

Temps mort d'entrée dans les processus ponctuels

Input dead time in point processes

Bernard Picinbono

Laboratoire des Signaux et Systèmes¹, Supélec, Plateau de Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette
bernard.picinbono@lss.supelec.fr

Manuscrit reçu le 30 avril 2007

Résumé et mots clés

Toute mesure sur un processus ponctuel introduit un temps mort. Celui d'entrée est caractérisé par le fait que tout point du processus observé engendre un intervalle qui peut être aléatoire et tel que tout point postérieur tombant dans cet intervalle est éliminé. Par cette élimination on obtient un nouveau processus ponctuel qui est étudié. Les calculs théoriques étant en général inextricables une approche expérimentale est présentée. Un algorithme récursif permettant d'associer à tout processus ponctuel celui qui s'en déduit par temps mort d'entrée est proposé et diverses propriétés de ce processus sont analysées. Dans les quelques cas où les calculs sont possibles les résultats expérimentaux sont en plein accord avec la théorie. Le dispositif est alors utilisé pour l'analyse de l'effet de temps mort dans divers processus. On étudie en particulier ceux dont le temps de vie a une distribution exponentielle, qu'ils soient de renouvellement (Poisson) ou non, et aussi ceux où cette distribution est uniforme.

Processus ponctuels, temps mort, temps de vie, processus de renouvellement.

Abstract and key words

Dead time effects appear in any measurements on a point process. Input dead time is characterized by the fact that any point of the observed process introduces an interval that can be random such that any point appearing in this interval is deleted. This yields a new point process which is analyzed. The theoretical calculations of its properties are in general almost impossible, which justifies an experimental approach. An experimental setup generating input dead time and analyzing the properties of the process after this dead time is presented. In the rare cases where calculations are possible the experimental results are in excellent agreement with the theory. This method is used for the analysis of various point processes. It is especially the case of point process in which the life time has an exponential or an uniform distribution.

Point processes, Dead time, Life time, Renewal processes.

¹ Unité mixte de recherche (UMR 8506) du Centre national de la recherche scientifique (CNRS), de l'École supérieure d'électricité (Supélec) et de l'Université de Paris-Sud 11 (UPS).

1. Introduction

Un processus ponctuel (PP) est une distribution aléatoire de points dans un espace. Si ce dernier est l'axe des temps, on dit qu'il s'agit d'un PP temporel, ce que l'on suppose dans toute la suite. Ses points sont donc des instants t_i parfois dénommés événements. Les PP apparaissent dans un très grand nombre de domaines qu'il serait fastidieux de présenter de manière exhaustive. Citons simplement quelques exemples. À l'échelle microscopique la nature discontinue de la matière et de l'énergie introduit un très grand nombre de PP. Ainsi la pression d'un gaz ou l'intensité d'un courant sont des phénomènes macroscopiques traduisant des fluctuations microscopiques de molécules ou d'électrons qui, analysées en détail, se décrivent par des PP. C'est en particulier le cas de l'effet de grenaille traduisant l'influence de la distribution aléatoire des électrons au cours du temps sur un filtre linéaire. On rencontre également des PP à l'échelle macroscopique et par exemple la suite des instants où un appel téléphonique arrive à un central de traitement constitue un PP.

Il n'y a pas d'observation de PP sans temps mort (TM). Ceci signifie simplement que, quel que soit le dispositif d'analyse utilisé, il arrive toujours une limite où deux instants trop rapprochés du PP ne peuvent être distingués. Cette limitation est l'analogie dans le domaine du temps de celle causée dans le domaine des fréquences par la limitation de bande rencontrée dans tout système linéaire. Par contre on voit aisément qu'il peut y avoir bien des mécanismes différents de TM. Ainsi dans l'exemple qui vient d'être cité on peut avoir la suppression des deux points trop rapprochés, l'élimination de l'un et la conservation de l'autre ou encore d'autres combinaisons. Le phénomène de TM modifie évidemment le PP observé, que nous appellerons PP d'entrée, et le transforme en un autre PP qui, par symétrie, sera dénommé PP de sortie. Il est constitué de tous les points du PP d'entrée qui n'ont pas été éliminés par effet de TM. La relation entrée-sortie dans ce phénomène dépend évidemment du mécanisme de TM. Parmi tous ceux possibles, les deux plus courants sont le TM d'entrée et celui de sortie. Nous n'étudierons ici que le premier, plus facile à analyser expérimentalement. Ceci provient du fait que dans ce cas tous les points du PP d'entrée contribuent au phénomène de TM alors que pour le TM de sortie seuls les points non effacés contribuent au blocage du système.

Il y a toutefois plusieurs mécanismes de TM d'entrée liés à la mémoire possible de leur effet. Le plus radical, dit à mémoire infinie, se manifeste ainsi : tout point t_i du PP d'entrée génère un intervalle de temps $[t_i, t_i + D_i[$, dont la longueur D_i peut être aléatoire, et pendant lequel le système est bloqué, ce qui signifie que tous les points du PP arrivant pendant cet intervalle sont éliminés. Dans la littérature de langue anglaise on y fait référence par l'expression de « *type II counter* » [1].

Dans ce type de TM il est clair qu'un point du PP d'entrée peut être effacé par n'importe quel point qui lui est antérieur, aussi lointain dans le passé soit-il. Il suffit pour cela que la valeur cor-

respondante D_i du TM qui lui est associée soit suffisamment grande. Mais cette situation est parfois irréaliste ce qui conduit à introduire un phénomène de TM à mémoire finie. Dans ce cas un point du PP d'entrée ne peut être effacé que par l'effet de points suffisamment récents. Cet effet de mémoire conduit à des mécanismes différents que nous analyserons plus en détail.

Le TM d'entrée peut être très gênant. On voit en particulier immédiatement que si le processus d'entrée est très dense presque tous ses points sont éliminés par TM d'entrée, ce qui engendre le phénomène classique d'engorgement dont nous subissons très souvent les effets.

Le but de cet article consiste à analyser les effets du TM d'entrée sur un PP. Pour ceci on part de l'idée suivante. Tout PP peut se décrire soit par la statistique des nombres de ses points dans des intervalles disjoints (méthode des comptages), soit par l'étude des intervalles entre points (ou instants) successifs dénommés *temps de vie* [1, 2]. C'est cette seconde approche que nous utilisons ici. Ainsi les temps de vie du PP d'entrée constituent un signal positif x_i à temps discret et par TM il se transforme en un autre signal du même type y_i définissant les temps de vie du PP de sortie (ou après TM). Le phénomène de TM crée une relation entre l'entrée x_i et la sortie y_i et l'on se propose d'étudier certaines propriétés statistiques de la sortie en fonction de celles de l'entrée. Cette approche est particulièrement bien adaptée aux processus de renouvellement puisque dans ce cas les temps de vie x_i sont des variables aléatoires (VA) indépendantes et de même loi (IID) et constituent donc un bruit blanc au sens strict.

L'analyse théorique du phénomène est pratiquement impossible sauf dans un nombre très limité de cas. C'est pourquoi nous proposons une approche expérimentale, les quelques résultats théoriques connus ayant simplement pour but d'en valider la pertinence. La première chose consiste à étudier la relation entrée-sortie du système de TM transformant x_i en y_i . Il n'y a pas de forme explicite de cette relation mais nous présentons un algorithme récursif permettant ce calcul. Le signal y_i décrivant entièrement le PP après TM, il s'agit alors d'en déterminer les principales propriétés statistiques. Pour simplifier on suppose que le PP d'entrée et le mécanisme de TM sont stationnaires. Il en est donc de même du PP de sortie et l'on peut tout d'abord s'intéresser aux propriétés à un instant, c'est-à-dire à celles des VA unidimensionnelles y_i . On étudiera en particulier leur moyenne, leur variance et leur densité de probabilité (DDP). L'analyse à deux instants peut se présenter sous deux aspects. On peut d'abord mesurer la fonction de coïncidence du PP et un algorithme permettant de le faire a été étudié par ailleurs [3]. Cette fonction de coïncidence définit les propriétés du second ordre du PP et en particulier permet par transformation de Fourier d'obtenir le spectre d'entrée, parfois dénommé spectre de Bartlett [4, 5]. Mais on peut également s'intéresser à la corrélation entre les échantillons y_i du signal de sortie. Il importe de ne pas confondre ces deux types de corrélation. Si le processus de sortie est de renouvellement, les VA y_i sont IID et donc y_i est un bruit blanc au sens strict. Dans ce cas toutes les propriétés statistiques du PP de sortie sont décrites à partir de leur DDP. Mais cela ne veut pas

dire que le spectre d'entrée du PP soit blanc et même si sa connaissance peut se déduire de manière plus ou moins complexe de la DDP des y_i le décrivant entièrement, sa mesure directe est aussi intéressante. Ceci est évidemment encore beaucoup plus vrai s'il ne s'agit pas d'un processus de renouvellement car le calcul théorique de la fonction de coïncidence est alors presque toujours pratiquement impossible.

2. Relation entrée-sortie des temps morts

Soit \mathcal{P} un PP stationnaire de densité μ dont les points sont dénotés t_i . Les temps de vie de ce PP, distances entre points successifs, sont dénotés x_i , soit $x_i = t_i - t_{i-1}$. Le phénomène de TM élimine certains de ces points et ceux qui ne le sont pas sont dénommés θ_i . Ils sont les points d'un nouveau PP \mathcal{P}' , dit PP après temps mort, ou PP de sortie. Si le mécanisme de TM est stationnaire, \mathcal{P}' l'est également et sa densité λ satisfait évidemment $\lambda \leq \mu$. Si le point t_i n'est pas effacé, on pose $\theta_i = t_i$. Si le point suivant t_{i+1} est effacé, on pose $\theta_{i+1} = \theta_i = t_i$, ce qui signifie qu'un point θ_i peut provenir de plusieurs points t_i , et l'on dit alors que θ_i est un point multiple. Soit $y_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ la distance entre deux points θ_i . Le mécanisme de TM associe donc à toute VA positive x_i une VA non négative y_i . Les valeurs nulles de y_i correspondent aux points multiples.

2.1. Calcul des temps de vie y_i à partir des x_i et D_i

À chaque instant t_i de \mathcal{P} on associe un *coefficient de rétention* (CR) R_i qui ne dépend que du passé observé du PP et des TM antérieurs, c'est-à-dire des x_j et D_j avec $j \leq i$. Ce CR ne prend que les valeurs 0 ou 1 selon que le point t_i est respectivement effacé ou retenu. Par ailleurs il est commode d'introduire son complémentaire $\bar{R}_i = 1 - R_i$ valant aussi 0 ou 1 selon que t_i est respectivement retenu ou effacé.

On va d'abord montrer que la connaissance des CR permet le calcul des temps de vie y_i . Soit t_i un point de \mathcal{P} qui n'est pas effacé, ce qui signifie que $R_i = 1$. Si $R_{i+1} = 1$ le point suivant t_{i+1} n'est pas effacé et l'on a donc $y_{i+1} = x_{i+1}$. Supposons au contraire que $R_{i+1} = 0$, ce qui signifie que t_{i+1} est effacé. Il faut alors considérer le point suivant t_{i+2} . Si $R_{i+2} = 1$, ce point t_{i+2} n'est pas effacé et l'on a donc dans ce cas $\theta_i = \theta_{i+1} = t_i$ et $\theta_{i+2} = t_{i+2}$. Donc les distances y_i entre points θ_i valent $y_{i+1} = 0$ et $y_{i+2} = x_{i+1} + x_{i+2}$.

On peut continuer le raisonnement. Supposons encore que t_i ne soit pas effacé mais que les points t_{i+k} , $1 \leq k < p$ le soient parce que $R_{i+k} = 0$ et que t_{i+p} soit le premier point non effacé postérieur à t_i , donc tel que $R_{i+p} = 1$. Dans ce cas nous avons

$$y_{i+k} = 0 \text{ si } 1 \leq k < p ; y_{i+p} = x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_{i+p}. \quad (1)$$

Il faut alors calculer ce terme. Pour ceci on introduit un signal intermédiaire s_i égal à la somme des x_i quand les t_i sont effacés et revenant à zéro lorsque t_i n'est pas effacé. Il s'agit donc d'un signal croissant sauf lorsqu'un point t_i n'est pas effacé, et dans ce cas sa valeur est nulle. Ce signal s_i se construit de manière récursive par l'algorithme suivant

$$s_1 = \bar{R}_1 x_1 \quad , \quad s_i = \bar{R}_i (s_{i-1} + x_i). \quad (2)$$

On voit évidemment que s_i croît quand $R_i = 0$ et s'annule quand $R_i = 1$.

À partir du signal s_i on construit le temps de vie y_i de manière récursive par l'algorithme suivant

$$y_1 = R_1 x_1 \quad , \quad y_i = R_i (s_{i-1} + x_i). \quad (3)$$

Il est facile de vérifier que l'on retrouve ainsi le résultat indiqué dans (1).

Il reste maintenant à calculer les CR R_i apparaissant dans toutes les formules précédentes.

2.2. Calcul des coefficients de rétention

Pour ce calcul il faut tenir compte de l'influence d'un effet de mémoire dans le TM d'entrée déjà mentionné ci-dessus. Pour le préciser on commence par le cas le plus simple, dit de mémoire d'ordre un.

2.2.1. Temps mort d'entrée à mémoire d'ordre un

Dans cette situation seul l'instant t_{i-1} peut contribuer à l'effacement éventuel de t_i . En clair il y a effacement si ces deux points sont trop proches avec le temps mort de valeur D_{i-1} associé au point t_{i-1} . En conséquence le CR vaut $R_i^{[1]} = u(x_i - D_{i-1})$, où $u(x)$ est la fonction échelon unité égale à 1 si $x > 0$ et 0 dans le cas contraire.

2.2.2. Temps morts d'entrée à mémoire d'ordre supérieur à un

Commençons par l'ordre deux. Dans ce cas il faut considérer les instants t_{i-1} et t_{i-2} pour savoir si t_i est effacé ou non, c'est-à-dire pour calculer le CR $R_i^{[2]}$. Comme la distance de t_{i-2} à t_i vaut $x_{i-1} + x_i$, le point t_i ne sera pas effacé par t_{i-2} si $x_{i-1} + x_i - D_{i-2} > 0$ et pas effacé par t_{i-1} si $x_i - D_{i-1} > 0$, de sorte que $R_i^{[2]} = u(x_i - D_{i-1}).u(x_i + x_{i-1} - D_{i-2})$.

Par une généralisation évidente le CR du TM d'ordre k noté $\text{TM}(k)$ vaut

$$R_i^{[k]} = u(x_i - D_{i-1}).u(x_i + x_{i-1} - D_{i-2}) \dots u(x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-k+1} - D_{i-k}). \quad (4)$$

Il s'agit donc d'un produit de k fonctions échelon unité prenant en compte l'effet de TM possible des k points t_j précédant t_i .

2.2.3. Temps mort d'entrée à mémoire infinie

Dans ce cas tous les points du passé, aussi lointain soit-il, peuvent intervenir dans l'effacement éventuel du point t_i , et il suffit alors de prolonger la formule précédente depuis le point origine t_0 jusqu'à t_i . Le CR est alors un produit de i termes qui s'écrit

$$R_i^{[\infty]} = \prod_{k=1}^i u(x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-k+1} - D_{i-k}). \quad (5)$$

Ce CR décrit le phénomène de TM d'entrée le plus complet où tous les points interviennent et qui s'interprète physiquement de la manière suivante: tout point t_j du PP d'entrée introduit un intervalle de temps $[t_j, t_j + D_j]$ tel que tout point postérieur t_{j+p} du PP se trouvant dans cet intervalle est effacé. Comme l'amplitude D_j du TM est supposée aléatoire, elle peut prendre des valeurs quelconques et éventuellement très grandes, de sorte que même un point très éloigné dans le passé peut avoir une influence sur le présent.

2.2.4. Calcul et comparaison des coefficients de rétention

L'utilisation de la fonction (5) dans les expériences sur ordinateur est très coûteuse en temps calcul. On voit en effet que si l'on analyse une série de N échantillons de temps de vie x_i il faut à chaque instant t_i calculer un produit de i termes, ce qui peut devenir extrêmement long lorsque i atteint des valeurs de l'ordre de 10^5 . Il est donc important de savoir si l'on peut faire une approximation raisonnable en se contentant d'une mémoire finie.

Il y a tout d'abord un cas où la simplification est évidente: c'est celui du TM constant non aléatoire et égal à D . On voit alors sur (4) que si le premier terme du produit correspondant à $k = 1$ est positif, tous les autres le sont aussi et toutes les expressions précédentes se réduisent à celle valable pour le TM à mémoire d'ordre un. La formule de rétention (4) devint alors simplement $R_i^{[k]} = u(x_i - D)$ qui ne dépend plus de k .

Pour poursuivre l'analyse on va comparer quelques CR d'ordres croissants dans un cas particulier qui joue un rôle important dans la suite.

Considérons une suite de N VA x_i positives IID de loi exponentielle $\mu \exp(-\mu x)$. On sait alors que le PP dont ces VA sont les temps de vie est un PP de Poisson stationnaire de densité μ . On suppose que le TM d'entrée est caractérisé par des VA D_i indépendantes des x_i et qui sont aussi supposées IID, mais de loi uniforme dans l'intervalle $[D(1-r), D(1+r)]$, la DDP correspondante valant $1/2rD$ dans cet intervalle et 0 en dehors. Pour $r \rightarrow 0$ cette distribution décrit le TM constant égal à D . On suppose dans le calcul qui suit $\mu = D = 1$, ce qui signifie que le TM moyen est égal à la distance moyenne entre points du PP de Poisson. Il s'agit d'une valeur très importante de TM et dans la pratique on essaye de réaliser l'inégalité $D \ll 1/\mu$.

Notre but consiste à comparer les CR d'ordres croissants en étudiant les différences $R_i^{[k]} - R_i^{[k-1]}$. Comme ces coefficients

ne prennent que les valeurs 0 et 1, leur différence ne peut prendre que les valeurs 0 et ± 1 . On peut donc considérer que la quantité $\Delta_k = \sum_{i=1}^N (R_i^{[k]} - R_i^{[k-1]})^2$ est une bonne mesure de la différence entre $R_i^{[k]}$ et $R_i^{[k-1]}$. On présente sur le tableau suivant des résultats d'expériences réalisées avec $N = 5.10^6$ échantillons des x_i et des D_i pour diverses valeurs de r .

Tableau 1. Comparaison des coefficients de rétention.

r	0	0,3	0,5	0,7	0,9	1
Δ_2	0	26.216	70.782	135.553	220.895	271.558
Δ_3	0	1.440	6.169	16.100	31.808	42.480
Δ_4	0	71	557	1.863	4.510	6.393
Δ_5	0	0	30	181	602	928
Δ_6	0	0	4	15	68	120
Δ_7	0	0	0	3	6	14
Δ_8	0	0	0	0	0	1
Δ_9	0	0	0	0	0	0
Δ_{10}	0	0	0	0	0	0

Ce tableau appelle les commentaires suivants. On constate d'abord que, comme annoncé, pour $r = 0$, c'est-à-dire pour le TM constant, toutes les différences sont nulles, c'est-à-dire que tous les CR sont égaux à ceux d'ordre un. Par ailleurs les différences Δ_i croissent avec r . Ceci est naturel car, quand r croît, la moyenne du TM reste constante et égale à 1 mais la variance augmente. La dispersion plus grande des valeurs possibles du TM renforce l'influence d'un passé plus lointain, ce qui se traduit par l'augmentation de Δ_i . De même, pour r fixé, Δ_i décroît avec i , ce qui signifie la convergence du produit (4) vers (5). Ainsi pour $r = 0,5$ on voit que le CR d'ordre sept peut être utilisée à la place de celui d'ordre infini. Enfin il faut noter la signification des valeurs numériques. Le dernier chiffre de la ligne Δ_8 signifie que sur 5.10^6 valeurs des CR $R_i^{[8]}$ et $R_i^{[9]}$, toutes sont égales sauf une, ce qui est une précision remarquable. Enfin à partir de $k = 9$ tous les CR $R_i^{[k]}$ sont égaux à $R_i^{[9]}$, ce qui signifie que l'on peut choisir $R_i^{[9]}$ comme bonne approximation de $R_i^{[\infty]}$, ce que l'on fera dans la suite.

2.2.5. Exemple

Pour une bonne compréhension du fonctionnement des algorithmes (2) et (3) nous donnons dans le tableau suivant les dix premières valeurs des signaux D_i, x_i, s_i et y_i correspondant à une expérience réalisée comme ci-dessus avec un processus de Poisson de densité $\mu = 1$ et un TM(1) aléatoire uniformément réparti entre 0,8 et 1,2 ($D = 1, r = 0,2$). Le CR utilisé est celui d'ordre un.

Sur ce tableau on constate que les points t_3, t_4, t_5, t_6, t_9 sont effacés car pour eux $x_i < D_{i-1}$. Pour les points conservés on constate bien que $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_7 = x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7, y_8 = x_8, y_{10} = x_9 + x_{10}$.

Tableau 2. Principe du fonctionnement de l'algorithme pour un TM(1).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_i	1,0798	0,8570	1,0511	1,0525	1,0798	0,8417	1,0683	0,8352	1,0198	1,0617
x_i	1,4548	1,0970	0,1403	0,1003	0,0150	0,3399	1,6968	4,2325	0,0175	1,7114
s_i	0	0	0,1403	0,2406	0,2556	0,5955	0	0	0,0175	0
y_i	1,4548	1,0970	0	0	0	0	2,2923	4,2325	0	1,7289

3. Processus de Poisson à temps mort d'entrée

Comme on vient de l'indiquer un processus de Poisson de densité μ est défini par le fait que les temps de vie x_i sont des VA exponentielles IID de densité de probabilité $u(x)\mu \exp(-\mu x)$. La propriété fondamentale des processus de Poisson, qui permet d'ailleurs de les définir, est que les nombres de points dans des intervalles disjoints sont des VA indépendantes. Ces PP sont de loin les plus importants et plusieurs de leurs propriétés après effet de TM d'entrée peuvent être calculées. Ceci est brièvement présenté en Appendice.

C'est d'abord le cas de la densité λ . Si, comme indiqué ci-dessus, les VA D_i décrivant le TM sont IID et uniformément distribuées dans l'intervalle $[(1-r)D, (1+r)D]$, $0 \leq r \leq 1$, la densité du PP obtenu par TM(1) d'entrée d'ordre un est donnée par

$$\lambda_r = \mu \exp(-\mu D) \frac{\text{sh}(\mu Dr)}{\mu Dr} \tag{6}$$

Pour $r = 0$ on retrouve le résultat connu $\lambda_0 = \mu \exp(-\mu D)$. Une autre quantité qui se calcule aisément dans le cas $r = 0$ est la fonction de coïncidence $c(t)$. Cette fonction, dont la définition est rappelée en Appendice, caractérise les propriétés du second ordre du PP. En particulier sa transformée de Fourier est égale, à une constante additive près, à la densité spectrale d'entrée. Dans le cas du processus d'entrée de Poisson, la fonction $c(t)$ après TM constant D est nulle pour $|t| < D$ et vaut λ^2 pour $|t| > D$. Par contre il n'y a pas d'expression simple de $c(t)$ quand le TM est aléatoire.

Enfin la DDP $p_Y(y)$ du temps de vie après TM constant D , notée aussi $p_1(y)$, possède une propriété caractéristique montrée en Appendice: elle est nulle pour $0 \leq y < D$ et vaut $\mu \exp(-\mu D)$ pour $D < y < 2D$. Il n'y a pas d'expression simple pour les autres valeurs de y .

La réalisation expérimentale par ordinateur d'un processus de Poisson est très simple puisqu'il suffit de générer des VA exponentielles positives x_i IID, ce qui peut se faire par de nombreux procédés classiques. Pour atteindre une bonne précision statistique on doit choisir un nombre élevé d'échantillons x_i . Il est dans toutes nos expériences de l'ordre de 10^6 à 10^7 . Différents tests ont montré que les échantillons ainsi générés étaient effectivement de loi exponentielle et IID.

La première expérience consiste à mesurer la valeur moyenne m_y des VA y_i décrivant le PP avec un TM(1). Cette moyenne est évidemment égale à l'inverse de la densité, soit $m_y = 1/\lambda$ [1, 6]. Les résultats sont présentés sur les tableaux suivants.

On considère tout d'abord le cas du TM constant ($r = 0$) pour lequel il n'y a pas de différence entre les TM d'ordres distincts. Les expériences, comme toutes celles de ce paragraphe, sont réalisées avec un processus de Poisson de densité $\mu = 1$. On donne sur le tableau 3 la valeur théorique m_y de la moyenne du temps de vie de sortie et le résultat expérimental \hat{m}_y obtenu pour cette moyenne.

Tableau 3. Moyennes des temps de vie après TM en fonction du TM D .

D	0	0,5	1	1,5	2	2,5
m_y	1	1,6487	2,7183	4,4817	7,3891	12,1825
\hat{m}_y	1,0002	1,6483	2,7185	4,4821	7,3885	12,1802



On constate qu'il y a un très bon accord entre la théorie et l'expérience.

Considérons maintenant le cas du TM(1) aléatoire d'ordre un. Pour ceci on applique $m_y = 1/\lambda$ avec λ donné par (6). Les deux tableaux qui suivent correspondent respectivement à $D = 1$ et $D = 2$.

Tableau 4. Moyennes des temps de vie après TM(1) aléatoire en fonction de r .

r	0	0,5	1
m_y	2,7183	2,6082	2,3130
\hat{m}_y	2,7165	2,6060	2,3143

r	0	0,5	1
m_y	7,3891	6,2815	4,0746
\hat{m}_y	7,3880	6,2822	4,0719

On constate encore un bon accord entre la théorie et l'expérience et on vérifie bien que quand r croît la densité λ croît, en accord avec (6).

Comme le PP après TM est un processus de renouvellement (voir p. 102 de [1]), la mesure de la fonction de corrélation des VA y_i n'apporte aucune information. Nous avons vérifié que les VA y_i et y_{i+k} étaient effectivement décorrélées avec une précision de l'ordre de 10^{-3} pour plusieurs valeurs du TM D .

Par contre un processus de renouvellement est entièrement caractérisé par la connaissance de la DDP $p_1(y)$ des temps de vie d'ordre 1 y_i après TM. Il n'y a malheureusement pas de formule

théorique pour cette densité et seule l'approche expérimentale peut nous donner une idée de sa forme. Celle-ci est évidemment produite par un histogramme de la répartition des temps de vie y_i selon leur amplitude. La précision de ces histogrammes est d'autant plus grande que le nombre total d'échantillons analysés est grand et il est de l'ordre de 10^7 dans les expériences qui suivent. Il s'agit évidemment du nombre d'échantillons x_i et l'on a vu que du fait du TM de nombreux échantillons y_i sont nuls et ne jouent aucun rôle dans la construction des histogrammes. La précision des résultats diminue donc lorsque le TM augmente et s'il est trop élevé il n'y a plus assez d'échantillons y_i pour arriver à un histogramme correct. Dans les expériences qui suivent on a limité les valeurs du TM de sorte que le nombre d'échantillons y_i effectivement analysés, c'est-à-dire non nuls, soit au moins égal au tiers de celui des échantillons de départ x_i . Pour obtenir la DDP il suffit de normaliser les histogrammes. Il convient toutefois de noter que les courbes continues représentées sont obtenues par lissage d'histogrammes qui par nature sont discrets puisqu'ils donnent les nombres d'échantillons recueillis dans chacun de leurs canaux adjacents.

Sur la figure 1 on étudie les DDP des temps de vie $p_n(y)$ d'ordre n , $n = 1, 2$ et 3 , dans le cas du TM constant. On rappelle que le temps de vie d'ordre n dans un PP est l'intervalle aléatoire qui sépare un point de ce PP du n -ième point qui le suit. Dans le cas où le PP est de renouvellement, la DDP de ce temps de vie s'obtient par une puissance n -ième de convolution puisque les intervalles entre points successifs sont des VA IID. Dans le cas général cette DDP n'a aucune raison de se déduire simplement de celle du temps de vie d'ordre un, et la connaissance des temps de vie d'ordre supérieur à un apporte donc une information statistique nouvelle sur les propriétés du PP étudié. Dans les expériences de la figure 1 on prend toujours $\mu = 1$ et $r = 0$. Les valeurs du TM D sont $0, 0,5$ et 1 .

Pour $D = 0$, c'est-à-dire en absence de TM, les valeurs des DDP sont évidemment $\exp(-y)$, $y \exp(-y)$ et $(y^2/2) \exp(-y)$. Ces valeurs sont représentées par les signes + sur la figure 1.1. Les valeurs expérimentales issues d'histogrammes normalisés sont représentés en trait continu et on constate un excellent accord entre théorie et expérience.

Pour les deux autres valeurs de D on constate que, comme annoncé, la DDP du temps de vie d'ordre 1 est nulle pour $y < D$ et constante pour $[D, 2D]$. C'est ce qu'indique la théorie, la constante étant $\mu \exp(-\mu D)$. Pour D valant $0,5$ ou 1 on trouve respectivement $0,6065$ et $0,3679$, ce que l'on voit approximativement sur les figures 1.2 et 1.3. Une analyse plus fine de ces figures montre que ce sont exactement les valeurs qui y apparaissent. Par contre il n'y a pas d'expression simple pour la partie décroissante de la densité lorsque $y > 2D$. L'analyse en coordonnées semi logarithmiques montre qu'il ne s'agit pas d'une décroissance exponentielle. Par ailleurs il est évident que, quel que soit le PP \mathcal{P} , les DDP $p_n(y)$ du processus après TM sont nulles pour $y < nD$. On le vérifie ici pour $n = 2$ et 3 . Ces DDP n'apportent évidemment ici aucune information nouvelle puisque, en raison de l'indépendance des y_i , elles s'ob-

tiennent théoriquement par convolution à partir de la DDP du TM d'ordre 1.

Sur la figure 2 on étudie l'influence du paramètre r dans le cas du TM(1) où $D = 1$. La valeur $r = 0$ fait évidemment le lien avec la figure 1.3 précédente puisque ceci correspond au cas du TM constant égal à D . On constate sur les courbes 2 et 3 que la DDP est nulle pour $y < (1 - r)D$, ce qui se comprend très simplement. Par ailleurs ces courbes mettent en évidence l'existence d'un étalement de la DDP par l'effet du caractère aléatoire du TM.

Enfin la figure 3 représente l'évolution de la DDP dans le cas du TM(1) où $r = 1$, c'est-à-dire pour l'étalement du TM le plus important et pour les valeurs $0,1, 0,5$ et 1 de D . On constate dans les deux premiers cas une forte variation de la dérivée de cette DDP pour $y = 2D$.

Pour compléter les résultats du tableau 1 on reprend sur la figure 4 la même analyse que sur la figure 3 mais dans le cas du TM d'ordre 9. Comme on est dans le cas où $r = 1$, ce qui correspond à la dernière colonne du tableau 1, on est dans la situation où la différence entre TM d'ordre un ou d'ordre infini est la plus grande. Cette différence apparaît sur la figure, mais le forme générale des DDP reste la même.

On constate que les DDP 3.1 et 4.1 sont pratiquement identiques, et ceci est lié à la faible valeur du TM moyen D . En raison de cette faiblesse seuls les points voisins sont affectés par le TM et il n'est pas nécessaire d'introduire des TM d'ordre supérieur à un. La situation est assez semblable pour $D = 0,5$, mais il n'en est plus de même pour $D = 1$ et ici l'effet du TM ne se limite pas aux points rapprochés.

Comme on l'a indiqué, les propriétés du second ordre d'un PP sont caractérisées par sa fonction de coïncidence définie en Appendice. Des mesures de cette fonction ont été faites sur d'autres PP intervenant dans des problèmes d'optique statistique [7] et le dispositif expérimental utilisé ci-dessous a été présenté en détail dans [3]. Il est fondé sur l'analyse par histogrammes d'échantillons convenablement traités obtenus à partir des x_i .

On présente sur la figure 5 des mesures de fonction de coïncidence avec TM constant. Comme on l'a indiqué, cette fonction est nulle pour $y < D$ et vaut λ^2 pour $y > D$. Les expériences ont été réalisées avec un processus de Poisson de densité $\mu = 1$ et des TM égaux à $D = 0,5$ et $D = 1$. On trouve bien la forme attendue, les fluctuations résiduelles provenant du trop petit nombre d'échantillons analysés, pourtant déjà élevé et égal à $3,6 \cdot 10^6$. En effet, comme on l'a déjà noté, l'effet de TM élimine un grand nombre de points du PP d'entrée et même si le nombre d'échantillons de départ x_i est élevé, celui des échantillons y_i peut devenir beaucoup plus petit.

Les résultats expérimentaux sont également en accord avec la théorie du point de vue quantitatif. La figure 5 représente le résultat d'histogrammes non lissés donnant donc exactement le nombre d'échantillons apparus dans chaque cellule de l'histogramme. D'après les calculs présentés en [3] il est relié de manière simple à la fonction de coïncidence $c(y)$. L'axe des

abscisses correspondant au temps y de 0 à 3 est divisé en 300 cellules de largeur ΔT égales à 10^{-2} . On représente en ordonnées les nombres d'échantillons y_i tombant dans chaque cellule. Ces nombres sont reliés à $c(y)$ et le nombre moyen de points

dans la cellule $[y, y + \Delta T]$ vaut $kc(y)\Delta T$. La constante k vaut $\mu \exp(-\mu D)N\Delta T/S$, où N est le nombre total d'échantillons x_i analysés et S le nombre de termes utilisés dans [3] pour approximer la série (13) par une somme finie. On a utilisé ici

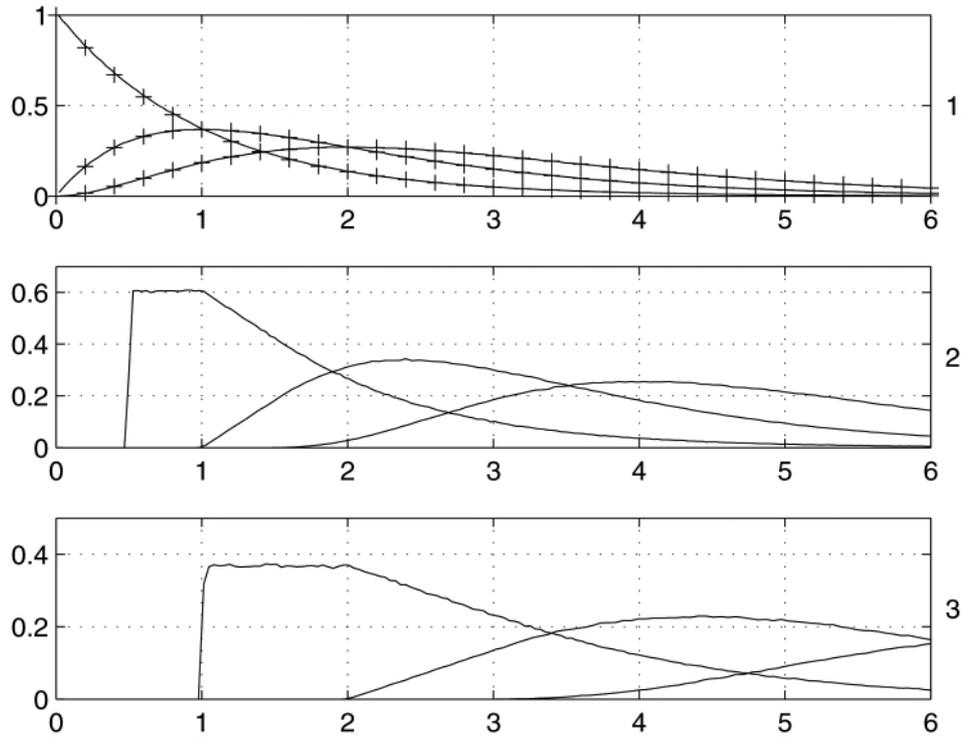


Figure 1. DDP des temps de vie d'ordre 1, 2 et 3 après TM fixe: $r = 0$.
1: $D = 0$; 2: $D = 0,5$; 3: $D = 1$.

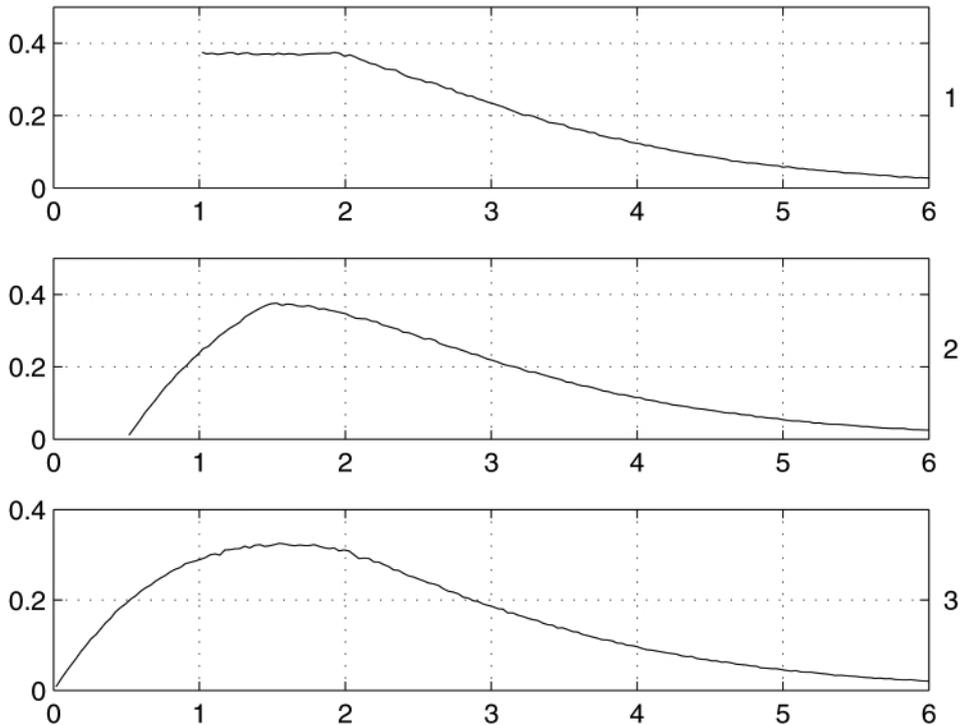


Figure 2. DDP du temps de vie d'ordre 1 après $TM(1)$ aléatoire. $D = 1$.
1: $r = 0$; 2: $r = 0,5$; 3: $r = 1$.

$S = 10$. On trouve alors que pour D valant 0,5 et 1 les valeurs des nombres moyens d'échantillons par cellules de l'histogramme sont respectivement $2,183 \cdot 10^3$ et $1,324 \cdot 10^3$. C'est ce qui apparaît sur les deux histogrammes de la figure 5.

Dans le cas du TM aléatoire il n'y a pas de résultat théorique simple pour l'expression de la fonction de coïncidence après TM. C'est ce qui justifie l'intérêt d'une approche expérimentale. Dans la figure 6 on analyse le cas d'un processus de

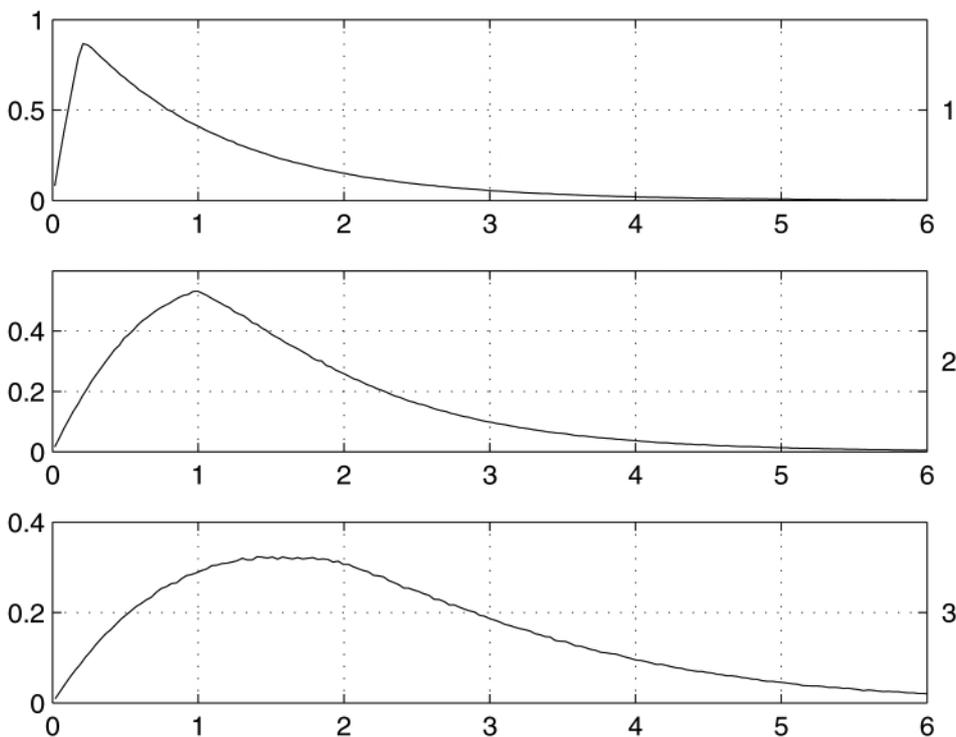


Figure 3. DDP du temps de vie d'ordre 1 après $TM(1)$ aléatoire. $r = 1$.
1: $D = 0,1$; 2: $D = 0,5$; 3: $D = 1$.

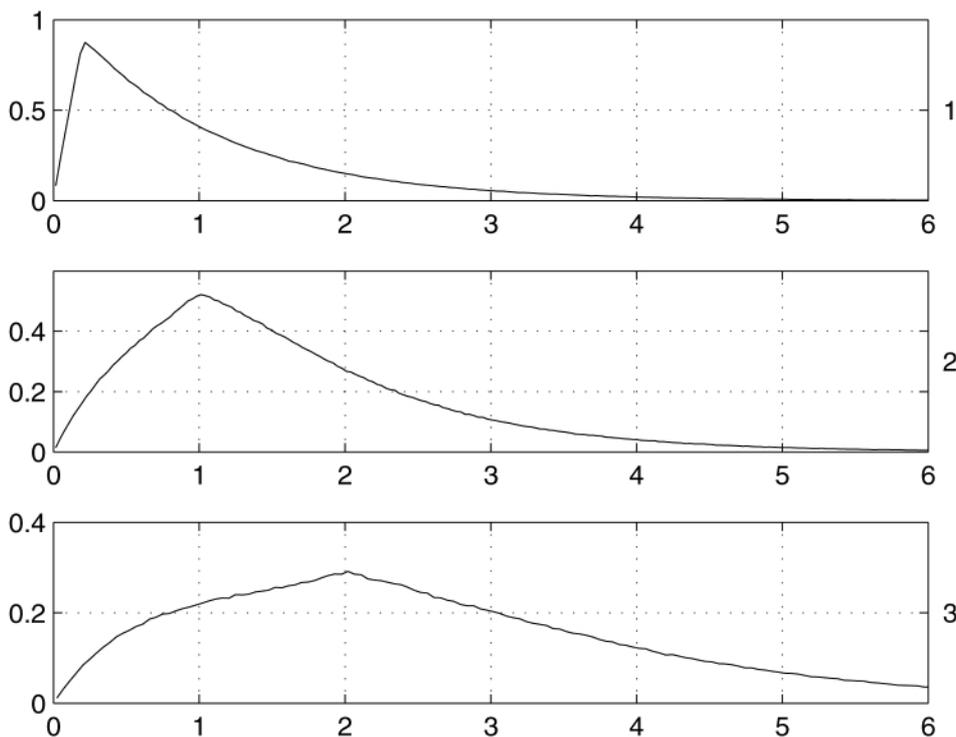


Figure 4. DDP du temps de vie d'ordre 1 après $TM(9)$ aléatoire. $r = 1$.
1: $D = 0,1$; 2: $D = 0,5$; 3: $D = 1$.

Poisson de densité $\mu = 1$ avec un TM(1) de moyenne $D = 1$. Les résultats sont présentés pour les valeurs 0,5 et 0,9 du paramètre r . On constate que $c(y)$ est nulle pour $y < (1 - r)D$ et constante pour $y > (1 + r)D$. Ce phénomène présenté ici seulement pour deux valeurs de r se produit pour toutes les valeurs de r . Il a une interprétation très simple. En effet la distance entre

deux points après TM est certainement supérieure à $(1 - r)D$ et, à l'opposé, quand $\tau > (1 + r)D$ les VA $dN'(y)$ et $dN'(y + \tau)$, accroissements de la fonction de comptage N' après TM(1) définie en Appendice, sont indépendantes. Par contre il n'y a pas d'expression simple de la fonction $c(y)$ dans l'intervalle $[(1 - r)D, (1 + r)D]$.

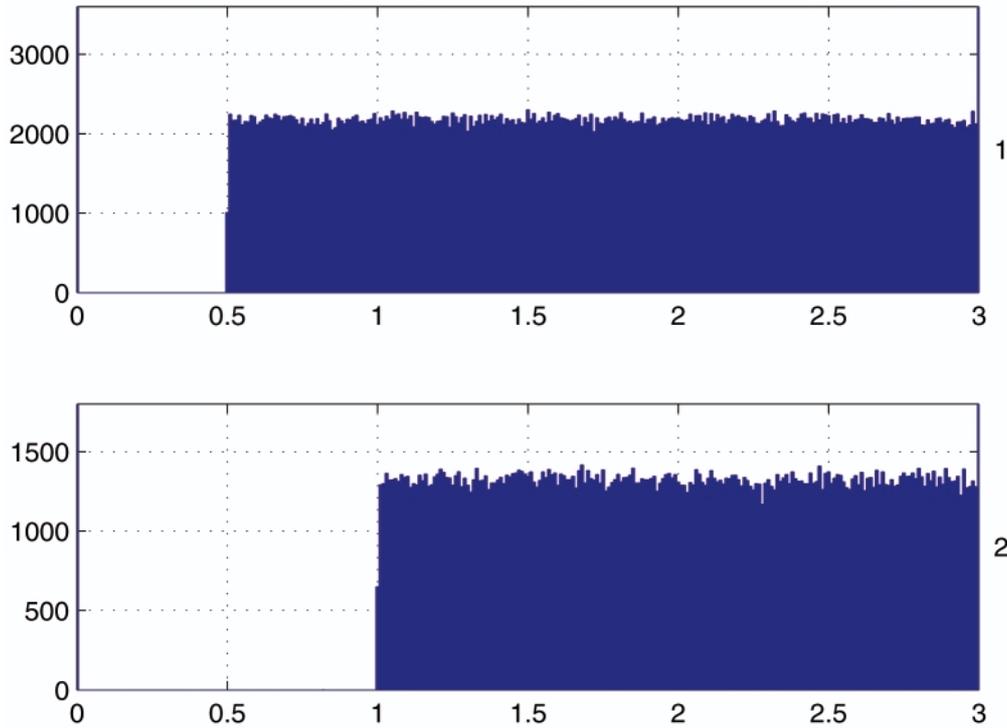


Figure 5. Fonctions de coïncidence pour un processus de Poisson avec temps mort constant, 1: $D = 0,5$, 2: $D = 1$.

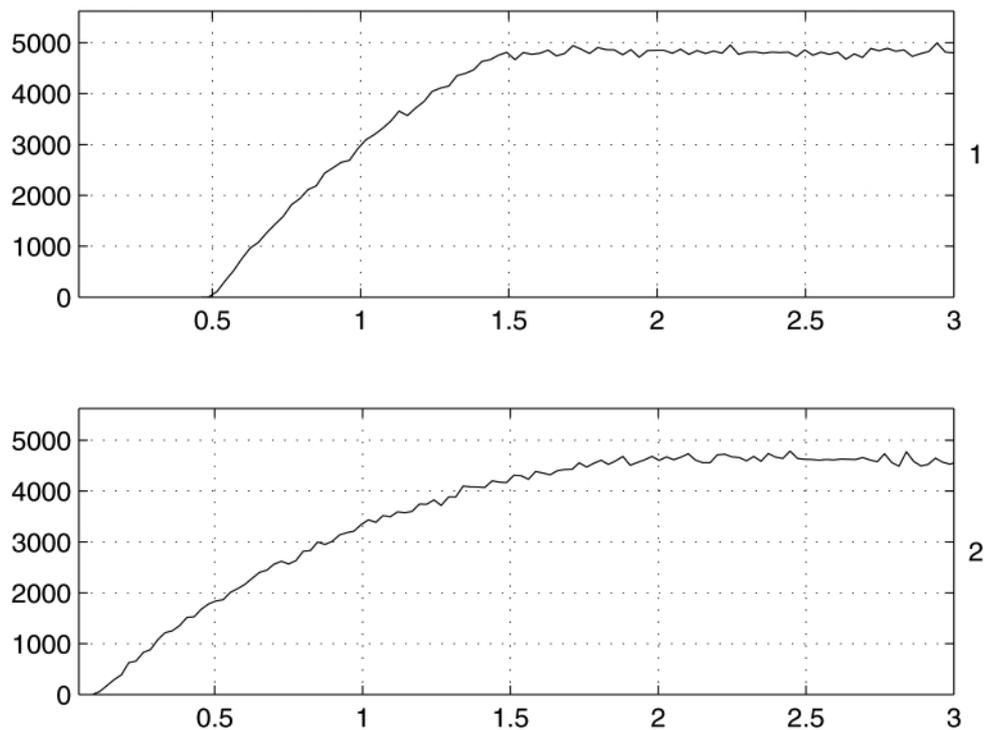


Figure 6. Fonctions de coïncidence pour un processus de Poisson avec temps mort aléatoire d'ordre 1, $D = 1$.
1: $r = 0,5$; 2: $r = 0,9$.

4. Processus à temps de vie exponentiel et markovien

Les processus de Poisson sont des processus de renouvellement dont les temps de vie sont des VA positives, exponentielles et IID. Dans ce paragraphe nous allons conserver la loi exponentielle mais abandonner l'indépendance et au contraire étudier l'influence d'une corrélation entre les temps de vie successifs sur les propriétés du PP après TM. Il n'est pas du tout simple de construire une suite de VA dont la DDP marginale soit exponentielle et dont la fonction de corrélation soit donnée arbitrairement. On peut par contre construire des modèles markoviens de temps de vie et le premier exemple dans ce sens a été introduit dans [1] (voir p. 62) afin de donner une sorte de généralisation des processus de renouvellement. Un autre modèle, différent mais d'un esprit similaire, a été introduit dans [7] et c'est celui qui est utilisé dans ce paragraphe. Ses principales propriétés sont rappelées en Appendice.

Considérons deux bruits à temps discret B_k et W_k blancs au sens strict et indépendants entre eux. Le premier ne prend que les valeurs 0 et 1 et il est donc défini par la probabilité $p = P(B_k = 1)$. Le second est une succession de VA positives IID et de loi exponentielle. Soit alors

$$x_k = B_k x_{k-1} + (1 - B_k) W_k, \quad k > 1. \tag{10}$$

Le signal x_k possède les principales propriétés suivantes analysées en Appendice. Tout d'abord, quelle que soit la loi de la condition initiale x_1 , celle de la VA x_k tend à devenir égale à celle de la VA W_k qui ici est exponentielle. Mais à la différence du modèle présenté dans [1], ceci n'est pas spécifique de la loi exponentielle et sera appliqué ci-dessous à d'autres types de lois. De plus, quelle que soit la loi de W_k , la fonction de corrélation de x_k vaut $\gamma_k = \sigma_W^2 p^{|k|}$, fonction de corrélation exponentielle courante pour les signaux qui, comme x_k , sont markoviens d'ordre 1. On note que si $p = 0$, $B_k = 0$, et $x_k = W_k$, ce qui correspond aux expériences réalisées précédemment (processus de Poisson). Au contraire si $p = 1$, $B_k = 1$, et x_k tend vers une constante.

Sur la figure 7 on a représenté les DDP des temps de vie d'ordre 1, 2 et 3 dans le cas d'un temps mort D fixe et égal à 1 pour des valeurs croissantes de la corrélation caractérisée par p . Ici, au contraire des cas précédents, les DDP $p_2(y)$ et $p_3(y)$ n'ont aucune raison de pouvoir être déduites de $p_1(y)$ par des convolutions puisque le PP de départ \mathcal{P} n'est plus de renouvellement en raison de la corrélation entre les x_i .

Les courbes de la figure 7 doivent se comparer à celles de la figure 1.3 obtenues pour les mêmes valeurs des paramètres $D = 1$ et $r = 0$. On constate que dès l'apparition d'une faible corrélation ($p = 0,1$), le plateau de la courbe entre 1 et 2 tend à se modifier pour totalement disparaître à partir de $p = 0,5$.

Par ailleurs, et ceci jouera un rôle dans la structure de la fonction de coïncidence, les courbes $p_2(y)$ et $p_3(y)$ ne s'annulent plus respectivement pour $y = 2$ et $y = 3$, le phénomène s'accroissant quand p croît. Il peut s'expliquer ainsi. Supposons que

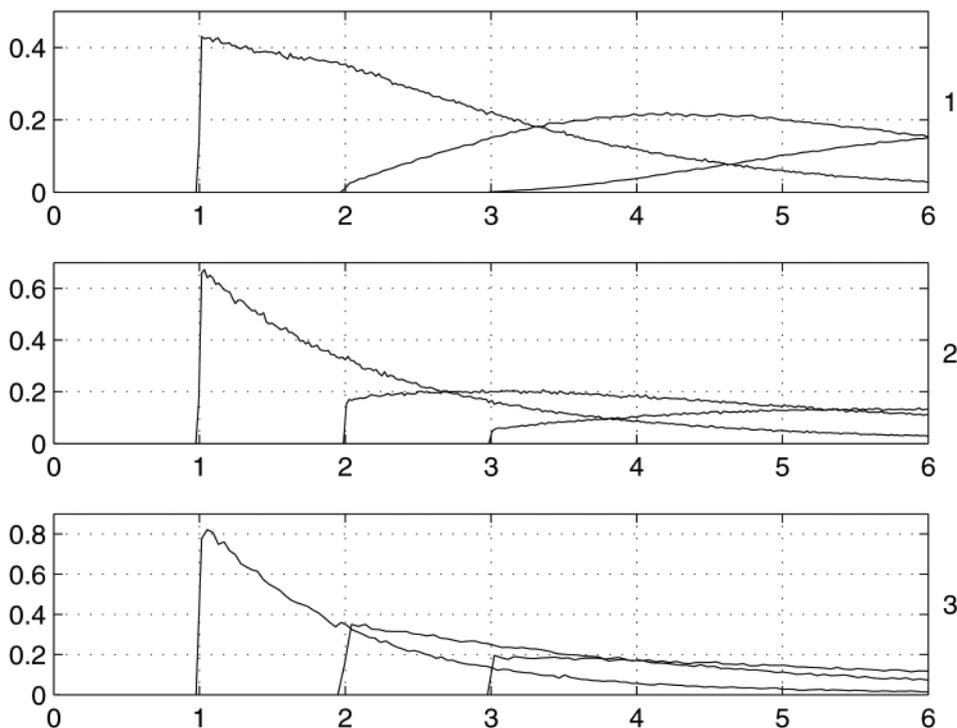


Figure 7. Influence de la corrélation sur les DDP p_1 , p_2 et p_3 avec TM fixe, $D = 1$.
 1 : $p = 0,1$; 2 : $p = 0,5$; 3 : $p = 0,8$.

les trois VA x_{i+1} , x_{i+2} et x_{i+3} soient très corrélées, et à la limite égales. Il en est alors de même pour les VA y_i correspondantes. Si elles étaient égales on aurait $p_2(y) = (1/2)p_1(y/2)$ et $p_3(y) = (1/3)p_1(y/3)$. Donc si $p_1(y)$ tend vers une valeur v quand y tend vers D avec $y > D$, $p_2(y)$ et $p_3(y)$ tendent respectivement vers $v/2$ et $v/3$ quand y tend respectivement vers $2D$ et $3D$. C'est ce que l'on voit assez approximativement sur la figure 7.3. Ainsi la discontinuité de $p_1(y)$ qui existe même quand les VA x_i sont indépendantes, et que l'on voit sur les figures 1.2 et 1.3, mais qui disparaissait pour les temps de vie d'ordre supérieur dans le cas indépendant, se conserve pour tous les temps de vie dans le cas corrélé. Ceci aura une répercussion évidente sur la fonction de coïncidence présentée ci-dessous en raison de son expression (13).

Par contre le phénomène disparaît lorsque le TM devient aléatoire comme on le voit sur la figure 8 réalisée avec un TM(1) pour les mêmes paramètres que dans la figure 7 à l'exception de r qui est maintenant égal à 0,5.

Sur la figure 9 on étudie l'influence de la corrélation sur la forme de la fonction de coïncidence après TM(1). Pour rendre l'effet plus important on considère le cas d'une forte corrélation caractérisée par $p = 0,8$. La figure 9.1 correspond au cas du TM fixe ($r = 0$). Elle se compare donc à la figure 5.2 qui dans le cas de l'indépendance ($p = 0$) donne une fonction de coïncidence constante au-delà du TM. On voit un changement très net et les brusques variations de la fonction de coïncidence pour les valeurs 1, 2 et 3 de la variable y sont le résultat de la structure discutée ci-dessus des DDP des temps de vie présentées sur la figure 7.3.

5. Processus à temps de vie uniforme

Supposons maintenant que le temps de vie du PP d'entrée \mathcal{P} ait une distribution uniforme. Si sa densité vaut μ , la DDP $p_1(x)$ de ce temps de vie vaut $\mu/2$ dans l'intervalle $[0, 2/\mu]$ et 0 à l'extérieur. Comme précédemment on suppose dans toute la suite que $\mu = 1$.

Si les temps de vie d'ordre 1 sont des VA indépendantes, \mathcal{P} est un processus de renouvellement, ce que l'on suppose tout d'abord.

Sur la figure 10 on représente les résultats de mesure des DDP d'ordre 1, 2 et 3 dans le cas d'un TM constant de valeur D . Cette figure doit donc être comparée à la figure 1 réalisée dans le cas d'un processus de Poisson, c'est-à-dire quand les temps de vie ont une distribution exponentielle. La figure 10.1 correspond à $D = 0$, c'est-à-dire à l'absence de TM. Les résultats expérimentaux sont en complet accord avec la théorie. La densité $p_1(y)$ est une fonction rectangulaire valant 0,5 dans l'intervalle $[0, 2]$ et $p_2(y)$ est une fonction triangulaire représentée en pointillés avec un sommet d'ordonnée 0,5 pour l'abscisse 2. La DDP $p_3(y)$ s'étend de 0 à 6 et avec son sommet en $x = 3$ et elle se compose de branches de paraboles.

Pour $D = 0,5$ on constate comme attendu que $p_1(y)$ est nulle pour $y < 0,5$. Cette DDP est pratiquement nulle pour $y > 4$, mais en théorie il n'y a pas de limitation de l'amplitude des VA y_i . On a par exemple vérifié qu'il existe des valeurs de y_i d'am-

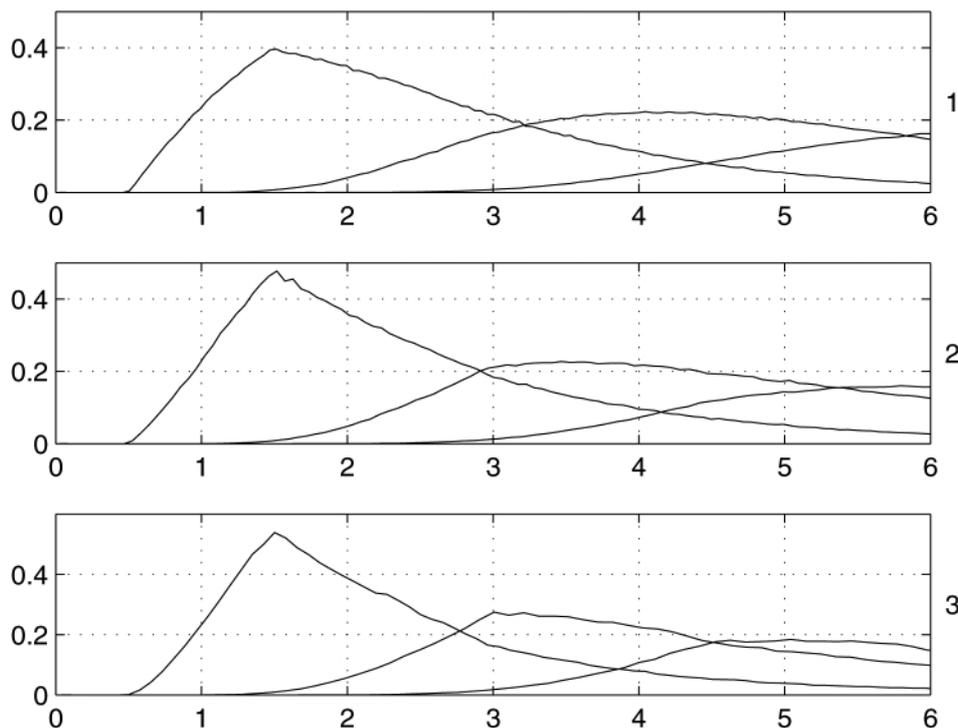


Figure 8. Influence de la corrélation sur les DDP p_1 , p_2 et p_3 avec TM(1) aléatoire, $D = 1$, $r = 0,5$.

1: $p = 0,1$; 2: $p = 0,5$; 3: $p = 0,8$.

plitude supérieure à 4 et trouvé que la probabilité $P(y_i > 4)$ est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-6}$. Par ailleurs on constate que la DDP $p_1(y)$ vaut 0,5 pour $y = 0,5$, a une croissance pratiquement linéaire pour y variant de 0,5 à 1 et reste pratiquement constante à la

valeur 0,625 pour y entre 1 et 2. Ces résultats sont analysés en Appendice.

La discontinuité de la DDP $p_1(x)$ avant TM en $x = 2$ apparaissant sur la figure 10.1 et qui n'existait pas dans le cas de la

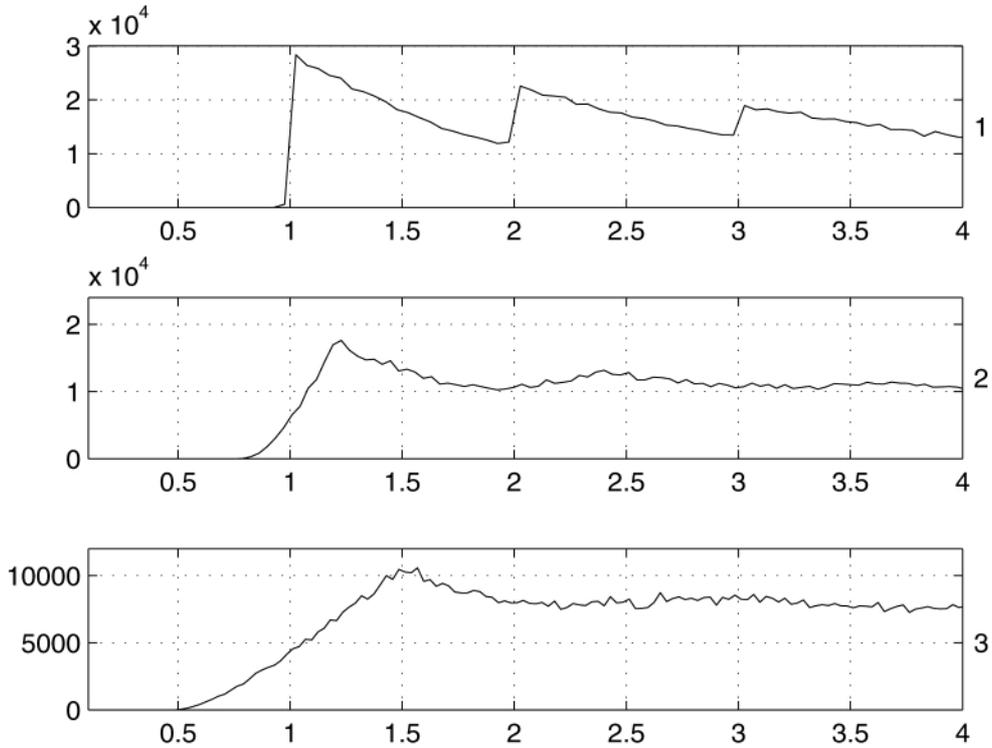


Figure 9. Influence de la corrélation sur la fonction de coïncidence avec $TM(1)$ aléatoire, $D = 1$, $p = 0,8$.
1: $r = 0$; 2: $r = 0,2$; 3: $r = 0,5$.

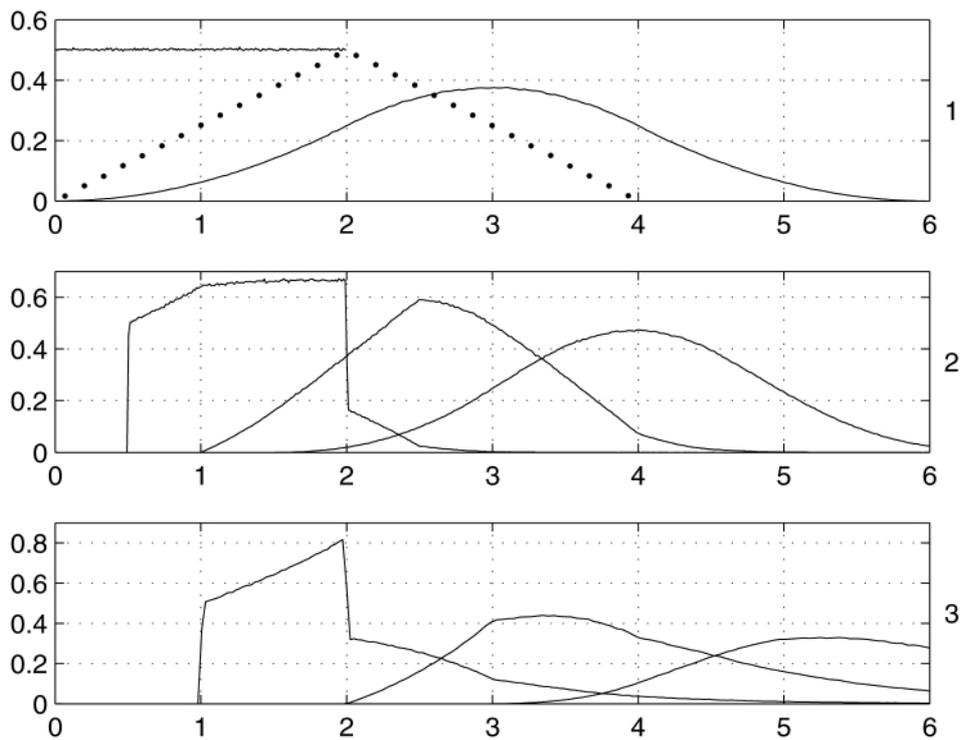


Figure 10. DDP des temps de vie après TM fixe. $r = 0$,
1: $D = 0$; 2: $D = 0,5$; 3: $D = 1$.

loi exponentielle, provoque une discontinuité après TM au point $y = 2$. Cette discontinuité se retrouvera sur la fonction de coïncidence en raison de la formule (13).

Pour $D = 1$ la partie où la DDP était constante dans le cas précédent disparaît et $p_1(y)$ varie presque linéairement entre 0,5 et 0,8, comme ceci est aussi expliqué en Appendice.

Sur la figure 11 on étudie l'influence du caractère aléatoire du TM(1) dans les mêmes conditions que sur la figure 2. Les figures 10.3 et 11.1 correspondent aux mêmes conditions expérimentales, c'est-à-dire au TM fixe. On constate comme pour la loi exponentielle étudiée sur la figure 2 un étalement de la DDP $p_1(y)$ croissant avec le coefficient r . Par contre ce coefficient ne joue qu'un rôle très faible dans l'amplitude de la discontinuité de $p_1(y)$ en $y = 2$.

Enfin on étudie sur la figure 12 l'influence de la valeur moyenne du TM(1) aléatoire pour l'étalement maximum correspondant à $r = 1$, comme ceci est fait sur la figure 3. Ici aussi on constate une discontinuité de la dérivée de la DDP $p_1(y)$ pour $y = 2D$. Par ailleurs l'amplitude de la discontinuité de $p_1(y)$ décroît quand D croît.

On reprend dans le cas uniforme la comparaison entre TM d'ordres différents dans le cas de la loi uniforme. On commence par une analyse du type de celle aboutissant au tableau 1. Les résultats sont tout à fait similaires et la seule différence méritant d'être mentionnée est la suivante. Si l'on construit la dernière colonne de ce tableau dans le cas de la loi uniforme au lieu de la loi exponentielle comme dans le tableau 1, on obtient des chiffres qui décroissent beaucoup plus rapidement, de sorte $\Delta_i = 0$ pour $i \geq 7$. Ainsi en prenant un TM(9) on peut considérer que l'on est dans une situation très proche du cas infini.

C'est ce qui est utilisé pour la figure 13. Les résultats sont tout à fait semblables à ceux obtenus dans le cas d'un processus de Poisson et indiqués sur les figures 3 et 4. L'introduction d'un TM d'ordre 9 à la place du TM d'ordre 1 est faite dans la figure 13 qui est très semblable à la figure 12. La seule différence un peu notable apparaît pour $r = D = 1$ et concerne la discontinuité de la DDP $p_1(y)$ au point $y = 2$. Cette discontinuité est légèrement amortie pour le TM(9), ce qui s'explique aisément. Sur la figure 14 on a représenté les fonctions de coïncidence dans le cas d'un TM fixe D . La figure 14.1 correspond à $D = 0$ et peut en principe se calculer à partir de (13). Les trois premiers termes de cette série apparaissent sur la figure 10 et la partie de la fonction de coïncidence entre 0 et 2 est essentiellement une somme des trois fonctions $p_i(y)$ de cette figure : un constant, un linéaire et un parabolique. Cette figure 14.1 a été réalisée en utilisant 20 termes dans la série (13) et la valeur de $c(t)$, pratiquement constante à partir de $t > 3$, est bien égale à celle prévue par la théorie. Le fait marquant distinguant ces fonctions de coïncidences de celles de la figure 5 est l'existence de la discontinuité en $y = 2$ provenant de celles apparues sur toutes les DDP $p_1(y)$ de la figure 10. Par ailleurs on constate que la valeur asymptotique est atteinte au delà de 5 et il reste sur la figure 14.3 un résidu de variation entre 3 et 5 qui n'existait pas en l'absence de TM ($D = 0$).

La figure 15 est réalisée dans les mêmes conditions que celles de la figure 6 correspondant aux processus de Poisson. Elle montre l'influence du caractère aléatoire du TM(1) sur la fonction de coïncidence. On constate comme sur les courbes de la figure 13 que la valeur asymptotique est atteinte moins rapidement que dans le cas des processus de Poisson.

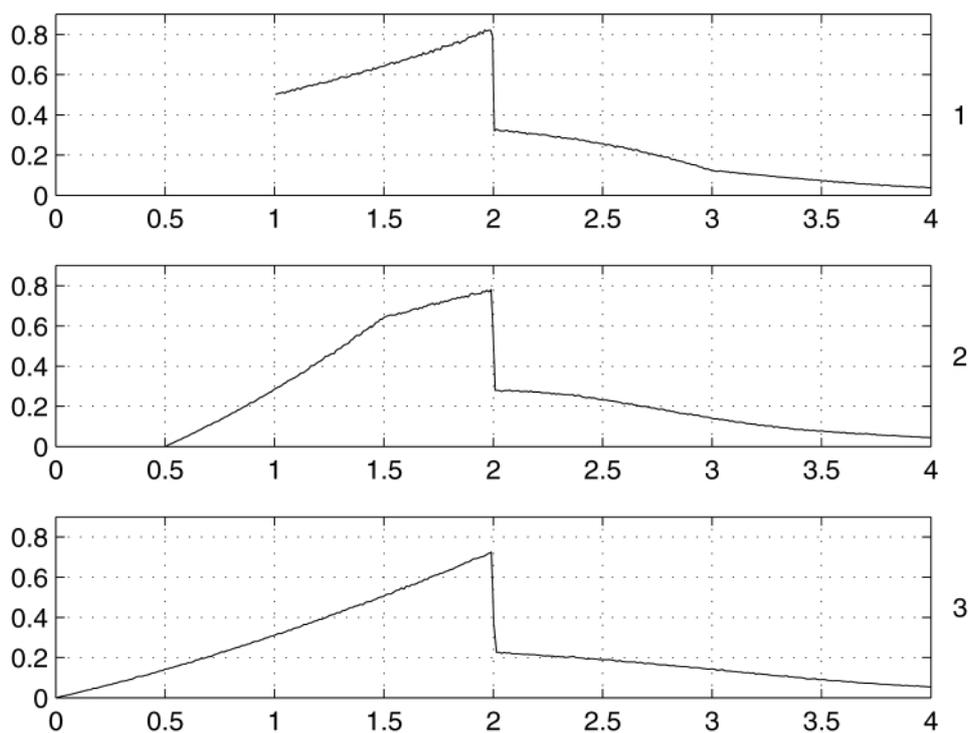


Figure 11. DDP du temps de vie d'ordre 1 après TM(1) aléatoire, $D = 1$,
1: $r = 0$; 2: $r = 0,5$; 3: $r = 1$.

Dans les figures suivantes on étudie l'influence de la corrélation entre les temps de vie. Pour ceci on reprend le modèle markovien (10) en supposant maintenant que les VA W_k ont la loi uniforme qui est utilisée dans les expériences précédentes. Comme

dans la figure 7 on étudie dans la figure 16 l'influence de la corrélation entre les échantillons du temps de vie d'entrée x_i sur les DDP des temps de vie de sortie pour un TM constant et égale à 1. On constate le même type d'évolution. En particulier, quand

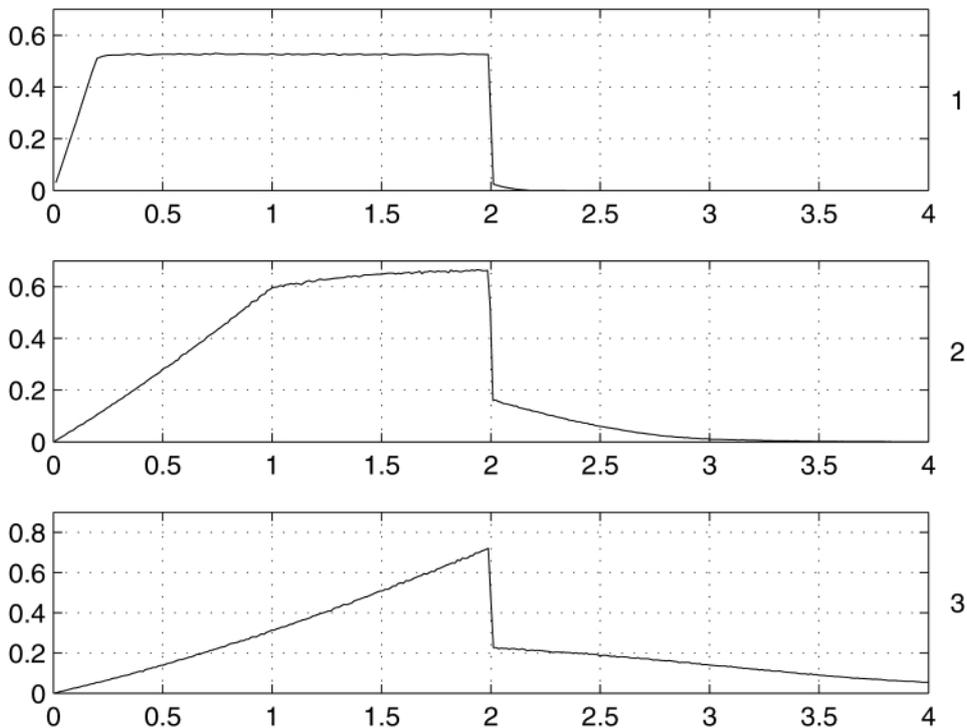


Figure 12. DDP du temps de vie d'ordre 1 après $TM(1)$ aléatoire, $r = 1$,
 1: $D = 0,1$; 2: $D = 0,5$; 3: $D = 1$.

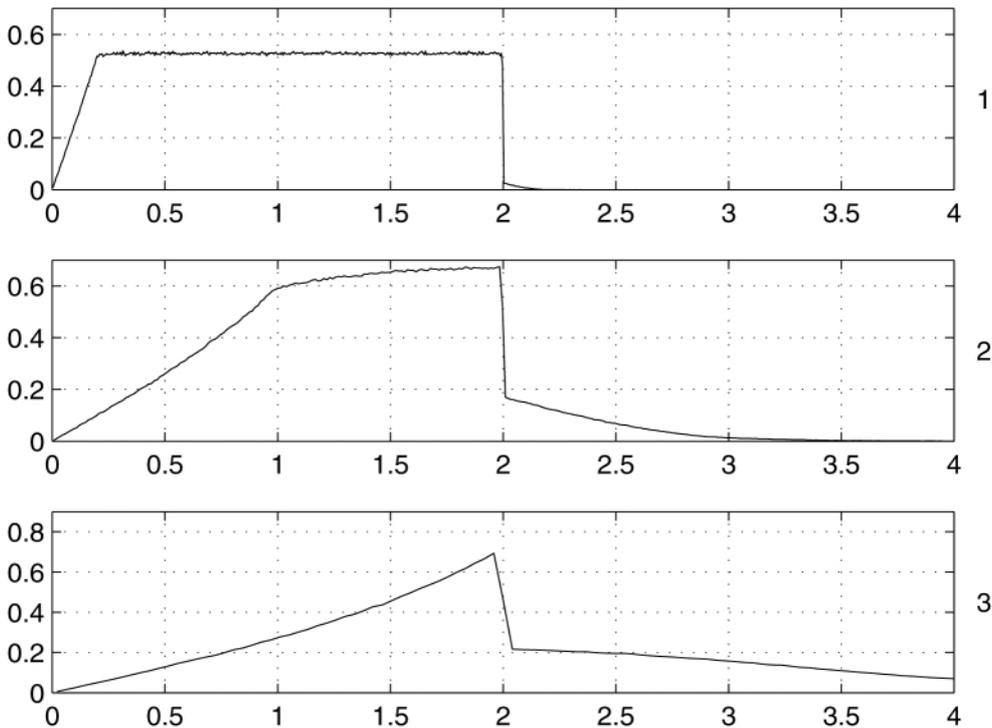


Figure 13. DDP du temps de vie d'ordre 1 après $TM(9)$ aléatoire, $r = 1$,
 1: $D = 0,1$; 2: $D = 0,5$; 3: $D = 1$.

la corrélation entre variables x_i successives est très forte, le temps de vie d'ordre 1 après TM tend à devenir uniformément réparti entre 1 et 2, et cette tendance se retrouve pour les ordres

2 et 3 avec les intervalles [2, 4] et [3, 6]. Enfin on constate sur la figure 17 l'influence du $TM(1)$ aléatoire sur les DDP de la figure 16 obtenues avec un TM constant.

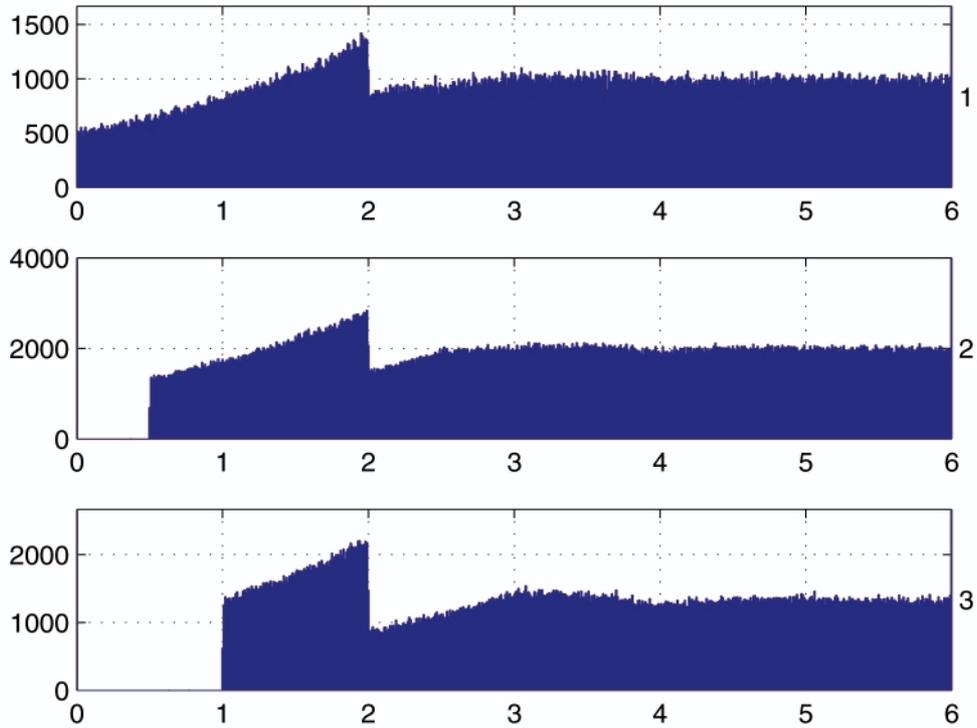


Figure 14. Fonctions de coïncidence pour un processus de renouvellement à densité uniforme avec TM constant, 1: $D = 0$; 2: $D = 0,5$; 3: $D = 1$.

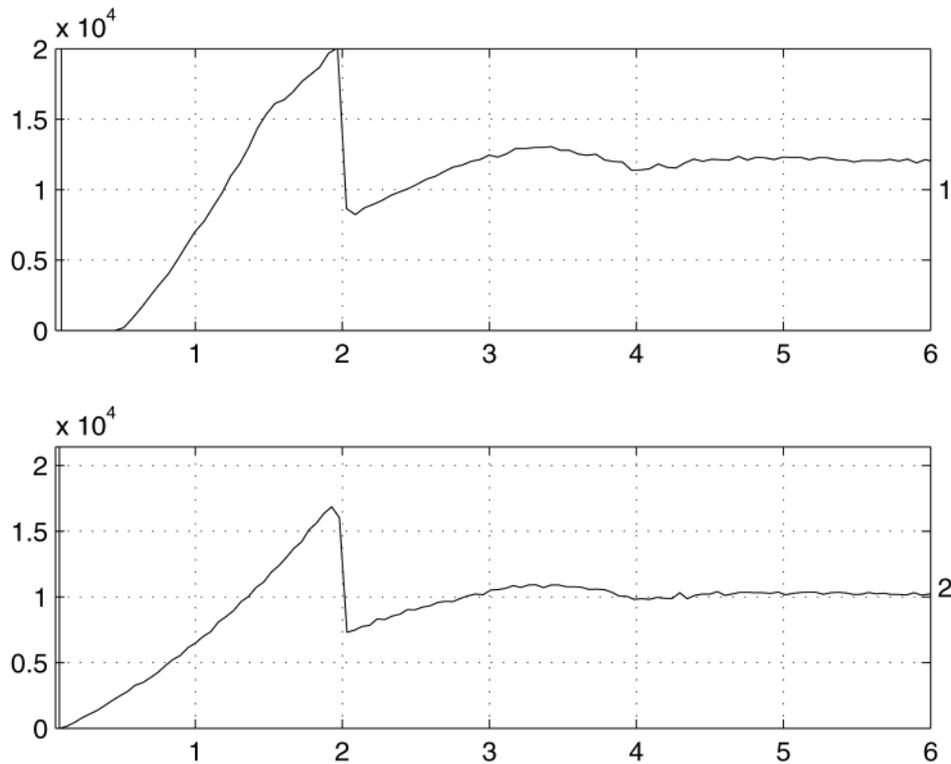


Figure 15. Fonctions de coïncidence pour un processus de renouvellement à densité uniforme avec $TM(1)$ aléatoire, $D = 1$; 1: $r = 0,5$; 2: $r = 0,9$.

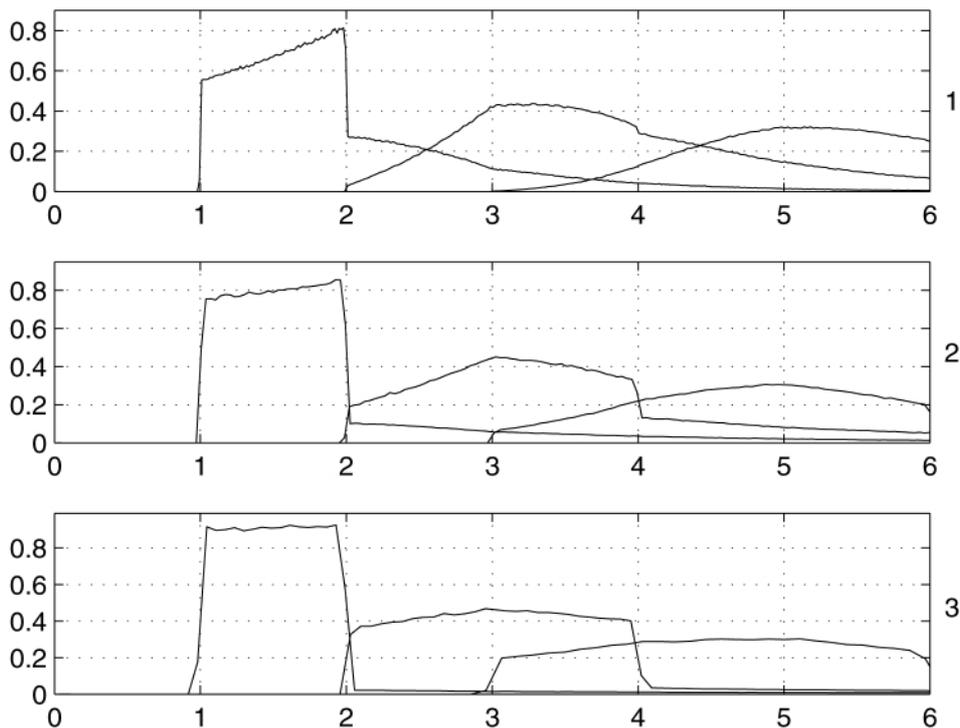


Figure 16. Influence de la corrélation sur les DDP p_1 , p_2 et p_3 avec TM fixe, $D = 1$,
 1: $p = 0,1$; 2: $p = 0,5$; 3: $p = 0,8$.

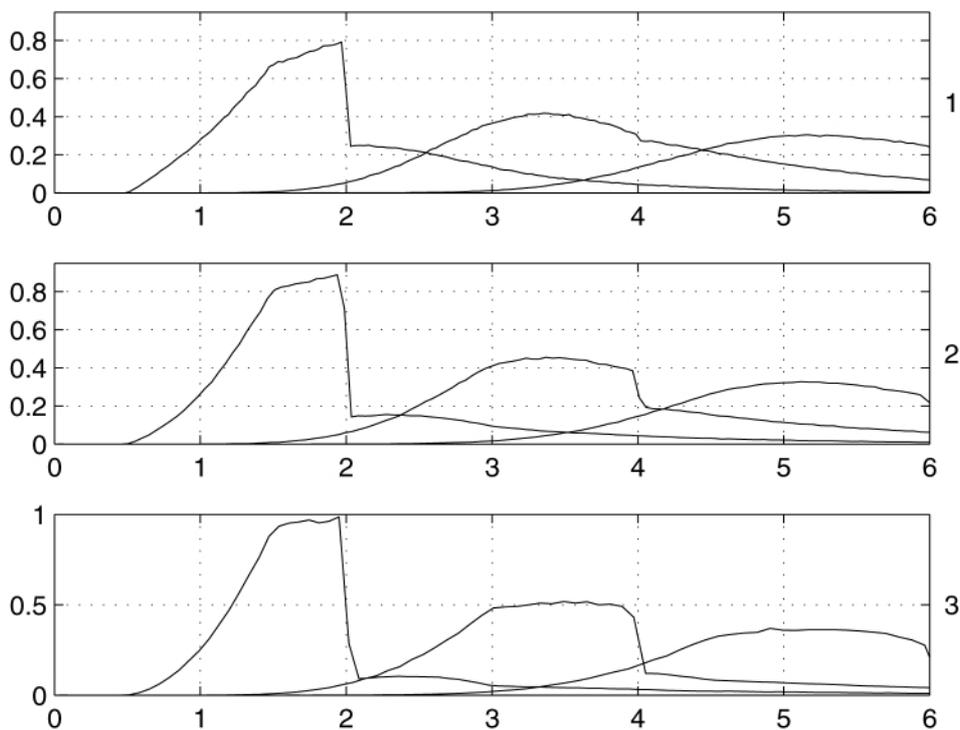


Figure 17. Influence de la corrélation sur les DDP p_1 , p_2 et p_3 avec $TM(1)$ aléatoire, $D = 1$, $r = 0,5$.
 1: $p = 0,1$; 2: $p = 0,5$; 3: $p = 0,8$.

6. Conclusion

Tout processus ponctuel utilisé pratiquement est affecté d'un temps mort qui joue dans le domaine temporel un rôle similaire à celui de la limitation de bande dans le domaine des fréquences. Cette étude a été consacrée à un cas particulier de temps mort, dit temps mort d'entrée. Il se manifeste par le fait que tout point du processus ponctuel de départ engendre un intervalle de temps tel que des points postérieurs de ce même processus tombant dans cet intervalle sont éliminés. Cet intervalle peut dépendre du temps et même être aléatoire. Les points non éliminés constituent un nouveau processus ponctuel dont les propriétés sont évidemment entièrement différentes de celles du processus de départ. Leur calcul théorique est pratiquement impossible sauf dans un nombre très restreint de cas. Ceci justifie une approche expérimentale. Dans ce but un dispositif de génération de temps mort d'entrée, éventuellement aléatoire, a été introduit. L'analyse du processus avec temps mort qu'il génère a été faite par plusieurs méthodes et notamment la mesure des lois de probabilité des temps de vie ou celle des fonctions de coïncidence. Dans les quelques cas où des résultats théoriques sont connus, ils sont en plein accord avec ceux obtenus dans des expériences sur ordinateur. Ceci a permis d'analyser quelques autres cas de processus ponctuels. On a en particulier étudié comment les propriétés après temps mort d'un processus de renouvellement se transformaient lorsqu'apparaissait une corrélation entre les intervalles successifs qui n'affectait pas leur densité de probabilité. Les expériences ont été faites essentiellement sur des processus ponctuels à temps de vie exponentiels, dont les processus de Poisson sont l'archétype, et sur des processus à temps de vie uniforme. Mais la méthode peut s'appliquer à n'importe quel type de processus ponctuel.

7. Appendice

Soit $N(t)$ la fonction de comptage égale au nombre de points de \mathcal{P} dans l'intervalle $[t_0, t[$, où t_0 est une origine arbitraire antérieure à tous les instants considérés dans la suite. On appelle $dN(t)$ l'accroissement $N(t + dt) - N(t)$. Pour les processus réguliers cet accroissement ne prend que les valeurs 0 et 1.

7.1. Densité de \mathcal{P}' pour un processus d'entrée \mathcal{P} de Poisson

La densité μ d'un PP stationnaire est définie par la relation $E[dN(t)] = \mu dt$. On a donc aussi $P\{[dN(t) = 1]\} = \mu dt$. Soit N' la fonction de comptage associée au PP \mathcal{P}' après TM(1). Supposons que \mathcal{P} soit un PP de Poisson de densité μ .

Lorsque le TM est fixe et égal à L , l'événement $dN'(t) = 1$ est réalisé si $dN(t) = 1$ et $N(t) - N(t - L) = 0$. Ces deux événements sont indépendants car \mathcal{P} est de Poisson. On a donc

$P\{[dN'(t) = 1]\} = \exp(-\mu L)\mu dt$, d'où $\lambda = \mu \exp(-\mu L)$. Si le TM(1) est aléatoire et de DDP $f(l)$ il faut prendre la moyenne, ce qui donne

$$P\{[dN'(t) = 1]\} = \mu dt \int f(l)\exp(-\mu l)dl. \quad (11)$$

Lorsque $f(l)$ est uniforme et vaut $1/2rD$ si $D(1 - r) < l < D(1 + r)$ et 0 dans le cas contraire, on trouve (6).

7.2. Fonction de coïncidence

Elle se déduit de la fonction de comptage par la relation

$$P\{[dN'(t_1) = 1][dN'(t_2) = 1]\} = c(t_2 - t_1)dt_1dt_2, \quad (12)$$

valable pour $t_1 \neq t_2$. Pour un PP de Poisson de densité μ on a évidemment $c(t) = \mu^2$. Pour un PP de Poisson après TM d'entrée constant D on a $c(t) = 0$ pour $|t| < D$ et $c(t) = \lambda^2$ pour $|t| > D$ avec $\lambda = \mu \exp(-\mu D)$, puisque $dN'(t_1)$ et $dN'(t_2)$ sont indépendants dès que $|t_1 - t_2| > D$.

La fonction de coïncidence se déduit des DDP des temps de vie d'ordre n $p_n(t)$ par la relation [1, 4]

$$c(t) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} p_n(|t|). \quad (13)$$

Il en résulte que la DDP $p_1(y)$ du temps de vie d'ordre 1 de \mathcal{P}' déduit d'un PP \mathcal{P} par TM d'entrée constant vaut 0 pour $0 < y < D$ et $(1/\lambda)c(y)$ pour $D < y < 2D$. En effet il résulte de la définition du TM d'entrée que $p_n(y) = 0$ pour $y < nD$. Donc pour $D < y < 2D$ la série (13) se réduit à un seul terme, et $c(y) = \lambda p_1(y)$. Dans le cas où \mathcal{P} est de Poisson de densité μ , on a donc dans cet intervalle $p_1(y) = \lambda = \mu \exp(-\mu D)$. Ceci explique les plateaux des courbes $p_1(y)$ apparaissant sur les figures 1.2 et 1.3.

7.3. Modèle markovien

Soit $G_k(s)$ la fonction génératrice (FG) de x_k définie par $G_k(s) = E[\exp(-sx_k)]$. Il résulte de (10) que $G_k(s) = pG_{k-1}(s) + (1 - p)G_W(s)$, où $G_W(s)$ est la FG de W_k . Soit $G_1(s)$ celle de la VA initiale x_1 . On déduit de la récurrence précédente que $G_k(s) = G_W(s) + p^{k-1}[G_1(s) - G_W(s)]$. On voit donc que la loi des VA x_k tend à devenir égale à celle des W_k . L'égalité est strictement réalisée quel que soit k si l'on choisit $G_1(s) = G_W(s)$.

Il résulte également de (10) que la fonction de corrélation γ_k de x_k satisfait $\gamma_k = p\gamma_{k-1}$, d'où $\gamma_k = \sigma_W^2 p^{|k|}$, σ_W^2 étant la variance de W .

7.4. Interprétation des résultats de la figure 10

Sans la calculer explicitement nous allons donner quelques résultats concernant la DDP du temps de vie d'ordre 1 après TM(1). Soit t_i un point de \mathcal{P} qui n'est pas effacé et que l'on choisit pour origine 0. Soit X_k la VA temps de vie d'ordre k de \mathcal{P} et a un nombre positif inférieur au TM D ($a < D$). On veut calculer la probabilité pour que le premier point de \mathcal{P}' postérieur à 0 soit dans l'intervalle infinitésimal $[D + a, D + a + \epsilon[$ qui vaut évidemment $p_{1Y}(D + a)\epsilon$, où $p_{1Y}(\cdot)$ est la DDP du temps de vie d'ordre 1 de \mathcal{P}' et ϵ est arbitrairement petit. Soit E_k l'événement

$$E_k = (0 < X_k \leq a) \cap (D + a < X_k + X_1 \leq D + a + \epsilon), k > 0. \tag{14}$$

En termes de PP il signifie qu'il y a k points de \mathcal{P} dans $]0, a]$, aucun point de \mathcal{P} dans $]a, D + a]$ et un point de \mathcal{P} dans $]D + a, D + a + \epsilon]$. Ce dernier point est par construction le premier de \mathcal{P} non effacé par TM d'entrée postérieur à 0 puisque tous les points de \mathcal{P} dans $]0, a]$ sont effacés par le point en 0 et qu'il n'y a aucun point de \mathcal{P} dans $]a, D + a]$, ce qui permet au point de \mathcal{P} dans $]D + a, D + a + \epsilon]$ de ne pas être effacé. Soit $P(E_k)$ la probabilité de E_k que l'on peut écrire $\pi_k(a)\epsilon$. Si $k = 0$, E_0 est l'événement $D + a < X_1 \leq D + a + \epsilon$ et $\pi_0(a) = p_{1X}(D + a)$, où $p_{1X}(\cdot)$ est la DDP de X_1 . Il est clair que

$$p_{1Y}(D + a) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(a). \tag{15}$$

Supposons maintenant que \mathcal{P} soit un PP de renouvellement. Ceci implique que X_k et X_1 dans (14) sont indépendants. Dans ces conditions la probabilité $P(E_k)$ s'écrit

$$P(E_k) = \int_0^a dx_k p_k(x_k) \int_{D+a-x_k}^{D+a-x_k+\epsilon} dx_1 p_1(x_1), k > 0. \tag{16}$$

On en déduit

$$\pi_k(a) = \int_0^a p_k(x) p_1(D + a - x) dx \tag{17}$$

avec en plus $\pi_0(a) = p_1(D + a)$.

Considérons tout d'abord le cas où \mathcal{P} est de Poisson de densité μ . On a alors

$$p_k(x) = \mu \frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-\mu x), \tag{18}$$

ce qui donne $\pi_k(a) = \mu \exp[-\mu(D + a)](\mu a)^k / k!$, valable même pour $k = 0$, d'où $p_{1Y}(D + a) = \mu \exp(-\mu D)$ qui ne dépend plus de a . On retrouve ainsi par un calcul direct le résultat obtenu juste ci-dessus et expliquant les plateaux des DDP $p_{1Y}(y)$ apparaissant sur les figures 1.2 et 1.3. Il est clair par ailleurs que le raisonnement n'est plus valable pour $a > D$ car on sort alors du domaine du TM créé par le point en 0.

Considérons maintenant le cas de la loi uniforme conduisant aux résultats de la figure 10. Pour $a < D$ et $\mu = 1$ les calculs pré-

cédents donnent $\pi_0 = 0,5$ et $\pi_1 = 0,25a$. La condition $a < D$ conduit à étudier les intervalles $[0,5, 1]$ pour la figure 10.2 et $[1, 2]$ pour la figure 10.3. Pour $a = 0$ les $\pi_k(a)$ sont nuls d'où $p_{1Y}(D) = 0,5$, ce que l'on voit clairement sur les figures. Dans les intervalles considérés il résulte de (16) que $\pi_1(a) = 0,25a$. Si les termes d'ordre supérieur sont négligés on trouve aux extrémités de droite des intervalles considérées respectivement les valeurs 0,625 et 0,75. Le résultat est bien vérifié sur la figure 10.2 et moins bien sur la figure 10.3. Ceci signifie que dans ce dernier cas on ne peut se contenter d'une approximation linéaire, et l'on voit bien que la courbe de la DDP n'est pas strictement une droite. Il est clair que l'approximation linéaire est d'autant plus valable que D est petit car elle est fondée sur le fait que la probabilité pour qu'il y ait plus d'un point dans $]0, a]$ est négligeable. On sait que pour un PP régulier cette probabilité tend vers 0 quand a tend vers 0.

Références

- [1] D. R. COX and V. ISHAM, *Point Processes*, London : Chapman and Hall, 1980.
- [2] B. PICINBONO, *Signaux aléatoires*. Paris : Dunod, 1994.
- [3] B. PICINBONO, « Measurements of Second-Order Properties of Point Processes », *IEEE Trans. Instr. and Measur.*, sous presse, 2008.
- [4] B. PICINBONO, « Propriétés du second ordre de l'effet de grenaille », *Colloque GRETSI 05*, Louvain, Sept. 2005, pp. 751-754, 2005.
- [5] BARTLETT M. S., « The spectral analysis of point processes », *J. Roy. Statist. Soc. B*, 25, 264-296, 1962.
- [6] J. A. MCFADDEN, « On the length of intervals in stationary point processes », *J. Roy. Statist. Soc.*, vol. B 24, pp. 364-382, 1962.
- [7] B. PICINBONO et C. BENDJABALLAH, « Characterizations of nonclassical optical fields by photoelectron statistics », *Physical Review A*, vol. 71, pp. 013812-1-013812-12, 2005.



Bernard Picinbono

Bernard Picinbono est Professeur émérite à l'Université de Paris-Sud et à Supélec. Il a été Président de l'Université de Paris-Sud de 1970 à 1975, Directeur du L2S depuis sa création jusqu'en 1986 et Directeur général de Supélec de 1990 à 1995. Il a été membre du Comité National du CNRS, du Conseil National des Universités, de la commission du titre d'ingénieur et du Comité consultatif de la recherche scientifique et technique. Il a été Président de la commission C de l'Union Radioscientifique International (URSI). Il est membre correspondant de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie des Technologies, membre des Fellow des IEEE et membre émérite de la SEE. Il a été Président du GRETSI. Ses travaux concernent essentiellement la modélisation déterministe et probabiliste des signaux et le traitement statistique du signal. Ses publications récentes peuvent être consultées sur le site <ftp://ftp.lss.supelec.fr/pub/users/picinbono/>