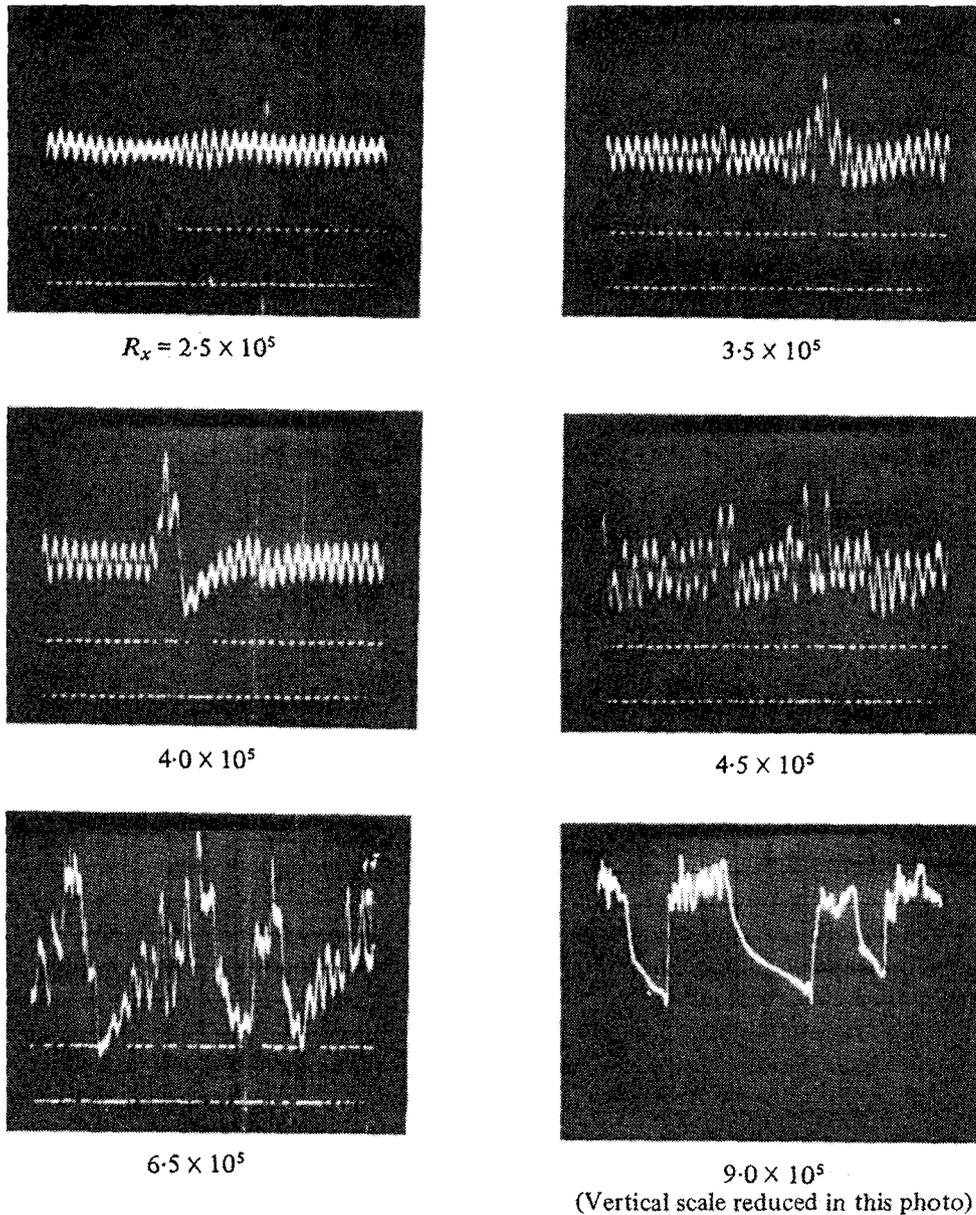


Figure 2. – Fluctuations de la contrainte de cisaillement à la paroi, pour différents  $x$ , (d'après Liepmann *et al.*, 1982a).

n'agisse sur le système. La richesse et la complexité de ces analyses de stabilité rendent les mécaniciens des fluides méfiants, voire désarmés, devant l'étude des conséquences d'une entrée active (en boucle ouverte), sans vouloir envisager l'effet d'une entrée bouclée sur une sortie du système.

Les travaux sur les entrées en boucle ouverte ont été très antérieurs à ceux sur les boucles fermées. Ils se sont longtemps limités au « ruban oscillant » [Schubauer et Skramstad, 1947] [Gaster, 1965] avant de passer à des éléments chauffants pariétaux [Nosenchuck, 1982]. Quant à la formulation du problème, c'est en terme d'onde et de contrôle par onde destructive qu'elle était faite.

Cependant, dans la lignée de ces premiers travaux, les liens entre le comportement libre des équations et leur réponse à une entrée donnée ont fait l'objet d'analyses théoriques telles que celles de Huerre et Monkewitz (1985) ou Balsa (1988). Comme ces études sur la réponse à des entrées forcées portent sur des équations linéarisées, ce qui est de fait en cause ce sont les propriétés des fonctions de transfert entre variables d'action et variables d'observation, ainsi que les liens entre les lieux des zéros et des pôles de ces fonctions de transfert et ceux de la solution libre. Autrement dit, sont posés les problèmes de commandabilité et d'observabilité pour les couples de variables d'action et d'observation étudiés.

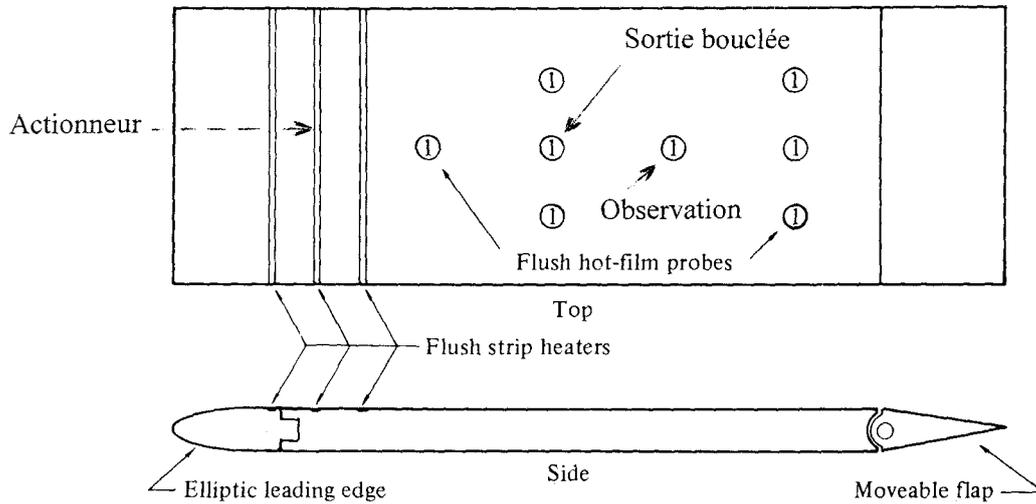


Figure 3. – Contrôle de l'apparition d'ondes de Tollmien-Schlichting par rétroaction. Sortie : Contrainte de cisaillement sur la paroi. Actionneur : chauffage ohmique en amont sur bande étroite (ajustement en phase et en amplitude) (d'après Liepmann *et al.* 1982b).

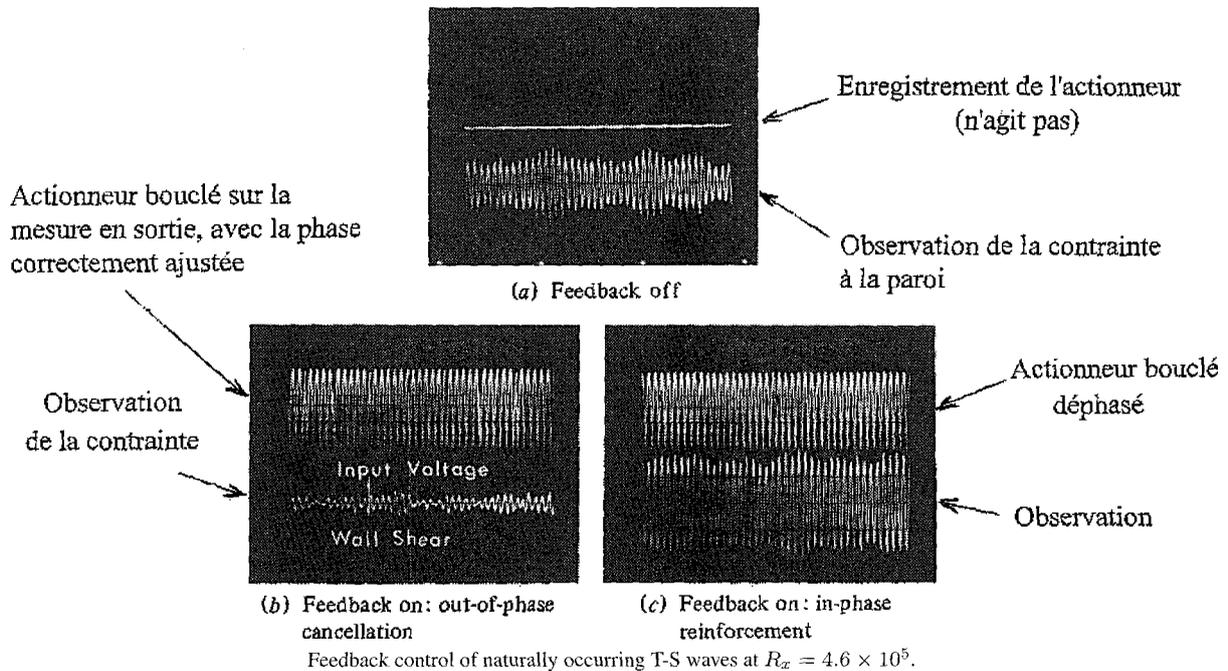


Figure 4. – Effet du Contrôle en boucle fermée (d'après Liepmann *et al.* 1982).

Ce qu'il est amusant de constater, dans la littérature sur ce sujet en Mécanique des Fluides, c'est qu'aucun de ces concepts, familiers en théorie des systèmes et en contrôle, n'est utilisé en général. Ce n'est que récemment [Joshi *et al.* (1997)] que ces concepts ont été employés pour comprendre l'effet d'une action en boucle fermée : dans le cas d'un écoulement de Poiseuille plan (approximation 2D) sur lequel mesures et actions ont lieu à la paroi, il est montré comment l'analyse du déplacement des pôles de la fonction de transfert par bouclage permet de choisir les positions relatives des capteurs et des actionneurs sur la paroi, ainsi que le gain de la contre-réaction linéaire envisagée.

Des travaux [Tang et Bau, 1993a, 1993b] ont été menés, dans le même esprit que ceux de Joshi, sur des couches horizontales fluides ou poreuses soumises à un chauffage déstabilisant sur leur paroi inférieure : les valeurs propres des équations linéarisées du mouvement, écrites sur la base des modes spatiaux, sont fonction du bouclage proportionnel envisagé entre températures dans la couche et chauffages localisés à la paroi ; le contrôle permet donc de déplacer ces valeurs propres et il est choisi de façon à stabiliser ces modes en temps, en imposant une partie réelle négative aux valeurs propres.

L'intérêt de ce type d'études par perturbations linéaires est grand dans la mesure où elles permettent d'utiliser des résultats connus (systèmes à nombre fini de dimensions) ou démontrables sur les équations aux dérivées partielles (Abergel *et al.*, 1990 en contrôle. De plus, l'analyse du déplacement des pôles du système et de l'allure des vecteurs propres les plus instables permet une compréhension physique des phénomènes très importante pour le passage à l'expérience. Ceci est la raison pour laquelle nous allons entrer relativement en détail dans l'analyse des travaux de Joshi *et al.* (1997).

Cependant, la réalisation pratique reste très difficile. Bien que les progrès remarquables sur la miniaturisation et la fiabilité des capteurs et des actionneurs soient incontestables, la complexité des systèmes à contrôler se manifeste expérimentalement de maintes façons :

- les analyses théoriques font toujours des hypothèses simplificatrices sur la géométrie des écoulements et les propriétés thermophysiques des fluides,
- les mesures et les actions prévues par la théorie sont généralement continues dans l'espace, (par exemple, elles sont distribuées sur toute une paroi), alors que l'expérience introduit des capteurs et des actionneurs localisés,
- les systèmes réels sont non-linéaires, et la robustesse du contrôle proposé par l'analyse linéaire, n'est pas établie et varie suivant les cas.

Le contrôle peut être remarquablement robuste et permettre la maîtrise de situations où le chaos est établi, comme c'est le cas pour la boucle thermique verticale chauffée sur sa moitié inférieure (Singer *et al.* 1991a, 1991b). C'est la raison pour laquelle la dernière partie de notre analyse est consacrée au contrôle de la boucle thermique, qui ouvre sur le contrôle des non-linéarités et rejoint, pour une situation physique particulière, le problème posé en aéronautique du contrôle des systèmes très largement turbulents.

## 2. contrôle des petites perturbations : déplacement de la transition laminaire-turbulent

Joshi *et al.* considèrent un écoulement de Poiseuille plan (figure 5). Le fluide est supposé incompressible. Le système d'équations d'état qui régit la dynamique du système est constitué de l'équation de Navier-Stokes à laquelle est couplée l'équation de conservation de la matière dans le cas incompressible.

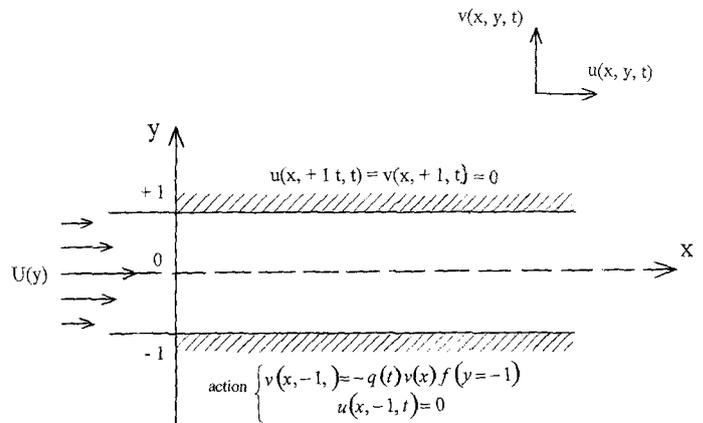


Figure 5. - Écoulement de Poiseuille plan.

On appelle  $u(x, y, t)$  et  $v(x, y, t)$  les composantes de la vitesse, dans la direction  $x'$  de l'écoulement et perpendiculairement à l'écoulement (direction  $y'y$ );  $U(y)$  est le profil de vitesse en régime de Poiseuille établi;  $H = 1$  est la demi-largeur du canal, et le Reynolds est défini par la relation  $Re = U(0)H/\nu$ , où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide.

### 2.1. dynamique des petites perturbations

La dynamique des petites perturbations  $\mathbf{u}(x, y, t), \mathbf{v}(x, y, t), \mathbf{p}(x, y, t)$  par rapport au régime de Poiseuille établi, définies par

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, t) &= U(y) - u(x, y, t) \\ \mathbf{v}(x, y, t) &= U(y) - v(x, y, t) \\ \mathbf{p}(x, y, t) &= P(x, y) - p(x, y, t) \end{aligned}$$

est décrite par les équations de Navier-Stokes et de conservations linéarisées :

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{u} / \partial t + U(y) \partial \mathbf{u} / \partial x + \mathbf{v}(x, y, t) dU(y) / dy = \\ - \partial \mathbf{p}(x, y, t) / \partial x + \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}(x, y, t) / Re \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{v} / \partial t + U(y) \partial \mathbf{v} / \partial x = \\ - \partial \mathbf{p}(x, y, t) / \partial y + \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}(x, y, t) / Re \end{aligned} \quad (2)$$

$$\partial \mathbf{u} / \partial x + \partial \mathbf{v} / \partial y = 0. \quad (3)$$

En introduisant la fonction de courant  $\psi(x, y, t)$  :

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \partial \psi(x, y, t) / \partial y \quad (4)$$

$$\mathbf{v}(x, y, t) = -\partial \psi(x, y, t) / \partial x, \quad (5)$$

les équations (1) (2) (3) se réduisent à une seule équation aux dérivées partielles du 4<sup>ème</sup> ordre qui est l'équation d'Orr-Sommerfeld.

Si le canal est infiniment long (solutions périodiques en  $x$ ) et si aucune action n'est présente (parois rigides et vitesses nulles à la

paroi), les conditions limites sont :

$$\partial\psi(x, -1, t)/\partial y = 0 \quad (7)$$

$$\partial\psi(x, 1, t)/\partial y = 0 \quad (8)$$

$$\psi(x, -1, t) = 0 \quad (9)$$

$$\psi(x, 1, t) = 0. \quad (10)$$

Si l'on se donne une condition initiale, on sait résoudre ce problème qui a une solution unique (Temam, 1984).

## 2.2. action pariétale

Si on agit en boucle ouverte sur le système, par aspiration ou soufflage sur une paroi ( $y = -1$ ), alors l'équation (7) est remplacée par

$$\mathbf{v}(x, -1, t) = -\partial\psi(x, -1, t)/\partial x \neq 0. \quad (11)$$

Si l'on suppose que cette entrée peut être représentée par une fonction séparable  $\mathbf{v}(x, -1, t) = -q(t)r(x)f(-1)$ , les conditions limites non homogènes s'écrivent :

$$\psi(x, -1, t) = q(t)w(x)f(-1), \quad (12)$$

$$\partial\psi(x, -1, t)/\partial y = q(t)w(x)\partial f(-1)/\partial y = 0, \quad (13)$$

$$\psi(x, 1, t) = 0 \quad (14)$$

$$\partial\psi(x, 1, t)/\partial y = q(t)w(x)\partial f(1)/\partial y = 0, \quad (15)$$

où  $r(x) = dw/dx$  et où  $f(y)$  doit être telle que

$$f(-1) \neq 0 \quad (16)$$

$$\partial f(-1)/\partial y = 0 \quad (17)$$

$$f(1) = 0 \quad (18)$$

$$\partial f(1)/\partial y = 0. \quad (19)$$

Le changement de variable

$$\phi(x, y, t) = \psi(x, y, t) - q(t)f(y)w(x)$$

permet alors de revenir à un problème aux conditions limites homogènes ( $\phi(x, y, t)$  vérifie les équations 7, 8, 9, 10), tout en introduisant des termes inhomogènes dans l'équation d'état. Autrement dit, on remplace l'équation d'Orr-Sommerfeld, que nous pouvons réécrire, en introduisant les opérateurs différentiels en  $x$  et  $y$  qui agissent sur le premier et le second membre, sous la forme

$$\partial(\mathbf{H}[\psi])/ \partial t = \mathbf{Z}[\psi], \quad (6)$$

par l'équation inhomogène

$$\begin{aligned} &\partial(\mathbf{H}[\psi])/ \partial t = \\ &\mathbf{Z}[\psi] + dq(t)/dt \mathbf{S}[w(x)f(y)] + q(t) \mathbf{R}[w(x)f(y)U(y)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Si l'on écrit la fonction  $\phi(x, y, t)$  sous la forme

$$\phi(x, y, t) = \sum \sum \mathbf{a}_{nm}(t) \exp(inkx) \Gamma_m(y), \quad (21)$$

la projection de (20) sur la base  $\exp(inkx)\Gamma_m(y)$  fait apparaître une série d'équations différentielles indépendantes caractérisant le mode  $n$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n dA_n(t)/dt &= \mathbf{Z}_n A_n(t) + \mathbf{S}_n dq/dt + \mathbf{R}_n q(t), \\ &\text{pour tout } n \text{ entier,} \end{aligned} \quad (22)$$

où  $A_n(t)$  est le vecteur de composantes  $\mathbf{a}_{nm}$  caractérisant le mode spatial  $n$  et  $\mathbf{H}_n, \mathbf{Z}_n, \mathbf{S}_n$  et  $\mathbf{R}_n$  sont des matrices, agissant sur le vecteur  $A_n(t)$  ou sur la fonction  $q(t)$ , écrites sur la base des fonctions  $\Gamma_m(y)$ .

L'évolution de chaque mode spatial est découplée de celle des autres modes, les opérateurs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{Z}$  étant des opérateurs différentiels linéaires.

## 2.3. caractéristiques de la solution en boucle ouverte

L'analyse de stabilité linéaire classique en Mécanique des fluides consiste à étudier (22) en l'absence des deux termes de contrôle et à chercher les valeurs propres et vecteurs propres de cette équation différentielle en temps. Dans le cas particulier que nous présentons ici, il s'agit, comme nous l'avons déjà dit, de l'équation d'Orr-Sommerfeld [Drazin, 1981]. L'évolution correspondante du vecteur  $A_n(t)$  à partir d'un état initial  $A_n(0)$  peut s'écrire formellement

$$A_n(t) = (1/2\pi) \int \{\mathbf{H}_n A(o) \exp(pt) / (p\mathbf{H}_n - \mathbf{Z}_n)\} dp, \quad (23)$$

où le contour de l'intégrale dans l'espace complexe de  $p$  est parallèle à l'axe imaginaire.

Si maintenant on s'intéresse à la solution de (22), c'est-à-dire à l'évolution de  $A_n(t)$  lorsque le système est soumis à une action  $q(t)$  (action sur la vitesse orthogonale à la paroi inférieure), on peut écrire formellement

$$\begin{aligned} A_n(t) &= (1/2\pi) \int \{[\mathbf{S}_n.p.ql(p) + \mathbf{R}_n.ql(p)] \cdot \\ &\exp(pt) / (p\mathbf{H}_n - \mathbf{Z}_n)\} dp, \end{aligned} \quad (24)$$

où  $ql(p)$  est la transformée de Laplace de  $q(t)$ . Dans les deux cas (23) et (24), la solution apparaît comme une somme des résidus des pôles de l'intégrand. Ceux-ci divergent avec le temps si  $\text{Re}(p) > 0$ , c'est-à-dire si l'équation aux valeurs propres  $\|p\mathbf{H}_n - \mathbf{Z}_n\|$  a des solutions à partie réelle positive, qui ne disparaissent pas par simplification avec les zéros du numérateur de l'intégrand. On voit donc que, en boucle ouverte, l'approche théorique du contrôle de la stabilité consiste en un choix judicieux du terme

entre crochets dans l'intégrale afin de faire disparaître les pôles les plus instables. On comprend aussi que la technique expérimentale de Liepmann *et al.* (1982), qui consiste à faire disparaître une onde TS croissante, relève d'une approche du même ordre, même si l'action résulte apparemment d'une boucle fermée qui détecte la phase de l'onde par une mesure : en effet les dés sont pipés, car on connaît *a priori* le mode excité.

## 2.4. Observation

En pratique, l'observation est localisée dans l'espace. On admettra, pour simplifier, qu'on peut la localiser en un point  $\mathbf{x}$ . S'il s'agit de la contrainte à la paroi en  $\mathbf{x}$ , l'observation s'écrit alors

$$Y(\mathbf{x}, -1, t) = \partial u(\mathbf{x}, -1, t) / \partial y$$

soit

$$Y(\mathbf{x}, -1, t) = \sum \sum \mathbf{a} n m(t) \exp(\mathbf{i} n k \mathbf{x}) (\Gamma m(y = -1))'' + q(t) (f(y = -1))'' w(\mathbf{x}) + \text{termes d'ordre supérieur.} \quad (25)$$

Rappelons tout d'abord que  $w(x)$  caractérise le comportement de l'action en  $x$  (eq. (11) et (12)) :  $w(x) = \sum w_n(x) \exp(\mathbf{i} n k x)$ . Exciter un mode  $n$  suppose une action sur la paroi, par soufflage-aspiration, répartie sur quelques longueurs d'onde du mode à exciter. Des excitations ponctuelles superposeront un grand nombre de mode.

Quant à la formulation (25) de la variable d'observation, elle montre que :

- l'on observe normalement la superposition des modes excités, à moins qu'un mode dominant l'emporte sur les autres.
- déplacer le capteur c'est changer la phase différemment pour chaque mode; l'effet est donc simple si un seul mode est excité, mais il devient vite complexe autrement.
- pratiquement, l'observation intègre des effets non linéaires avec transfert d'énergie d'un mode à l'autre.

Toutes ces remarques mettent en évidence la difficulté d'une réalisation pratique du contrôle et l'intérêt de démonstrations expérimentales de faisabilité dans des situations où l'on peut sélectionner les modes dominants des perturbations.

## 2.5. boucle fermée

Lorsqu'on réduit l'analyse au mode le plus instable, il est possible d'optimiser la position du capteur afin d'ajuster, en fait, le déphasage d'une contre-réaction de gain réel  $K$ . Celle-ci, dans l'étude de Joshi *et al.*, est définie par un bouclage de la mesure  $Y(\mathbf{x}, -1, t)$  (eq. 25) sur la dérivée temporelle de l'amplitude de la vitesse de soufflage :

$$dq(t)/dt = -KY(\mathbf{x}, -1, t).$$

Dans la mesure où un seul mode est présent, ce bouclage introduit un déphasage  $n k x$ .

On raisonne alors comme dans un problème classique de placement des pôles de la fonction de transfert du système bouclé, en jouant sur  $K$  et surtout sur la phase. On montre [Joshi (1997)], dans le cas qui nous intéresse ici, que, si le capteur de contrainte observe le mode le plus instable, provoqué par le soufflage-aspiration à la paroi, dans les zones de soufflage maximum, la stabilisation est obtenue sans problème, même avec des gains  $K$  élevés. Par contre, une contre-réaction utilisant un capteur de contrainte localisé dans une zone de perturbation minimale de la vitesse perpendiculaire à la paroi ne peut que déstabiliser davantage le système.

## 2.6. autres contrôles pariétaux d'un écoulement de Poiseuille

D'autres contrôles en boucle fermée d'un écoulement de Poiseuille ont été étudiés, en particulier par des éléments chauffants pariétaux qui agissent localement sur la viscosité [Hu et Bau 1994] en réaction à des mesures de cisaillement pariétal. L'analyse que nous avons faite de cette approche montre en particulier qu'à nombres de Prandtl élevés, pour lesquels la chaleur est transportée à partir de la paroi moins facilement que le moment cinétique, le contrôle agit pour diminuer la viscosité au voisinage de la paroi dès que la contrainte est trop importante, permettant un glissement du fluide à la paroi, sans perturber de façon notable la viscosité du fluide au delà. On peut ainsi, en théorie, considérablement déplacer le seuil de stabilité linéaire, si l'on choisit correctement le gain proportionnel utilisé.

# 3. contrôle en boucle fermée de systèmes chaotiques : exemple de la boucle thermique

Une boucle thermique fonctionne par convection naturelle, par chauffage sur sa partie inférieure et refroidissement de sa partie supérieure. Une des applications essentielles des boucles thermiques est l'extraction de la chaleur d'un réacteur nucléaire en cas d'incident.

Le problème de contrôle posé est de parvenir à extraire de très grandes puissances, très au-delà du seuil critique, tout en maintenant un régime laminaire c'est-à-dire un écoulement stable monodirectionnel [Singer 1991a, 1991b].

Dans l'expérience de Singer *et al.*, le fluide est de l'eau; le refroidissement est assuré par une enveloppe entourant la moitié supérieure de la boucle, où circule un fluide réfrigérant à température et débit donnés. La puissance de refroidissement n'est donc pas la variable de contrôle. Celle-ci est la puissance de chauffe ou, plus exactement, la puissance électrique fournie à un réseau de résistances chauffantes réparties uniformément sur la moitié inférieure de la boucle (figure 6). La variable d'observation utilisée pour informer l'actionneur par contre-réaction est l'écart de température vertical (T6-T12). Lorsque cet écart est supérieur ou inférieur à une consigne, le chauffage est augmenté ou diminué d'une valeur déterminée. En effet si le fluide circule trop lentement, la différence de températures entre le bas et le haut de la boucle est trop élevée, et il faut donc accroître sa vitesse en augmentant la puissance de chauffe.

Le signe de la différence de température horizontale (T9-T3) est un indicateur du sens de rotation du fluide; son amplitude est d'autant plus grande que le fluide circule lentement. Au-delà d'une certaine amplitude de l'écart horizontal de température la vitesse a tellement faibli que la probabilité pour l'écoulement d'inverser son sens de rotation est très élevée, comme on le voit sur la figure 7. L'enregistrement de la figure 7 est fait pour une puissance de chauffe constante (situation sans contrôle) de 600 W, alors que le seuil critique se situe à 190 W.

Lorsque la contre-réaction est activée, l'observation de (T9-T3) montre la stabilisation (figure 8) de cet écart autour d'une valeur qui correspond à la consigne imposée sur l'écart de température vertical. Il faut souligner ici que l'écoulement qui a été stabilisé était chaotique (figure 7). On peut montrer [Singer *et al.* 1991b] que les équations décrivant la dynamique du système peuvent être réduites à un ensemble de trois équations, qui sont les équations de Lorenz :

$$du/dt = P(c - u) \tag{26}$$

$$dc/dt = -us - c + RaW1 \tag{27}$$

$$ds/dt = uc - s + RaW1. \tag{28}$$

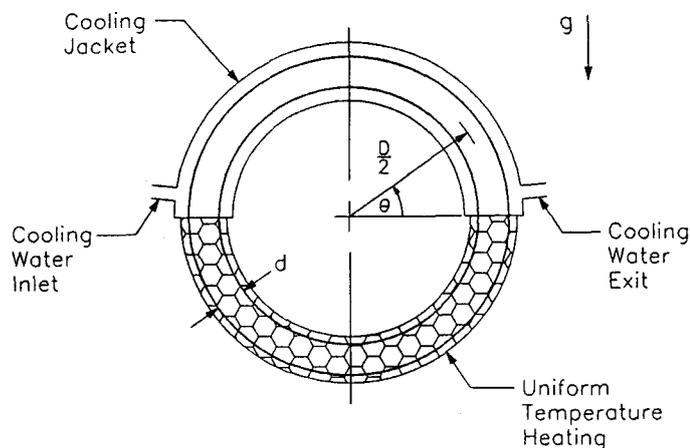


Figure 6. – Schéma de la boucle thermique (d'après Singer *et al.* 1991b)

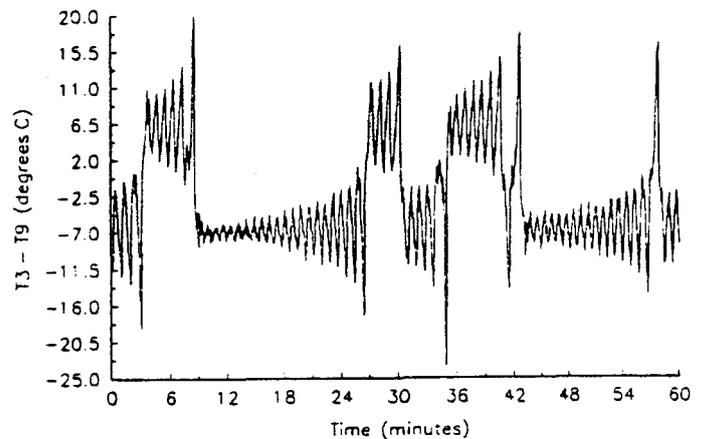


Figure 7. – Différence de température observée expérimentalement entre les deux positions opposées (9 et 3) sur l'axe horizontal de la boucle. Le chauffage, d'une puissance de 600 W, est constant, sans contrôle (d'après Singer *et al.* 1991a).

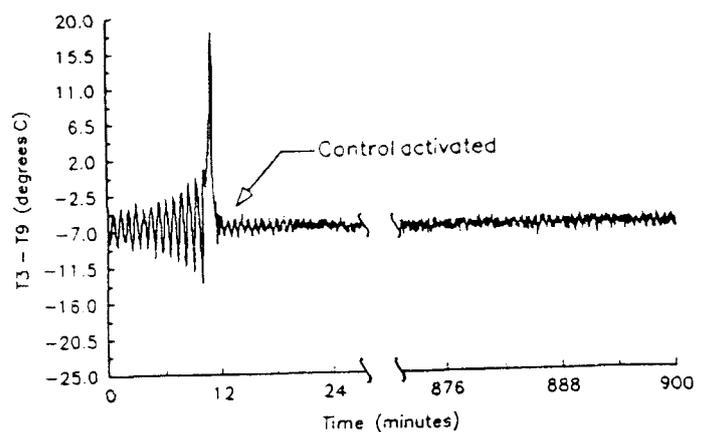


Figure 8. – Différence de température observée expérimentalement entre les deux positions opposées (9 et 3) sur l'axe horizontal de la boucle. Le contrôleur a été mis en marche au bout de 12,5 minutes (d'après Singer *et al.* 1991a).

Ces équations sont obtenues à partir des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, dans lesquelles on a introduit un développement de Fourier, en fonction de l'angle, des perturbations des température du fluide et de la paroi : les termes du premier ordre sont solutions d'un ensemble de trois équations indépendantes des termes d'ordre supérieur (fermeture exacte). Ces trois équations sont les équations de Lorenz.

Les inconnues  $u, c, s$ , sont respectivement, à une constante près liée aux paramètres thermo-physiques du système, la vitesse de rotation du fluide, la première composante antisymétrique et la première composante symétrique de la température du fluide. Donc  $c$  est proportionnelle à  $T_9 - T_3$  et  $s$  est proportionnelle à  $T_6 - T_{12}$ .  $P = 8Pr/Nu$ , où  $Pr$  est le rapport de la viscosité cinématique du fluide à sa diffusivité thermique, et où  $Nu$  est

le rapport des échanges convectifs entre fluide et paroi aux échanges diffusifs entre fluide et paroi.  $Ra$  est le nombre de Rayleigh : il caractérise le rapport des forces d'Archimède aux forces visqueuses dans la boucle.  $V1$  et  $W1$  sont les composantes du 1<sup>er</sup> ordre, respectivement antisymétrique et symétrique, de la perturbation de la température de la paroi. Elles caractérisent donc l'action à laquelle est soumise la boucle.

Sans contrôle, à chauffage constant de la moitié inférieure de la boucle,  $V1 = 0$  et  $W1$  a une valeur constante. Avec un contrôle en boucle fermée sur le chauffage de la moitié inférieure de la boucle c'est-à-dire sur  $W1$ , par contre-réaction de  $T6 - T12$ ,  $W1$  est remplacé par une expression linéaire en  $s$ .

Les équations de Lorenz, sans contrôle, ont fait l'objet de très nombreuses études : leurs solutions vont, suivant les valeurs des paramètres  $P$  et  $Ra$ , de l'immobilité aux mouvements périodiques de fréquences multiples en passant par le régime de rotation indépendant du temps et le régime chaotique de rotations de vitesses variées. Par contre en présence d'un contrôle en boucle fermée, les seuls résultats sont expérimentaux et numériques et il montrent la possibilité d'effets remarquables, tels que la stabilisation du système dans une solution de rotation indépendante du temps très au-dessus du seuil critique, que nous sommes incapables d'expliquer théoriquement.

## 4. conclusion

Cette dernière remarque, sur le cas particulier de la boucle thermique, nous oriente vers des perspectives beaucoup plus larges quant aux enjeux et aux conséquences théoriques des études de contrôle en Mécanique des Fluides que ne le font apparaître *a priori* les études linéaires de déplacement de seuil : dans de nombreuses situations, le contrôle est robuste très au-delà de ce seuil. Là où la théorie est encore impuissante, l'expérience, maintenant de plus en plus accessible grâce aux progrès des capteurs et des actionneurs (miniaturisation et fiabilité), fournit des résultats qui enrichissent considérablement notre connaissance de ces systèmes.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. Abergel, R. Teman, 1990, On Some Control Problems in Fluid Mechanics, *Theor. Comput. Fluid. Dyn.*, 1, 303.
- [2] T. Bewley, P. Moin, 1994, Optimal Control of Turbulent Channel Flows, *In Active Control of Vibration and Noise* (ed. K.W. Wang, A.H. Von Flotow, R. Shoureshi, E.W. Hendricks & T.W. Farabee). ASME DE-Vol. 75.
- [3] H. Choi, P. Moin, J. Kim, 1994 : Active Turbulence Control for Drag Reduction in Wall-Bounded Flows, *J. Fluid Mech.* 262, 75.
- [4] P.G. Drazin, W.H. Reid. Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press.
- [5] D.C. Hill, 1995, *J. Fluid Mech.*, 292, p. 183-204.
- [6] H.H. Hu, H.H. Bau, 1994, Proc R. Soc. Lond, A, 447, p. 299-312.
- [7] S. Joshi, J.L. Speyer, J. Kim, 1997, *J. Fluid Mech.*, 332, p. 157-184.
- [8] H.W. Liepmann, G.L. Brown, D.M. Nosenchuck, 1982 a, *J. Fluid Mech.* 118, p. 187-200.
- [9] H.W. Liepmann, D.M. Nosenchuck, 1982b, *J. Fluid Mech.*, 118, p. 201-204.
- [10] J. Singer, Y.Z. Wang et H.H. Bau, 1991a, *Physical Review Letters* 66, 9, p. 1123-1125.
- [11] J. Singer, H.H. Bau, 1991b, *Phys. Fluids A3*, 12, p. 2859-2865.
- [12] G.B. Schubauer, H.K. Skramstad, 1947, *J. Aeronaut. Sci.* 14, p. 68-78.
- [13] J. Tang et H.H. Bau, 1993a : Stabilization of the No-Motion State in Rayleigh-Bénard Convection Through the Use of Feedback Control, *Physical Review Letters*, 70, p. 1795-1798.
- [14] J. Tang, H.H. Bau, 1993b, Feedback Control Stabilization of the No-Motion State of a Fluid Confined in a Horizontal Porous Layer Heated From Below, *J. Fluid Mechanics*, 257, p. 485-505.
- [15] R. Teman, 1984, Navier-Stokes Equations, North-Holland.

Manuscrit reçu le 19 mars 1999.

### L'AUTEUR

Christine BÉNARD



Directeur de recherche au CNRS, a travaillé en Optique Quantique avec Bernard Picinbono avant de créer un laboratoire orienté vers les phénomènes de transferts (masse, chaleur) et leur contrôle : laboratoire FAST, à Orsay.

Elle assure, depuis octobre 1992, la direction de la recherche et des études scientifiques à l'École Normale Supérieure, en parallèle avec la poursuite de ses recherches sur le contrôle des phénomènes de convection d'une part et sur la cinétique de solidification des matériaux binaires d'autres part.