

# Analyse multifractale d'images : l'apport des coefficients dominants

## Multifractal Analysis for Images : The wavelet Leaders contribution

**Herwig Wendt<sup>1</sup>, Patrice Abry<sup>1</sup>, Stéphane G. Roux<sup>1</sup>,  
Stéphane Jaffard<sup>2</sup>, Béatrice Vedel<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique, UMR 5672, CNRS, École Normale Supérieure de Lyon,  
46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 7, France

<sup>2</sup>Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, UMR 8050, CNRS, Université Paris XII,  
61, Avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex, France  
herwig.wendt@ens-lyon.fr, patrice.abry@ens-lyon.fr, stephane.roux@ens-lyon.fr,  
jaffard@univ-paris12.fr, beatrice.vedel@ens-lyon.fr

Manuscrit reçu le 13 mai 2008

Résumé et mots clés

Nous nous intéressons à la réalisation pratique d'une procédure permettant d'effectuer une analyse multifractale, c'est-à-dire des fluctuations de régularité locale, de champs scalaires bidimensionnels, d'images notamment. L'originalité de la procédure réside dans la construction, à partir des coefficients d'une transformée discrète bidimensionnelle en ondelettes, de coefficients *dominants*, impliqués ensuite dans l'estimation des attributs multifractals. Nous donnons des éléments mathématiques relatifs aux problèmes théoriques liés à la validité du formalisme multifractal ainsi construit, et à son application à des images réelles. Nous indiquons comment l'utiliser pour détecter la présence éventuelle de singularités oscillantes. Pour étudier les performances des procédures construites, ces estimateurs sont mis en œuvre sur un grand nombre de réalisations de processus synthétiques, dont les propriétés multifractales sont connues théoriquement. Nous validons le fait que l'analyse multifractale 2D, construite sur les coefficients dominants, permet une mesure effective et complète des propriétés multifractales des images analysées. De plus, comparant les résultats obtenus d'images mono-fractales à ceux produits sur des images multi-fractales, nous commentons de façon détaillée l'apport des coefficients dominants par rapport à l'usage des coefficients d'ondelettes. Les attributs multifractals ainsi estimés peuvent ensuite être impliqués dans des tâches de classification, par exemple.

Image, analyse multifractale, coefficients dominants, transformée discrète en ondelettes, fonction uniformément höldérienne, intégration fractionnaire, validité du formalisme multifractal, singularité oscillante, mouvement brownien fractionnaire, cascade multiplicative.

Abstract and key words

### 1. Motivation

*Scale invariance* has been observed in numerous applications involving data of various and very different natures. It can be operationally defined as the power law behavior with respect to scale of the *structure functions*, which are given by the empirical moments of the absolute value of the multiresolution coefficients of the data at a given scale (*cf.* Eq. (1)). The estimation of the exponents characterizing these power laws – termed *scaling exponents* – constitutes the ultimate

goal of the practical analysis of scale invariance (also called scaling analysis). These scaling exponents are then commonly involved in standard signal processing tasks, such as detection, identification, or classification. In practice, scaling analysis is often conducted within the theoretical framework of *multifractal analysis*.

In a nutshell, multifractal analysis aims at characterizing the fluctuation (in time or space) of the local regularity of the process under analysis through analysis of the (power law) behavior of the structure functions in the limit of fine scales. Though multifractal analysis can theoretically be extended to dimensions higher than 1 without technical difficulties, most practical implementations remain restricted to one dimensional signals. This is mainly due to the fact that multifractal analysis requires the use of a range of both positive and *negative* empirical moments, hence demanding for multiresolution quantities with adequate properties. To date, the only practically available procedure for the multifractal analysis of 2D signals, hence *images*, is the so called Wavelet Transform Modulus Maxima (WTMM) procedure (based on the skeleton of a continuous wavelet transform (CWT)). Yet, the WTMM procedure suffers from a number of theoretical and practical drawbacks: It has a high computational cost; The calculation of the 2D CWT skeleton requires involved theoretical definitions as well as a cumbersome practical procedure; It is still lacking a theoretical support. Therefore, in numerous applications where the data are naturally images, multifractal analysis remains restricted to 1D slices of the data and hence incomplete.

In the present contribution, elaborating on previous results obtained for (1D) signals, we propose a practical multifractal analysis method for (2D) images based on two key features: The use of a 2D Discrete Wavelet Transform (DWT) (instead of a 2D CWT); The replacement of wavelet coefficients with *wavelet Leaders*. This yields two major benefits: The computation cost is very low; Wavelet Leaders have been shown to yield a complete and rigorous analysis of the multifractal analysis of bounded functions. This is because wavelet Leaders consist of monotonous increasing quantities that finely account for the irregularities of the analyzed function. The aims of the present contribution are twofold: First, studying the necessary theoretical elements, validity and limitations of a wavelet Leader based multifractal analysis of images, and second, the evaluation of its practical statistical performance.

## 2. Multifractal Analysis: Theory

Multifractal analysis of a *bounded* function consists of describing the fluctuation of its local regularity with respect to space.

The local regularity is measured by the *Hölder exponent*. The variability of the Hölder exponents with respect to space is characterized by the *multifractal spectrum*. It is defined as the Hausdorff dimension of the ensemble of points at which the function has the same Hölder exponent. Practical multifractal analysis essentially aims at obtaining the multifractal spectrum from a single finite size image. The corresponding theoretical elements are given in Section 2.1. Since the multifractal spectrum is numerically not directly accessible, so-called *multifractal formalisms* have to be used: They recast the estimation to quantities that can actually be numerically calculated in practice and allow – under certain mathematical hypotheses – the estimation of the multifractal spectrum. For functions that are *uniform Hölder* (i.e., functions whose minimal regularity exponent, as defined in Eqs. (3) and (4), is positive), it has been shown that the wavelet Leaders locally reproduce the Hölder exponent through a power law behavior in the limit of fine scales. They should hence constitute the key ingredient for the *wavelet Leader multifractal formalism* for images. Wavelet Leaders are defined as the supremum of the coefficients of a discrete wavelet transform in a small (time or space) neighborhood over all finer scales. First, the wavelet Leader structure functions are calculated from the image, both for positive and negative moments, and the corresponding scaling exponents are estimated. By taking their Legendre transform, one obtains the *Legendre spectrum*. The multifractal formalism consists now of stating that the Legendre spectrum is identical with the multifractal spectrum. This is described in Section 2.2. A practical procedure to measure the minimal regularity exponent is given in Eq. (5).

This interpretation of the Legendre spectrum as the multifractal spectrum of the image is however not of general validity. Yet, it has been proven to be valid for self-similar finite variance stationary increments processes, and is conjectured for multiplicative martingale based processes. Also, it has been shown that the Legendre spectrum is independent of the choice of the mother wavelet, and hence provides an intrinsic characterization of the data, regardless of its interpretation. It is shown in Section 2.3 that the multifractal formalism holds without further hypothesis only for monofractal processes, i.e., when both the Legendre and multifractal spectra reduce to a point. Also, it is shown that

one can always construct a process with any admissible Legendre spectrum, whose multifractal and Legendre spectra do not coincide.

### 3. Positive measures and fractional integration

Numerical images can naturally be modeled with *positive measures*. This violates the uniform Hölder assumptions, and the wavelet Leader multifractal formalism can not be directly applied: Theoretically, wavelet Leaders become infinite; In practice, they are always finite, yet their use would yield meaningless results.

This difficulty can be related to the existence of *negative Hölder exponents* in the data (explicit definition detailed in Section 3.1). It is shown that performing a fractional integration of the data, with an order larger than the opposite of the minimal regularity exponent, guarantees uniform Hölder regularity, and hence that the wavelet Leader based multifractal formalism can be applied. It is also explained in Section 3.1 how fractional integration and wavelet Leaders can be merged into a single computationally inexpensive and numerically unproblematic operation, referred to as pseudo-fractional integration. The question that arises naturally, though, is in how far the Legendre spectrum obtained by this practical solution can be related to the original image. It is argued here that even when the multifractal formalism holds for the integrated image, the common heuristic association with a translated (by the order of integration) version of the Legendre spectrum can not, in general be interpreted as the spectrum of the image, since the image is not uniform Hölder. Yet, if the image contains only *cusp*-type singularities, the Legendre spectrum is nevertheless intrinsically related to the original image, thus characterizes it precisely, and can be used as such.

However, it is shown and discussed in Sections 3.2 and 3.3 that if the image contains *oscillating* singularities, this reasoning is not valid: fractionally integrating with different orders and translating the Legendre spectra does not define one unique function. It is argued here that this fact can potentially be exploited for detecting the presence of oscillating singularities in data.

### 4. Empirical Multifractal Analysis

In practice, scaling analysis amounts to estimating scaling exponents. However, their estimation is often advantageously replaced by the estimation of a smaller set of specific parameters, termed the *log-cumulants*. Section 4.1 states how these log-cumulants can be used to approximate the Legendre spectrum with only a small number of parameters, and without having to calculate the Legendre transform numerically.

In Sections 4.2 and 4.3, explicit forms of the wavelet coefficient and Leader based estimation procedures for multifractal analysis of images are given.

In Section 4.4, the use of wavelet coefficients and wavelet Leaders for multifractal analysis are compared.

### 5. Numerical Simulations

Finally, the performance of the practical wavelet Leader based multifractal attribute estimation procedures for images are studied numerically, by means of Monte Carlo simulations conducted on two reference stochastic processes, whose multifractal properties are theoretically known: 2D fractional Brownian motions, Gaussian self-similar hence monofractal processes; Mandelbrot's multiplicative cascades (or martingales), celebrated examples of multifractal processes (with both log-normal and log Poisson multipliers). These processes are defined in Section 5.1.

Simulation parameters are chosen to match realistic values observed in a number of real world data and situations (*cf.* Section 5.2).

### 6. Estimation Performance

From a large number (1000) of 2D realizations of fractional Brownian motion, and of Mandelbrot's multiplicative cascades, the estimation performance of the wavelet coefficient and wavelet Leader based multifractal formalisms are measured in terms of biases, variances and mean squared error. The results demonstrate that the proposed wavelet Leader based procedures outperform those based on wavelet coefficients, while obtained at the same computational cost, in estimation performance: Whereas the former enable the relevant estimation of scaling exponents for both positive and negative statistical orders, and hence of the entire spectrum, that latter fail for negative statistical orders and hence the right part of the spectrum (*cf.* Section 6.1).

Also, the former have significantly better performance for the estimation of the log-cumulants, in particular for cumulants of order larger than 1, i.e., for cumulants that enable practitioners to discriminate between finite variance self similar processes and multiplicative cascades (cf. Section 6.2).

Yet, there is a price to pay for such improvements: First, the scales that can be involved in the estimations are slightly restricted when using wavelet Leaders (cf. Section 6.3), and second, the variance of Leader based estimates of the self-similarity parameter of Gaussian self similar processes is not independent of the parameter, as is the case for coefficient based estimates (cf. Section 6.4).

Section 6.5 illustrates the behavior of the wavelet Leader based multifractal analysis procedure on a real-world image, consisting of natural fern, chosen in reference to the classical simulated fern example used as a paradigm fractal object.

## 7. Conclusion and discussion

This contribution proposes the definition of a wavelet Leader multifractal analysis procedure for 2D signals, i.e., for Images. It is shown to have estimation performance that significantly outperform those obtained from wavelet coefficients and to have both a low computational cost and a low level in implementation difficulty. No other procedure combining this high performance level and low computational and conceptual difficulty levels has been proposed so far. Multifractal analysis consists of a conceptually involved characterization of an image: It relates, via the so-called multifractal formalism, the scale invariance properties of the data to their sample path regularity properties. The exact use of this theoretical framework may turn practically difficult. However, this does not prevent practitioners from using a set of estimated multifractal attributes as relevant image features. This contribution hence opens the route towards a systematic use of multifractal analysis for image detection and classification tasks, as is tentatively experimented in various applications (e.g., computer vision).



Image, Multifractal Analysis, Wavelet Leaders, Discrete Wavelet Transform, Uniform Hölder Function, Fractional Integration, Multifractal Formalism Validity, Oscillating Singularity, Fractional Brownian Motion, Multiplicative Cascade.

## Remerciements

Les auteurs remercient la *Fondation Del Duca, Institut de France* pour le soutien apporté à ce travail sous la forme d'un emploi Post-doctoral.

# 1. Motivation

**Invariance d'échelle.** Des phénomènes d'invariance d'échelle ont été fréquemment observés dans de nombreuses situations de natures très différentes. L'invariance d'échelle peut être définie de manière opérationnelle par le comportement en lois de puissance vis-à-vis de l'échelle d'analyse  $a$ , pour une large gamme d'échelles  $a \in [a_m, a_M]$ ,  $\frac{a_M}{a_m} \gg 1$  et d'ordres statistiques  $q$ , des moments empiriques de quantités  $T_X(a, \mathbf{k})$  :

$$S(a, q) = \frac{1}{n_a} \sum_{\mathbf{k}} |T_X(a, \mathbf{k})|^q \simeq G_q a^{\zeta(q)}. \tag{1}$$

Les  $T_X(a, \mathbf{k})$  consistent en coefficients multi-résolution, c'est-à-dire décrivant le contenu du processus analysé  $X(\mathbf{t})$  à la fois

autour d'une position  $\mathbf{t}$  et à une échelle d'analyse  $a$ . En pratique, on choisit souvent pour  $T_X(a, \mathbf{k})$  les coefficients d'ondelettes [1,2,3,4].

L'analyse pratique de l'invariance d'échelle réside principalement dans l'estimation des *exposants des lois d'échelle*  $\zeta(q)$ , à partir de données analysées  $X$ . Ces  $\zeta(q)$  sont ensuite souvent utilisés dans des tâches classiques de traitement du signal telles que détection, identification et classification, ou dans l'interprétation des mécanismes qui sont à l'origine du signal  $X$ .

**Analyse multifractale.** L'analyse multifractale est un outil théorique, aujourd'hui devenu classique, pour l'étude pratique de données expérimentales. Elle consiste à caractériser les fluctuations en temps (ou espace) de la régularité du processus analysé. Cette caractérisation s'obtient par l'analyse du comportement des  $S(a, q)$  dans la limite des petites échelles,  $a \rightarrow 0$ .

**Images.** Quoique l'analyse multifractale s'étende théoriquement sans difficulté particulière aux dimensions supérieures, la plupart des mises en œuvre pratiques se cantonnent aux cas 1D et donc aux signaux (voir, *a contrario*, [5,6] pour des applications en 2D). Jusqu'ici, pour l'analyse multifractale pratique 2D, d'images donc, un seul formalisme a été proposé, et est quasi-exclusivement utilisé, celui des *maxima des coefficients* (MMTO) : il repose sur le squelette d'une transformée en ondelettes continue 2D (maxima locaux de la transformée) [1,2]. Cependant, son coût de calcul est élevé, et la phase de détermination du squelette s'avère délicate à définir théoriquement et mettre en place pratiquement. Ainsi, quoique l'analyse multifractale soit utilisée dans de nombreux contextes où les données sont naturellement des images (nuages et précipitations en géophysique [7,8], imageries biomédicales des rythmes ou structures du corps humain [9,10], structure de l'univers ou des galaxies en astronomie [11], phénomènes de croissance cristalline en physique [12,13], reconnaissance de texture en vision assistée par ordinateur [14,15],...), elle reste souvent conduite sur des coupes 1D. Il y a donc un réel manque d'outils validés théoriquement et balisés pratiquement pour l'analyse multifractale d'images, auquel cet article propose une solution.

**Coefficients dominants.** Élaborant sur des résultats théoriques récents [4,16] et sur nos précédents travaux réalisés sur des signaux (1D) [17], nous proposons ici une procédure d'analyse multifractale pour les images reposant sur deux ingrédients-clés : utilisation d'une transformée en ondelettes discrètes (ou dyadique) 2D ; construction d'un formalisme multifractal reposant sur les *coefficients dominants* plutôt que sur les coefficients d'ondelettes eux-mêmes. D'une part, l'usage d'une transformée en ondelettes discrète permet d'obtenir des coûts de calculs très faibles. D'autre part, il a été montré récemment que les coefficients dominants possèdent les propriétés théoriques adéquates pour la construction d'un formalisme multifractal : ce sont des quantités monotones croissantes avec l'échelle d'analyse qui rendent compte de façon fine de l'irrégularité de la fonction analysée. Ce formalisme multifractal par coefficients dominants est soutenu par des résultats théoriques montrant qu'il permet une estimation de la totalité du spectre multifractal de la fonction étudiée (notamment de sa partie décroissante), contrairement à celle construite directement sur les coefficients d'ondelettes [4].

L'objectif de cette contribution est double : d'une part, donner des éléments théoriques relatifs à la validité du formalisme multifractal, sa généralité et ses limitations ; d'autre part, proposer une mise en œuvre opérationnelle de ce formalisme, étudier ses performances pratiques et les comparer à celles obtenues directement avec les coefficients d'ondelettes. Ces comparaisons sont conduites au moyen de simulations numériques réalisées à partir de processus synthétiques 2D multifractals et monofractals, dont les propriétés sont connues *a priori*.

## 2. Analyse multifractale : théorie

Dans la Section 2.1, nous rappelons les notions mathématiques pertinentes concernant l'analyse multifractale des fonctions bornées définies sur  $\mathbb{R}^d$ . Pour une image  $d = 2$ , et la variable  $\mathbf{t}$  est une variable d'espace ; pour un signal  $d = 1$  et la variable  $\mathbf{t}$  dénote le plus souvent le temps ou l'espace.

### 2.1 Exposant de Hölder et spectre de singularité

L'analyse multifractale d'une fonction bornée  $X(\mathbf{t})$  consiste à décrire les fluctuations de régularité locale en fonction de  $\mathbf{t}$ . Cette régularité est mesurée en comparant localement les variations de  $X$  à un comportement en loi de puissance : soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  ;  $X(\mathbf{t}_0)$  appartient à  $C^\alpha(\mathbf{t}_0)$  s'il existe une constante  $C > 0$  et un polynôme  $P$ ,  $\deg(P) < \alpha$ , tels que

$$|X(\mathbf{t}) - P_{\mathbf{t}_0}(\mathbf{t})| \leq C|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|^\alpha.$$

L'*exposant de Hölder* est défini comme le supremum de ces  $\alpha$  :

$$h(\mathbf{t}_0) = \sup\{\alpha : X \in C^\alpha(\mathbf{t}_0)\}.$$

On remarque que, puisque  $X$  est bornée, on a toujours  $X \in C^0(\mathbf{t}_0)$ , et donc  $h(\mathbf{t}_0) \geq 0$ . Cet exposant rend compte localement, en  $\mathbf{t}_0$ , de la régularité de la texture de l'image. Par exemple,  $h(\mathbf{t}_0) \geq 1$  indique que l'image est localement dérivable. *A contrario*,  $0 \leq h < 1$  rend compte du fait que l'image est continue mais non dérivable. Dans ce cas, la proximité de 1 pour  $h$  indique que l'image est presque aussi régulière qu'une fonction dérivable, tandis qu'un  $h$  proche de 0 traduit une forte irrégularité, proche de la discontinuité.

L'information relative à la variabilité de la régularité du champ  $X$ , c'est-à-dire sur la fluctuation de  $h$  en fonction de  $\mathbf{t}$ , est ensuite décrite par le *spectre multifractal* (ou *spectre de singularités*)  $\mathcal{D}(h)$ . Pour donner sa définition, il est d'abord nécessaire de rappeler celle de la dimension de Hausdorff d'un ensemble :

Soit  $A \subset \mathbb{R}^d$ . Pour  $\varepsilon > 0$  et  $\delta \in [0, d]$ , notons

$$M_\varepsilon^\delta = \inf_R \sum_i \varepsilon_i^\delta$$

où  $R$  est un recouvrement générique de  $A$  par des disques  $B_i$  de diamètre  $\varepsilon_i \leq \varepsilon$ . L'infimum est donc pris sur l'ensemble de tous ces recouvrements possibles. La mesure  $\delta$ -dimensionnelle de  $A$  est

$$mes_\delta(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon^\delta$$

En fonction de  $\delta$ , cette mesure prend la valeur  $+\infty$  puis 0. La dimension de Hausdorff de  $A$  est

$$\dim_H(A) = \inf \left\{ \delta : \text{mes}_\delta(A) = 0 \right\}$$

Le spectre multifractal  $\mathcal{D}(h)$  est défini comme la dimension de Hausdorff de l'ensemble  $A_h \in \mathbb{R}^d$  des points  $\mathbf{t}$  où  $X$  prend le même exposant de Hölder  $h$ ,  $A_h = \{\mathbf{t}, h(\mathbf{t}) = h\}$  :

$$\mathcal{D}(h) = \dim_H\{A_h\} \tag{2}$$

Pour des présentations plus détaillées et théoriques de l'analyse multifractale, le lecteur est renvoyé à, par exemple, [4,18,19,20].

L'estimation de  $\mathcal{D}(h)$  à partir d'une seule observation de  $X$ , de taille finie, constitue une question pratique essentielle, qui, pour des données expérimentales, ne peut être abordée directement d'après la définition que nous venons de donner. En effet, cela nécessiterait la détermination de l'exposant de Hölder en chaque point. Or, de nombreux exemples mathématiques (comme les cascades multiplicatives [21,22]) conduisent à des exposants de Hölder partout discontinus, dont la détermination numérique directe locale est donc inaccessible. On a alors recours à des formules qui, lorsque certaines hypothèses mathématiques de validité sont remplies, permettent d'obtenir le spectre à partir de quantités numériquement calculables. De telles formules s'appellent des *formalismes multifractals*. Un bénéfice complémentaire de ces formalismes multifractals réside dans le fait que les nouvelles quantités numériques calculables, qui entrent dans leurs définitions, peuvent être utilisées comme outil de classification ou de sélection de modèles, sans relation explicite au spectre de singularité.

## 2.2 Formalisme multifractal par coefficients dominants

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre des images ( $d = 2$ ) ; mais, dans un premier temps, nous ne supposons plus que  $X$  est une fonction bornée ( $X$  peut être par exemple une mesure, ou une fonction de  $L^1$ ).

**Coefficients d'une transformée en ondelettes discrète 2D.** Soient  $H_0(k), G_0(k)$  les filtres (passe-bas et passe-haut, respectivement) miroirs en quadrature définissant une transformée discrète en ondelettes 1D. L'ondelette-mère associée à cette multi-résolution possède un nombre de moments nuls, noté  $N_\psi \geq 1$ . La transformée discrète en ondelettes 2D peut alors être définie par l'application récursive de 4 filtres bidimensionnels  $G^{(m)}(k_1, k_2)$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$  obtenus comme produits tensoriels de  $H_0$  et  $G_0$ . Par convention,  $G^{(0)}(k_1, k_2) = H_0(k_1)H_0(k_2)$  correspond au filtre passe-bas 2D produisant l'approximation à la résolution inférieure, tandis que les  $G^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, 3$ , correspondent aux filtres passe-haut fournissant les coefficients d'ondelettes 2D  $D_X^{(m)}(j, k_1, k_2)$ ,  $m = 1, 2, 3$ . Pour une introduction plus détaillée aux analyses en ondelettes 1D ou 2D, le lecteur peut consulter les ouvrages de référence, e.g., [23,24].

Pour l'analyse d'invariance d'échelle, une normalisation  $L^1$  des coefficients d'ondelettes

$$d_X^{(m)}(j, k_1, k_2) = 2^{-jd/2} D_X^{(m)}(j, k_1, k_2)$$

est plus adaptée que la normalisation  $L^2$  (cf. [25,26]). En effet, les coefficients dominants, sur lesquels sera construite l'analyse multifractale, sont définis en utilisant cette normalisation [16].

**Régularité uniforme.** Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . Une mesure ou une fonction  $X(\mathbf{t})$  appartient à  $C^\varepsilon$  si ses coefficients d'ondelette vérifient :

$$\exists C > 0 : \forall j, k_1, k_2, m \ |d_X^{(m)}(j, k_1, k_2)| \leq C 2^{j\varepsilon}. \tag{3}$$

On définit alors

$$h_{min} = \sup\{\varepsilon : X \in C^\varepsilon\}.$$

On peut retrouver expérimentalement cet exposant à partir des quantités

$$\omega_j = \sup_{m, k_1, k_2} |d_X^{(m)}(j, k_1, k_2)|.$$

On a, en effet,

$$h_{min} = \liminf_{2^j \rightarrow 0} \frac{\ln \omega_j}{\ln 2^j};$$

Une fonction ou une mesure est *uniformément höldérienne* si  $h_{min} > 0$ . Cette propriété induit alors la chaîne d'implications suivante : l'image est uniformément höldérienne, donc elle est continue, donc elle est bornée, donc ses coefficients dominants sont finis. Ces implications sont strictes.

La notation  $h_{min}$  est justifiée par la propriété suivante : Si  $h_{min} > 0$ ,

$$\forall \mathbf{t}_0, h(\mathbf{t}_0) \geq h_{min}.$$

On remarquera cependant que  $h_{min}$  n'est pas nécessairement l'infimum de la fonction  $h(\mathbf{t}_0)$  comme le montre l'exemple classique de *chirp* :  $|t|^\alpha \sin(|t|^{-\beta})$ ,  $\alpha, \beta > 0$  qui est  $C^\infty$  en dehors de l'origine ; on a  $h(0) = \alpha$  alors que  $h_{min}$  vaut  $\alpha/(\beta + 1)$ .

**Coefficients dominants.** Introduisons l'indexation d'un carré dyadique

$$\lambda_{j, k_1, k_2} = \{[k_1 2^{-j}, (k_1 + 1) 2^{-j}], [k_2 2^{-j}, (k_2 + 1) 2^{-j}]\},$$

et dénotons l'union de 9 tels intervalles voisins par

$$3\lambda_{j, k_1, k_2} = \bigcup_{m, n \in \{-1, 0, 1\}} \lambda_{j, k_1 + m, k_2 + n}.$$

À partir des  $d_X^{(m)}(j, k_1, k_2)$ , on définit les coefficients dominants par :

$$L_X(j, k_1, k_2) = \sup_{m, \lambda' \subset 3\lambda_{j, k_1, k_2}} |d_X^{(m)}(\lambda')|, \tag{4}$$

notons que ce sup est fini dès que  $X$  est une fonction bornée. En termes pratiques, le coefficient dominant  $L_X(j, k_1, k_2)$  remplace le coefficient d'ondelette  $d_X^{(m)}(j, k_1, k_2)$ ,  $m = 1, 2, 3$ , par celui possédant la plus grande valeur absolue parmi tous les coefficients existant dans un voisinage spatial de  $(k_1, k_2)$ , à toutes les échelles plus fines  $2^j \leq 2^j$ .

Si  $X$  est uniformément höldérienne et possède un exposant de Hölder  $h$  en  $\mathbf{t}_0$  alors les coefficients dominants le reproduisent : si  $2^{-j}\mathbf{k}$  est le point dyadique le plus proche de  $\mathbf{t}_0$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, L_X(j, \mathbf{k}) \leq 2^{j(h(\mathbf{t}_0) - \varepsilon)}, 2^j \rightarrow 0,$$

et cette majoration est fautive si  $\varepsilon < 0$ . C'est sur ce résultat théorique fondamental que repose l'usage des coefficients dominants pour l'analyse multifractale [4]. Aussi, dans toute la suite de la Section 2, nous faisons l'hypothèse que  $X$  est uniformément höldérienne ; dans la Section 3, nous examinerons comment se ramener à ce cas quand  $X$  est une mesure.

**Fonctions de structure et fonctions d'échelle.** Construisons maintenant les moyennes temporelles des puissances  $q$ -èmes des coefficients dominants, communément appelées *fonctions de structure*, par analogie avec la physique statistique :

$$S^L(j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k_1, k_2} L_X(j, k_1, k_2)^q \quad (5)$$

L'analyse multifractale consiste essentiellement à évaluer, dans la limite des petites échelles, le comportement du logarithme des fonctions de structures :

$$\zeta_L(q) = \liminf_{2^j \rightarrow 0} \frac{\ln S^L(j, q)}{\ln 2^j}. \quad (6)$$

La fonction  $\zeta_L(q)$  est souvent nommée *fonction d'échelle* dans la littérature relative aux aspects mathématiques et théoriques de l'analyse multifractale.

**Invariance d'échelle et analyse multifractale.** Qualitativement et pratiquement, l'équation (6) ci-dessus est associée à un comportement des fonctions de structure en loi de puissance dans la limite des petites échelles :

$$S^L(j, q) \simeq G_q 2^{j\zeta_L(q)}, 2^j \rightarrow 0. \quad (7)$$

Cette relation matérialise le lien entre la propriété d'invariance d'échelle et l'outil d'analyse que constitue l'analyse multifractale. En effet, la relation (7) prend la forme de l'équation (1), postulée comme définition de l'invariance d'échelle, avec pour choix spécifique de quantités multirésolution, les coefficients dominants. Adoptant le point de vue de la relation (7), les  $\zeta_L(q)$  sont souvent dénommés *exposants d'échelle* dans la littérature associée aux applications et mises en œuvre de l'analyse multifractale, et parfois *fonctions de partition*, par analogie à la mécanique statistique.

**Spectre de Legendre.** La fonction  $q \rightarrow \zeta_L(q)$  étant concave, cf. [16], on peut, sans perte d'information, considérer plutôt sa transformée de Legendre

$$\mathcal{L}(h) = \min_{q \neq 0} (d + qh - \zeta_L(q)). \quad (8)$$

(en effet, cette transformation est bijective entre fonctions concaves). La fonction  $\mathcal{L}(h)$  est appelée le *spectre de Legendre* de l'image.

**Formalisme multifractal.** Le formalisme multifractal fournit une interprétation du spectre de Legendre en termes de singularités höldériennes, puisqu'il consiste à affirmer que

$$\forall h, \mathcal{D}(h) = \mathcal{L}(h). \quad (9)$$

**Commentaires.** La relation (9) ci-dessus est celle utilisée en pratique pour calculer numériquement le spectre multifractal. Il est essentiel de noter, cependant, qu'elle ne permet la mesure de  $\mathcal{D}(h)$  que si  $\mathcal{L}(h)$  est bien défini. Il faut pour cela que tous les coefficients dominants soient bornés et donc, en pratique, que  $X$  soit une fonction bornée. Pour les applications, on cherche à estimer le spectre de Legendre, qui est la seule quantité à laquelle on a accès numériquement, sans pouvoir en général déterminer si son interprétation en termes de spectre multifractal est valide ou non. Les conditions de validité de ce formalisme restent, en effet, théoriquement mal connues : la relation (9) n'est pas valable pour toute fonction ou toute réalisation de processus aléatoire  $X(\mathbf{t})$  en général. Les sections suivantes proposent des discussions avancées sur cette délicate question théorique. Mentionnons néanmoins immédiatement que le formalisme multifractal, construit sur les coefficients dominants, possède deux propriétés théoriques essentielles pour une mise en œuvre pratique.

i) Supposons que l'image analysée soit uniformément höldérienne, alors la fonction d'échelle  $\zeta_L(q)$ , définie par l'équation (6) ci-dessus, est indépendante du choix précis de l'ondelette-mère d'analyse  $\psi_0$ . Ce point a été discuté de façon détaillée dans [16]. Il est important dans les applications car il montre que la fonction d'échelle (ou, de façon équivalente sa transformée de Legendre  $\mathcal{L}(h)$ ) est une quantité intrinsèque qui peut donc être utilisée comme outil de classification ou d'identification (indépendamment de la validité du formalisme multifractal que nous allons étudier ci-dessous).

ii) Il est prouvé théoriquement que l'équation (9) est rigoureusement exacte pour deux catégories de processus stochastiques largement utilisés en pratique pour la modélisation des propriétés d'invariance d'échelle dans les applications : les processus autosimilaires à variance finie et accroissements stationnaires (tels que le mouvement brownien fractionnaire) [27] et séries d'ondelettes aléatoires dont les coefficients sont de la forme

$$d_X^{(m)}(j, k_1, k_2) = \mu(\lambda_{j, k_1, k_2}),$$

où  $\mu$  est une martingale multiplicative (telles que les cascades multiplicatives de Mandelbrot [21,22]) ou une de leurs

extensions construites à partir de processus de Poisson composés [28]).

### 2.3 Validité du formalisme multifractal

Cette section propose une discussion avancée des conditions de validité du formalisme multifractal.

**Majoration du spectre de singularité.** Notons  $N_j$  le nombre de cubes dyadiques de côté  $2^j$  qui intersectent un ensemble  $A$ . La dimension supérieure de boîte de  $A$  est donnée par

$$dim_B(A) = \limsup_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log(N_j)}{\log(2^{-j})},$$

et sa dimension de packing par

$$dim_P(A) = \inf \left\{ \sup_{i \in \mathbb{N}} \left( dim_B A_i : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \right\},$$

où l'infimum est pris sur toutes les partitions de  $A$  en une famille dénombrable de sous-ensembles  $A_i$ . On a alors toujours :  $\forall A, dim_H(A) \leq dim_P(A)$  [29].

Définissons maintenant



$$G_h = \{t : h(t) \leq h\} \text{ et } F_h = \{t : h(t) \geq h\};$$

on a, alors, cf [4,30]:

$$\forall q < 0, dim_P(F_h) \leq d + qh - \zeta(q).$$

Supposons, de plus, que l'image soit uniformément höldérienne; alors, on obtient, cf [4,30]:

$$\forall q > 0, dim_H(G_h) \leq d + qh - \zeta(q).$$

Combinant ces deux arguments, on en déduit que, sous la seule hypothèse de régularité uniforme, le spectre de singularité est toujours majoré par le spectre de Legendre :

$$\mathcal{D}(h) \leq \mathcal{L}(h). \tag{10}$$

Cette majoration est, en général, fautive si l'hypothèse de régularité uniforme n'est pas vérifiée.

**Caractérisation des spectres de Legendre.** Dans la suite de ce paragraphe, nous supposons que la fonction (l'image) considérée vérifie également une propriété d'irrégularité uniforme, c'est-à-dire qu'il existe  $C', \beta > 0$  tels que

$$\forall j, k_1, k_2, L_X(j, k_1, k_2) \geq C' 2^{j\beta}. \tag{11}$$

Les fonctions  $\mathcal{L}(h)$  qui sont effectivement les spectres de Legendre d'une image  $X$  se caractérisent alors aisément [31]:

- elles sont concaves,
- Il existe  $0 < h_{min} \leq h_{med} \leq h_{max} < +\infty$  tels que  $\mathcal{L}(h) = -\infty$  si  $h \notin [h_{min}, h_{max}]$ ,

$$- \forall h \in [h_{min}, h_{max}], \mathcal{L}(h) \geq 0,$$

$$- \mathcal{L}(h_{med}) = d.$$

On appellera de telles fonctions des *spectres admissibles*, et leurs transformées de Legendre des *fonctions d'échelle admissibles*.

**Remarques:**  $h_{min}$  a déjà été défini, on a

$$h_{max} = \inf\{\beta : (11) \text{ est vérifié}\};$$

enfin,  $h_{med} > 0$  n'est pas nécessairement unique, c'est-à-dire que  $\mathcal{L}(h)$  peut prendre la valeur  $d$  sur un intervalle.

On prouve alors le résultat suivant (cf. [30]):

**Théorème:** Soit  $X$  une image vérifiant les propriétés de régularité et d'irrégularité uniformes (cf. respectivement, les équations (3) et (11)). Si son spectre de Legendre  $\mathcal{L}(h)$  est dégénéré, c'est-à-dire vérifie  $h_{min} = h_{max}$ , alors en tous points,  $h(\mathbf{t}) = h_{min}(= h_{max})$  et le formalisme multifractal est vérifié. Sinon, on peut construire plusieurs images ayant ce spectre de Legendre  $\mathcal{L}(h)$  et des spectres de singularités différents.

Ce théorème stipule que le seul cas où la connaissance de  $\zeta(q)$  permet de connaître le spectre de singularités, et où le formalisme multifractal est vérifié sans hypothèse supplémentaire, est celui des fonctions ou des processus possédant un spectre dégénéré, encore appelés *monofractal(es)*. Notons cependant que ce cas recouvre des exemples importants, comme les champs browniens fractionnaires.

Ce théorème indique également que, pour n'importe quel spectre admissible non dégénéré, on peut théoriquement construire un contre-exemple pour lequel  $\mathcal{D}(h)$  diffère de  $\mathcal{L}(h)$ . Une telle construction est détaillée dans [31].

## 3. Mesures et intégration fractionnaire

Une image numérique est une moyenne locale (sur chaque pixel) d'une intensité lumineuse; elle s'interprète donc naturellement comme une approximation, à l'échelle de résolution, d'une mesure positive, et non comme celle d'une fonction bornée (*a fortiori* uniformément hölderienne). Une analyse non détaillée ici de banques d'images généralistes indique qu'on rencontre *a priori* autant d'images caractérisées par  $h_{min} < 0$  que par  $h_{min} > 0$ . Il n'y a donc aucune raison *a priori* de supposer qu'une image est uniformément höldérienne. On ne peut pas appliquer directement les techniques décrites précédemment sans analyse préalable. À titre d'exemple, l'image de l'exemple de la section 6.5 (cf. figure 1) est caractérisée par  $h_{min} = -0.40$ .

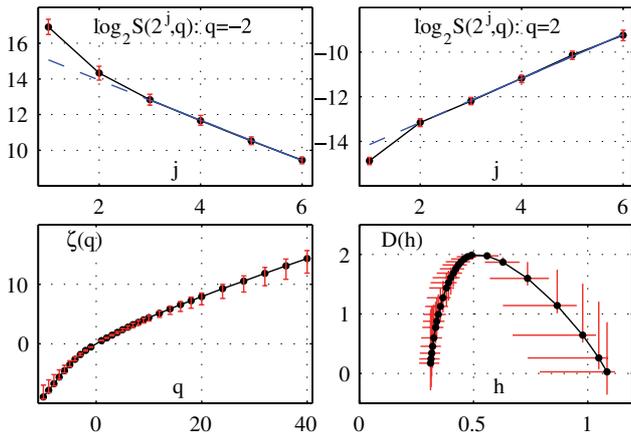


Figure 1. Analyse multifractale d'une image naturelle. 1<sup>ère</sup> ligne : image réelle; 2<sup>ème</sup> ligne : fonctions de structure pour  $q = -2$  (gauche) et  $q = 2$  (droite); 3<sup>ème</sup> ligne : exposants des lois d'échelle estimés  $\hat{\zeta}(q)$  (gauche) et spectre  $D(h)$  (droite).

### 3.1 Exposants de Hölder négatifs, (pseudo-) intégration fractionnaire et formalisme multifractal

Rappelons qu'une mesure (bidimensionnelle)  $\mu$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ , c'est-à-dire vérifiant :  $\exists C > 0$  telle que  $\forall f$  continue à support compact,

$$|\langle \mu | f \rangle| \leq C \sup |f|.$$

Les coefficients d'ondelettes  $D_\mu^{(m)}(j, \mathbf{k})$  de  $\mu$  vérifient donc

$$|D_\mu^{(m)}(j, \mathbf{k})| = 2^{-2j} |\langle \mu | \psi^{(m)}(2^{-j} \cdot -(\mathbf{k})) \rangle| \leq C 2^{-2j} \quad (12)$$

(le lecteur vérifiera aisément qu'une croissance en  $2^{-2j}$  est effectivement atteinte, dans le cas d'une masse de Dirac par exemple).

**Exposants de Hölder négatifs.** Les coefficients d'ondelette d'une mesure peuvent croître exponentiellement quand  $j \rightarrow -\infty$ . Ainsi, ses coefficients dominants peuvent être infinis, et le formalisme multifractal construit sur ces coefficients dominants ne peut donc pas lui être directement appliqué. Cette difficulté n'est pas spécifique de l'image, mais se pose aussi pour

de nombreux signaux (1D) positifs qui s'interprètent comme des discrétisations de mesures (le signal de dissipation en turbulence hydrodynamique [21], ceux de précipitations en météorologie [7], ...); notons que, en dimension 1, les coefficients d'ondelette d'une mesure peuvent croître en  $2^{-j}$ . De même, toutes les analyses multifractales pratiques proposées précédemment, c'est-à-dire tous les formalismes multifractals envisagés jusqu'ici, sont confrontés à ce problème: ils ne s'appliquent pas à l'étude d'une mesure non bornée (c'est-à-dire dont la masse totale n'est pas finie) [16].

On peut relier cette difficulté à l'existence d'exposants de Hölder négatifs pour les mesures. On dira qu'une mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^2$  est  $C^\alpha(t_0)$  si, pour  $r$  assez petit,

$$\mu(B(t_0, r)) \leq C r^{\alpha+2},$$

où  $B(t_0, r)$  désigne la boule de centre  $t_0$  et de rayon  $r$ . On définit alors

$$h(\mathbf{t}_0) = \sup\{\alpha : \mu \in C^\alpha(\mathbf{t}_0)\}.$$

Cette définition (bien qu'elle ne soit pas celle habituellement utilisée pour la régularité des mesures) est justifiée par la remarque suivante: si  $\mu$  a une densité au voisinage de  $t_0$ , avec un comportement du type

$$d\mu \sim |t - t_0|^\alpha dt$$

(ici, toute valeur de  $\alpha > -2$  est possible), alors son exposant de Hölder en  $t_0$  est  $\alpha$ , comme attendu. Les exposants de Hölder d'une mesure sur  $\mathbb{R}^2$  sont toujours supérieurs ou égaux à  $-2$ . L'exposant  $h_{min}$  d'une mesure est bien défini (rappelons qu'il est défini directement à partir des coefficients d'ondelettes, et non à partir des coefficients dominants) et (12) montre que  $h_{min}$  est toujours supérieur ou égal  $-2$ .

Ainsi, une mesure (et donc une image) est naturellement susceptible de présenter des exposants de Hölder négatifs.

**Intégration fractionnaire.** Une façon de se ramener à l'étude d'une fonction bornée (voire uniformément hölderienne), et de pouvoir ainsi appliquer les méthodes que nous avons décrites, consiste à intégrer fractionnairement suffisamment l'image. Cette approche a été utilisée dans e.g., [1,2,12].

L'intégrée fractionnaire d'ordre  $\gamma$  d'une fonction ou d'une mesure  $X$  est définie sur sa transformée de Fourier par

$$(\widehat{I^\gamma X})(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\gamma/2} \hat{X}(\xi). \quad (13)$$

Si  $X$  est une mesure positive de  $\mathbb{R}^2$ , une intégration fractionnaire d'ordre  $\gamma > 2$  suffit toujours pour que  $I^\gamma X$  soit une fonction uniformément hölderienne; dans la pratique, un ordre moindre peut s'avérer suffisant. Par exemple, on modélise souvent des images de synthèse par des fonctions à variation bornée, qui, en dimension 2, ne sont pas nécessairement bornées, mais sont cependant plus régulières que des mesures générales; dans ce

cas, une intégration fractionnaire d'ordre 1 suffit. On voit que, dans tous les cas, il convient de disposer d'un critère permettant de déterminer si l'image (ou le signal) considérée est effectivement une fonction bornée (voire uniformément hölderienne) et, si ce n'est pas la cas, à partir de quel ordre d'intégration fractionnaire elle (il) le sera. La réponse à cette question est fournie par la proposition qui suit.

**Proposition :** Soit  $X$  une mesure telle que  $h_{min} \leq 0$  ; dès que  $\gamma > -h_{min}$ , alors  $I^\gamma X$  est une fonction uniformément hölderienne.

**Remarque :** Il est donc important de déterminer  $h_{min}$  avant de commencer l'analyse multifractale. Supposons en effet que  $X$  ne soit pas une fonction bornée, l'image stockée étant, en pratique, une approximation à une échelle finie, on ne dispose que d'un nombre fini de coefficients d'ondelette, et on peut ainsi toujours calculer les coefficients dominants correspondants (qui sont donc numériquement toujours accessibles). Ces coefficients dominants seront cependant sans signification théorique (ils correspondront au sup des premiers termes d'une suite non bornée), ils prendront une valeur arbitraire, et l'analyse multifractale ainsi réalisée sera complètement erronée.

**Pseudo-intégration fractionnaire et formalisme multifractal.**

Dans la pratique, le calcul d'une intégration fractionnaire peut se révéler difficile. Plutôt que d'effectuer réellement une intégration fractionnaire sur une image, puis de lui appliquer le formalisme multifractal défini au paragraphe 2.2, nous allons proposer une version modifiée du formalisme multifractal qui combine les deux opérations, contournant ainsi cette difficulté.

i) On remplace d'abord les coefficients d'ondelettes  $d_X^{(m)}(j, k_1, k_2)$  par :

$$d_X^{(m), \gamma}(j, k_1, k_2) = 2^{\gamma j} d_X^{(m)}(j, k_1, k_2)$$

On obtient ainsi les coefficients d'ondelette d'une *pseudo-intégrée fractionnaire*  $\tilde{I}^\gamma X$  de  $X$  qui a exactement les mêmes propriétés de régularités globale et locale que  $I^\gamma X$  : Si  $\gamma > -h_{min}$ ,  $\tilde{I}^\gamma X$  et  $I^\gamma X$  ont même fonction d'échelle et même exposant de Hölder en tout point.

ii) On introduit ensuite les coefficients dominants associés à ces nouveaux coefficients :

$$L_X^\gamma(j, k_1, k_2) = \sup_{m, \lambda' \subset 3\lambda_{j, k_1, k_2}} |d_X^{(m), \gamma}(\lambda')|. \tag{14}$$

Qualitativement, ces coefficients dominants généralisés de  $X$  jouent un rôle équivalent à celui de coefficients dominants calculés à partir de  $I^\gamma X$ . Quantitativement, on montre que, si  $I^\alpha X$  possède un exposant de Hölder  $h$  en  $t_0$  alors les coefficients dominants généralisés correspondants le reproduisent : si  $2^{-j} \mathbf{k}$  est le point dyadique le plus proche de  $t_0$ ,  $L_X^\gamma(j, k_1, k_2) \sim 2^{hj}$ .

iii) Puis, on considère les fonctions de structure :

$$S_\gamma^L(j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k_1, k_2} L_X^\gamma(j, k_1, k_2)^q. \tag{15}$$

Celles-ci se comportent comme une loi de puissance en fonction de l'échelle d'analyse  $2^j$ , dans la limite des petites échelles  $2^j \rightarrow 0$  :

$$S_\gamma^L(j, q) \approx G_q^\gamma 2^{j\zeta_\gamma(q)}. \tag{16}$$

Et le spectre de Legendre de  $I^\gamma X$  est donc

$$L_\gamma(h) = \min_{q \neq 0} (1 + qh - \zeta_\gamma(q)). \tag{17}$$

**Spectre de Legendre de l'image originale?** La méthode proposée consiste à fixer un  $\gamma > -h_{min}$ , puis à appliquer à la fonction  $\tilde{I}^\gamma X$ , qui est uniformément hölderienne, la technique du formalisme multifractal, pour obtenir un spectre de Legendre  $\mathcal{L}_\gamma(h)$ . Ceci soulève cependant immédiatement des problèmes d'interprétation et pratiques : quel est le lien entre  $\mathcal{L}_\gamma(h)$  et l'image d'origine  $X$  ? Comment les résultats obtenus dépendent-ils de la valeur de  $\gamma$  choisie ?

Pour examiner ces questions, il est nécessaire de revenir à l'interprétation de la fonction d'échelle en termes de singularités hölderiennes, fournie par le formalisme multifractal.

Supposons (hypothèse restrictive, mais vérifiée par de nombreux modèles) que le formalisme multifractal est vérifié par  $I^\gamma X$  si  $\gamma > -h_{min}$  et que, de plus, les singularités ponctuelles de  $I^\gamma X$  sont de type *cusp*, c'est-à-dire que l'exposant de Hölder de  $I^\gamma X$  en tout point  $t_0$  est  $h(t_0) + \gamma$  (c'est typiquement le cas de  $|t - t_0|^\gamma$ ). Alors, les spectres de singularités de  $I^\gamma X$  et  $I^\beta X$  se déduisent l'un de l'autre par une simple translation de  $\beta - \gamma$ , et il en ira de même pour leurs spectres de Legendre  $L_\gamma(h)$  et  $L_\beta(h)$ . On peut ainsi exhiber *naturellement* une fonction  $\mathcal{L}(h)$  :

$$\forall \gamma > -h_{min}, L_\gamma(h + \gamma) = \mathcal{L}(h). \tag{18}$$

Contrairement à l'association heuristique souvent faite,  $\mathcal{L}(h)$  ne peut en général pas être interprétée comme étant le spectre de Legendre de  $X$ , car nous nous plaçons *a priori* dans le cas où  $X$  n'est pas uniformément hölderienne. Cependant, la fonction  $\mathcal{L}(h)$  ainsi construite est intrinsèquement liée à l'image originale  $X$  et ainsi la caractérise précisément. Elle correspond exactement au spectre de Legendre de  $X$  si  $X$  est uniformément Hölderienne.

Toutefois, la situation dans laquelle  $X$  ne contient que des singularités de type *cusp* n'est pas la plus générale. Même lorsque l'hypothèse de validité du formalisme multifractal est vérifiée par les  $I^\gamma X$ , la translation (18) peut être mise en défaut. On dit alors que  $X$  présente des *singularités oscillantes*. Nous allons maintenant examiner cette situation.

**3.2 Intégration fractionnaire et singularités oscillantes**

**Singularités oscillantes.** En dimension 1, l'exemple typique de singularité oscillante (ou *chirp*) est la fonction

$$|t - t_0|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|t - t_0|^\beta}\right) \text{ où } \alpha, \beta > 0.$$

Un calcul élémentaire montre que, pour une telle fonction, après  $n$  intégrations, l'exposant de Hölder en  $t_0$  augmente de  $n(1 + \beta)$  et non  $n\beta$  comme c'est le cas pour les singularités *cusp*; il en est de même pour une intégration fractionnaire d'ordre  $\gamma$  non entier.

Cette propriété est à la base de la définition des singularités oscillantes dans le cas général et en plusieurs dimensions. Heuristiquement, on demande que, après une intégration fractionnaire d'ordre  $\varepsilon$  suffisamment petit, l'accroissement de l'exposant de Hölder soit  $\varepsilon(1 + \beta)$ . Formellement, on définit l'exposant d'oscillation de la façon suivante. On note  $h^\gamma(x_0)$  l'exposant de Hölder en  $x_0$  de  $I^\gamma X$ , l'exposant d'oscillation de  $X$  en  $x_0$  est alors défini par :

$$\beta(x_0) = \left( \frac{\partial(h^\gamma(x_0))}{\partial\gamma} \right)_{\gamma=0^+} - 1.$$

Une éventuelle mesure directe, point par point, d'exposants d'oscillation se heurte aux mêmes difficultés pratiques que celle de l'exposants de Hölder, aussi va-t-on essayer de déterminer de façon indirecte si une image contient ou non des singularités oscillantes en comparant les spectres de Legendre  $L_\gamma(h)$  de ses intégrés fractionnaires pour toute une gamme de valeurs de  $\gamma$ .

**Intégration fractionnaire.** Le raisonnement heuristique conduisant à la translation (18) n'est plus valide a priori lorsque  $X$  contient des singularités oscillantes. Cependant, le théorème suivant (cf. [32]) énonce des conditions suffisantes relativement générales, pour garantir la validité de la relation (18) :

**Théorème :** Soit  $X$  une fonction bornée. Notons  $M(j, k_1; k_2)$  l'échelle  $j'$  à laquelle le sup est atteint dans (4), et

$$\theta_j = \inf_{k_1, k_2} (M(j, k_1; k_2) - j).$$

Si

$$\lim_{2^j \rightarrow 0} \frac{\theta_j}{j} = 0 \quad (19)$$

alors l'image  $X$  n'a aucune singularité oscillante, et on a

$$\forall \gamma \geq 0 \quad L_\gamma(h) = L(h - \gamma). \quad (20)$$

Notons, d'une part, que la condition (19) ne fait pas a priori l'hypothèse de validité du formalisme multifractal; d'autre part, que ce théorème s'applique aux fonctions et non aux mesures. Cela signifie que, en pratique,  $X$  ne vérifiera la relation (20) qu'à partir d'un ordre  $\gamma > -h_{min}$ .

L'hypothèse (19) est en pratique souvent vérifiée. C'est par exemple le cas pour les champs browniens fractionnaires, où l'on a  $M(j, k_1; k_2) \leq j + C(\log j)$  (cf. [16] pour le cas monodimensionnel, la démonstration du cas multidimensionnel est similaire); c'est aussi le cas des modèles de séries aléatoires d'ondelettes dans lesquels les coefficients d'ondelette sont définis à partir de

quantités  $\mu(\lambda)$ ,  $\mu$  étant une mesure (par exemple une martingale multiplicative) (cf. [Aubry2002?]).

**Détection de singularités oscillantes.** Cette procédure d'intégration fractionnaire (avec des ordres  $\gamma$  croissants), appliquée à une fonction uniformément hölderienne fournit un indicateur simple et pertinent sur l'existence d'éventuelles singularités oscillantes. Ce problème est important dans de nombreuses applications, par exemple pour l'étude de la turbulence pleinement développée, cf [33].

Supposons en effet que  $X$  et ses intégrés fractionnaires vérifient le formalisme multifractal; alors, si (20) n'est pas vérifiée, on peut conclure à l'existence de singularités oscillantes. Dans le sens contraire, si (19) est vérifiée, on peut conclure à l'absence de singularités oscillantes (sans avoir à faire l'hypothèse de validité du formalisme multifractal).

On notera cependant que ces deux résultats ne permettent pas de conclure dans tous les cas: typiquement, il peut arriver que (19) ne soit pas vérifiée, et que d'un autre côté  $X$  et ses intégrés fractionnaires ne vérifient pas le formalisme multifractal. Enfin, même dans le cas de validité du formalisme multifractal, (20) ne permet pas de conclure à l'absence de singularités oscillantes; en effet, elles pourraient être présentes sur des ensembles de dimensions suffisamment petites pour être *masquées* par les autres dans les spectres de singularités.

### 3.3 Discussion

On a vu qu'une image doit, en général, être intégrée fractionnairement pour qu'on puisse lui appliquer le formalisme multifractal par coefficients dominants. L'ordre minimal d'intégration fractionnaire, correspondant à (l'opposé de) la régularité uniforme de  $X$ , doit impérativement être déterminé a priori:  $\gamma > -h_{min}$ . Plutôt que de réaliser cette intégration fractionnaire puis d'appliquer le formalisme multifractal défini au paragraphe 2.2, on peut combiner ces deux opérations en un seul formalisme, proposé en section 3.1. Nous montrons aussi que cette procédure permet, sous condition, d'obtenir une fonction  $\mathcal{L}(h)$  intrinsèquement caractéristique de l'image  $X$  initiale, par une opération de translation appliquée  $L_\gamma(h)$ . La classe d'images satisfaisant ces conditions s'avère grande. Néanmoins, il est difficile de décider si une image rentre dans cette classe ou non. Une procédure pratique simple consiste alors à appliquer ce formalisme multifractal pour une série de valeurs croissantes de  $\gamma$ . Puis, à partir de tous les spectres estimés,  $\{\mathcal{L}_\gamma(h)\}$ , on compare les translattées. Lorsque ces dernières se superposent, on peut conclure à la validité des hypothèses du théorème précédent et ainsi à une estimation correcte du spectre de  $X$ . Lorsque la gamme de  $\gamma$  pour laquelle la superposition est validée commence nettement au delà de  $-h_{min}$ , on peut, de plus, conjecturer la présence de singularités oscillantes.

# 4. Analyse multifractale pratique

L'objet d'une analyse multifractale pratique consiste à estimer les exposants des lois d'échelle  $\zeta(q)$ , puis d'en déduire (via le formalisme multifractal) le spectre de Legendre  $\mathcal{L}(h)$ , à partir d'une seule observation du processus aléatoire 2D que représente l'image. Dans toute cette section, on suppose que le formalisme multifractal est valide et l'on confond  $\mathcal{D}(h)$  et  $\mathcal{L}(h)$ .

## 4.1 Log-cumulants

Récemment, il a été suggéré de ré-exprimer les  $\zeta(q)$  par un développement limité au voisinage de  $q = 0$  :  $\zeta(q) = \sum_{p \geq 0} c_p \frac{q^p}{p!}$  [34,35]. Nous étendons ici cette idée au formalisme par coefficients dominants. Les coefficients,  $c_p$ , de ce développement s'obtiennent alors naturellement à partir des cumulants,  $C_p^{j,L}$ , de  $\ln L_X(j, \cdot, \cdot)$  :

$$C_p^{j,L} = c_{0,p}^L + c_p^L \ln 2^j. \tag{21}$$

La validité de ce développement jusqu'à un ordre  $p$  suppose le caractère fini des moments des  $L_X(j, \cdot)$  jusqu'à cet ordre.

L'utilisation de ce développement est motivée par le fait que ces *log-cumulants*,  $c_p$ , soulignent la différence entre deux grandes classes de processus invariants d'échelle : celle pour laquelle les  $\zeta(q)$  ne sont pas des fonctions linéaires en  $q$  ( $c_2 < 0$ , contenant notamment la famille des martingales (ou cascades) multiplicatives [21,22], *versus* celle pour laquelle les  $\zeta(q)$  sont linéaires en  $q$  ( $\forall p \geq 2 : c_p \equiv 0$ ), comprenant notamment les processus autosimilaires à accroissements stationnaires et variance finie (par exemple les champs browniens fractionnaires), classe souvent dite *monofractale*.

Un calcul relativement fastidieux, complètement détaillé dans [36], permet également d'exprimer un développement de  $\mathcal{L}(h)$  en fonction des  $c_p$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(h) = d + \frac{c_2}{2!} \left( \frac{h - c_1}{c_2} \right)^2 + \frac{-c_3}{3!} \left( \frac{h - c_1}{c_2} \right)^3 + \\ \frac{-c_4 + 3c_3^2/c_2}{4!} \left( \frac{h - c_1}{c_2} \right)^4 + \dots \end{aligned}$$

Ce développement permet de lire  $\mathcal{L}(h)$  comme une approximation parabolique, centrée autour de  $c_1$  et de largeur  $c_2$ , complétée par des corrections successives, pour son asymétrie,  $c_3$ , son aplatissement  $c_4 - 3c_3^2/c_2$ , ... En pratique, on se contentera souvent de l'estimation de  $c_1$  et  $c_2$ , quand ce sera possible de  $c_3$ , voire  $c_4$ . Ce point sera discuté de nouveau dans la partie relative aux résultats expérimentaux (cf. section 6).

## 4.2 Estimation de $\zeta(q)$ et $c_p$

Les Éqs (7), (16) ou (21) motivent l'estimation des  $\zeta(q)$  et  $c_p$  à partir de régressions linéaires des quantités  $\log_2(S(j, q))$  et  $\hat{C}_p^j$  contre  $\log_2 2^j = j$ ,

$$\hat{\zeta}(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 S(j, q) \tag{22}$$

$$\hat{c}_p = (\log_2 e) \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \hat{C}_p^j. \tag{23}$$

Les poids  $w_j$  satisfont les contraintes habituelles  $\sum_{j_1}^{j_2} j w_j \equiv 1$  et  $\sum_{j_1}^{j_2} w_j \equiv 0$ , et peuvent être exprimés comme  $w_j = \frac{1}{b_j} \frac{s_0 j - s_1}{s_0 s_2 - s_1^2}$ , avec  $s_i = \sum_{j_1}^{j_2} j^i / b_j$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Les nombres positifs  $b_j$  peuvent être choisis librement et reflètent la confiance attribuée à chacune des estimées  $S(j, q)$  et  $\hat{C}_p^j$ .

## 4.3 Estimation de $\mathcal{L}(h)$

Pour obtenir le spectre de Legendre  $\mathcal{L}(h)$ , à partir des exposants  $\zeta(q)$ , il faut théoriquement pratiquer une transformée de Legendre, conformément à l'équation 10. Ceci peut être effectivement réalisé à partir d'un algorithme pratique de calcul de cette transformée. Cependant, pour contourner la difficulté pratique associée, sous réserve de dérivabilité de la fonction  $\zeta(q)$ , on peut utiliser la formulation paramétrique de la transformée de Legendre :

$$h(q) = \zeta'(q)$$

$$\mathcal{L}(q) = d + q\zeta'(q) - \zeta(q)$$

Cette reformulation suggère une détermination directe et paramétrique de  $D(q), h(q)$  qui évite le calcul explicite de la transformée de Legendre (cf. [34]). Un ensemble de calculs détaillés dans [36] permet d'établir, sous réserve que la fonction  $\zeta(q)$  soit dérivable, que :

$$j\zeta(q) = -\kappa_q + \log_2 \mathbb{E} L_X(j, k)^q$$

$$jq\zeta'(q) = \frac{\mathbb{E} L_X(j, k)^q \log_2 L_X(j, k)^q}{\mathbb{E} L_X(j, k)^q},$$

puis d'aboutir à une procédure d'estimation par régressions linéaires contre  $\log_2 2^j = j$  :

$$\hat{\mathcal{L}}(q) = 1 + \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j U(j, q), \tag{24}$$

$$\hat{h}(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j V(j, q), \tag{25}$$

où

$$U(j, q) = \log_2 n_j + \sum_{k=1}^{n_j} R^q(j, k) \log_2 R^q(j, k), \quad (26)$$

$$V(j, q) = \sum_{k=1}^{n_j} R^q(j, k) \log_2 L_X(j, k), \quad (27)$$

$$R^q(j, k) = \frac{L_X(j, k)^q}{\sum_{k=1}^{n_j} L_X(j, k)^q}, \quad (28)$$

où les  $w_j$  sont des poids définis comme précédemment.

#### 4.4 Coefficients d'ondelettes ou coefficients dominants ?

Pendant longtemps l'analyse multifractale d'images a été effectuée à partir des coefficients de la transformée (discrète) en ondelettes,  $d_X(j, \mathbf{k})$  et non des coefficients dominants. Un formalisme multifractal ainsi que les procédures d'estimations associées peuvent être définis directement à partir des coefficients d'ondelettes en remplaçant systématiquement  $L_X(j, \mathbf{k})$  par  $|d_X(j, \mathbf{k})|$  dans les équations (5) à (28). Quelles sont les différences entre le formalisme par coefficients d'ondelettes et celui par coefficients dominants ?

Il a été montré [4,16] que le formalisme multifractal reposant directement sur les coefficients d'ondelettes souffrent de deux défauts majeurs. D'une part, son domaine de validité est moindre, et il fournit notamment une évaluation erronée du spectre multifractal si l'image analysée contient des singularités oscillantes. D'autre part, il ne permet pas d'accéder à la partie du spectre associée aux exposants de Hölder les plus élevés. Notamment, si  $\mathcal{L}(h)$  comprend une partie décroissante, comme c'est presque toujours le cas en pratique, celle-ci ne peut être évaluée. En effet, l'obtention de cette partie du spectre requiert l'usage de moments négatifs. Or, par nature, une transformée en ondelettes produit un grand nombre de *petits* coefficients, rendant l'évaluation des fonctions de structure  $S(a, q)$  pour  $q \leq 0$  instable numériquement et donc inopérante. L'utilisation des coefficients dominants apporte une solution à chacune de ces deux difficultés [4,16]. De plus, il est établi théoriquement que les fonctions d'échelle  $\zeta(q)$  et le spectre multifractal, définis par les équations (6) et (9), sont indépendants du choix de l'ondelette-mère  $\psi_0$  (cf. [4,16]), ce qui n'est pas le cas pour le formalisme basé directement sur les coefficients d'ondelette. Ce dernier point est donc une garantie supplémentaire de *robustesse* pour l'algorithme reposant sur les coefficients dominants.

En pratique, les performances d'estimation ont été comparées pour des signaux 1D dans [17] par exemple. Nous discuterons en section 6 les performances comparées des procédures construites sur les coefficients d'ondelettes ou dominants pour des images 2D.

## 5. Simulations numériques

Les performances statistiques des procédures d'estimation vont maintenant être étudiées par application à un grand nombre,  $N_{MC}$ , de réalisations de processus synthétiques 2D de taille  $N \times N$ , dont les propriétés multifractales sont connues théoriquement *a priori* et peuvent être contrôlées. Les performances sont caractérisées par les biais, variances et erreurs quadratiques moyennes des estimées, obtenues par moyenne sur les réalisations indépendantes.

### 5.1 Processus synthétiques

Nous utilisons d'une part, le **mouvement Brownien fractionnaire** (FBM) défini comme le seul processus Gaussien et exactement auto-similaire dont la fonction de covariance prend la forme [37]:

$$\mathbb{E}X(\mathbf{t})X(\mathbf{t}') = \sigma^2 (||\mathbf{t}'||^{2H} + ||\mathbf{t}'||^{2H} - ||\mathbf{t}' - \mathbf{t}'||^{2H}),$$

où  $0 < H < 1$  est appelé paramètre d'auto-similarité. Ses propriétés d'invariance d'échelle sont entièrement déterminées par le seul  $H$ :  $\zeta(q) = qH$ , et donc  $c_1 = H$ ,  $\forall p \geq 2$ :  $c_p \equiv 0$ . Son spectre multifractal se réduit à un point:  $\mathcal{D}(h) = 2\delta(h - H)$ . Ce processus est synthétisé à partir de la procédure proposée dans [37] et reposant sur la méthode dite *circulant embedded matrix* [38].

D'autre part, nous analysons les **casades multiplicatives** de Mandelbrot (CMC), voir, par exemple, [21]. On utilisera des multiplicateurs log-normaux (CMC-LN), pour lesquels la fonction  $\zeta(q)$  est exactement quadratique  $\zeta(q) = c_1 q + \frac{c_2}{2} q^2$ , et des multiplicateurs log-Poisson (CMC-LP), pour lesquels, tous les  $c_p$  sont non nuls (les formes exactes de  $\zeta(q)$  et  $\mathcal{D}(h)$  peuvent être consultées par exemple dans [17]). Afin d'obtenir des processus ayant une régularité uniforme minimale, les casades sont intégrées fractionnairement d'ordre  $\gamma > -h_{min}$ .

Pour ces deux classes de processus, le formalisme multifractal est valide.

Ces processus sont simulés numériquement à partir de routines MATLAB ou C, réalisées par nos soins. Les figures 2(a) et 2(d) proposent un exemple de réalisation de FBM et CMC-LN.

### 5.2 Paramètres de simulation et d'analyse

Les paramètres de l'étude numérique sont fixés à  $N_{MC} = 1000$  et  $N = 1024$ . Nous fixons  $H = 0.7$  pour le FBM,  $(c_1, c_2) = (0.5125, -0.0250)$  pour le CMC-LN,  $(c_1, c_2, c_3) = (0.538, -0.80, 0.014)$  pour le CMC-LP. Le paramètre  $\gamma$  est fixé *a priori*  $\gamma = 0.5 > -h_{min}$ . Les analyses sont

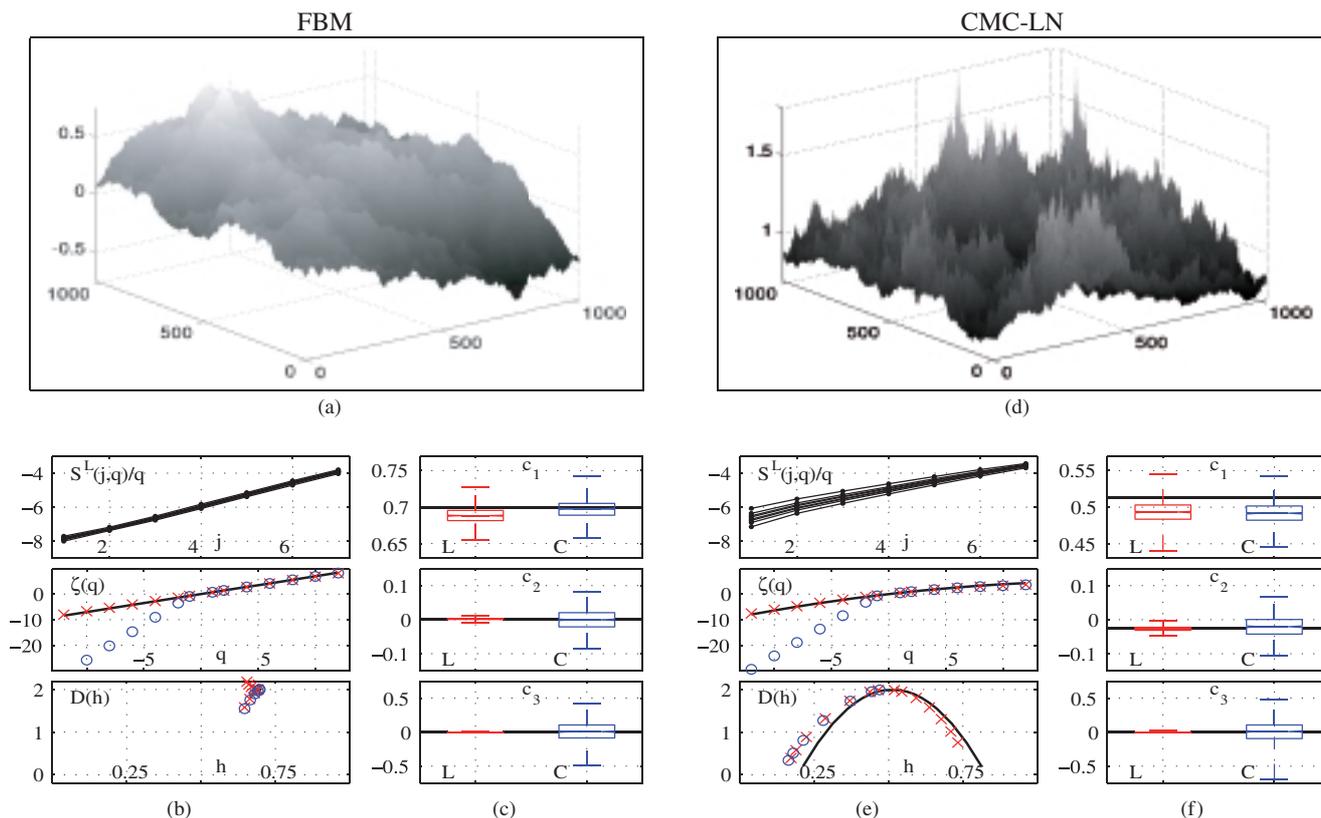


Figure 2. (a) et (d) : Une réalisation de FBM et de CMC-LN, respectivement. (b) et (e) : Fonctions de structure  $S^L(j,q)/q$  (en haut), estimations de  $\zeta(q)$  (au milieu) et de  $\mathcal{D}(h)$  (en bas), obtenues à partir des coefficients d'ondelettes ( $\circ$ ) et des coefficients dominants ( $\times$ ) pour FBM et CMC-LN, respectivement (la courbe noire continue rend compte des valeurs théoriques.). Les coefficients dominants permettent d'obtenir de bonnes estimations des  $\zeta(q)$  et de la totalité de  $\mathcal{D}(h)$  quand les coefficients d'ondelettes ne fonctionnent que pour  $q > -1$  et la partie croissante du spectre  $\mathcal{D}(h)$ . (c) et (f) : De haut en bas : « boxplots » des estimations de  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$ , (1 000 réalisations) pour FBM et CMC-LN, respectivement (valeurs théoriques en trait continu). Les estimations reposant sur les coefficients dominants (à gauche) et sur les coefficients d'ondelettes (à droite) sont tracés avec les mêmes échelles. On observe notamment que les estimations pour  $c_2$  et  $c_3$ , obtenues avec les coefficients dominants ont une variance beaucoup plus faible que celles produites avec les coefficients d'ondelettes.

conduites avec des ondelettes construites par produit tensoriel d'ondelettes orthogonales de Daubechies, de nombre de moments nuls  $N_\psi = 2$ . La régression linéaire est réalisée sur la gamme d'échelles  $2^3 \leq 2^j \leq 2^7$ . Suivant [3], nous choisissons des régressions pondérées, avec des  $b_j$  proportionnels aux nombres de coefficients disponibles à chaque échelle :  $b_j = n_j$ .

## 6. Performances d'estimation

### 6.1 Spectre multifractal complet

Les figures 2(b) et 2(c) et le tableau 2 comparent les estimations de  $\zeta(q)$  et  $\mathcal{D}(h)$ , pour (une réalisation de) FBM et de CMC-LN, obtenues à partir des coefficients d'ondelettes et des coefficients

dominants. Le tableau 2 montre, à travers le très fort biais observé pour les estimées des  $\zeta(q)$ ,  $q < 0$ , par coefficients d'ondelettes, que le formalisme multifractal correspondant ne fonctionne pas pour  $q < 0$ . De façon complémentaire, les figures 2(b) et 2(e) illustrent qu'une analyse reposant sur les coefficients d'ondelettes permet d'explorer uniquement des moments statistiques  $q > 0$  et donc, en pratique, uniquement la partie croissante du spectre de l'image analysée. Au contraire, la procédure proposée, reposant sur les coefficients dominants, permet de réaliser une analyse complète des propriétés multifractales d'une image, d'obtenir la partie décroissante de son spectre notamment.

### 6.2 Biais et variances d'estimation

Pour les ordres statistiques  $q$  positifs, les biais et variances des deux procédures sont du même ordre de grandeur pour les  $\zeta(q)$

(cf. tableau 2). Pour les log-cumulants  $c_p$ , la situation est plus compliquée. Pour  $c_1$ , les estimées par coefficients d'ondelettes ou dominants sont comparables en biais et variance. Pour  $c_2$  et  $c_3$ , les estimées par coefficients dominants présentent des variances et erreurs quadratiques moyennes substantiellement plus faibles (de 1 voire 2 ordre(s) de grandeur, cf. figures 2(c) et 2(f)) que celles obtenues avec les coefficients d'ondelettes. Les bénéfices pratiques sont importants. Prenons l'exemple de l'estimation du  $c_2$  pour le CMC-LN (cf. tableau 2). Coefficients d'ondelettes ou dominants en fournissent une estimation dont les biais sont comparables (et très faibles). Cependant, l'écart-type de l'estimée ondelettes est de l'ordre de grandeur de l'estimée elle-même : cela signifie que, en pratique, à partir d'une seule observation, il sera difficile, voire impossible de discriminer entre  $c_2 = 0$  et  $c_2 \neq 0$ . Cette question est pourtant cruciale en pratique puisque de sa réponse dépend pour l'utilisateur le choix de modéliser l'image par un processus autosimilaire ou par une cascade multiplicative. *A contrario*, l'écart-type significativement plus faible de l'estimée par coefficients dominants permet clairement, à partir d'une seule observation, de discriminer entre le FBM ( $c_2 = 0$ ) et les CMC ( $c_2 < 0$ ). Si on regarde maintenant le paramètre  $c_3 \neq 0$  pour le CMC-LP (cf. tableau 2), on observe que les coefficients dominants en permettent une estimée précise, avec un écart-type qui rend très improbable la valeur 0 : cela montre qu'estimer un  $c_3$  non nul sur une image  $1024 \times 1024$  est rendu possible par les coefficients dominants, un résultat remarquable, inaccessible avec les coefficients d'ondelettes et jamais obtenu précédemment.

Cette réduction de variance obtenue par les coefficients dominants constitue donc un bénéfice pratique remarquable et illustre les apports théorique et pratique des coefficients dominants : les  $c_p, p \geq 2$ , rendent compte de l'écart à la linéarité des  $\zeta(q)$  et donc essentiellement du caractère *multi*-fractal des processus étudiés, les coefficients dominants sont par nature sensibles à cet écart, que les coefficients d'ondelettes peinent à détecter. Au contraire, le paramètre  $c_1$ , terme dominant du développement des  $\zeta(q)$ , traduit la partie autosimilaire du processus, propriété également bien capturée par les coefficients d'ondelettes [39] et les coefficients dominants. Le fait qu'à la fois pour  $\zeta(q), q \geq 0$  et  $c_1$ , les performances d'estimation des  $d_x(j, k)$  et  $L_X(j, k)$  soient comparables montrent de plus que celles-ci sont principalement dominées par la propriété d'autosimilarité, pour tous les  $q \geq 0$ .

### 6.3 Sélection de la gamme d'échelle pour la régression linéaire

L'une des difficultés majeures de l'analyse multifractale pratique réside dans le choix de la gamme d'échelles  $2^{j_1} \leq 2^j \leq 2^{j_2}$  à impliquer dans la régression linéaire. Ce choix dépend évidemment de l'image analysée. Néanmoins, examinons les aspects pratiques de cette question pour les images synthétiques proposées, parfaitement invariantes d'échelle, donc pour lesquelles la régression linéaire devrait théoriquement être

réalisée sur toutes les échelles disponibles à l'analyse. Le caractère échantillonné des signaux ou images implique que les coefficients d'ondelettes ne sont pas exactement calculés à *petites* échelles, ce point est discuté dans [40] par exemple. Inclure les petites échelles induit donc un biais dans l'estimation, *a contrario*, les exclure augmente la variance d'estimation (diminution de la gamme d'échelles pour la régression et utilisation des échelles ou moins de coefficients sont disponibles). Le choix de la gamme d'échelle pour les estimations d'ondelettes résulte donc d'un compromis biais-variance, largement étudié et commenté pour les signaux 1D dans [41]. Pour les estimations par coefficients dominants, cette difficulté est accrue par la nature même de ces coefficients : on ne peut pas pratiquement calculer les véritables coefficients dominants pour les premières échelles puisque les coefficients d'ondelettes aux échelles plus fines ne sont pas, par définition, disponibles. Cette difficulté impose d'exclure une gamme plus large de *petites* échelles. C'est le prix pratique à payer pour bénéficier des avantages apportés par les coefficients dominants. Notons que le formalisme construit sur la MMTO souffre du même inconvénient.

Le tracé des fonctions de structure (cf. figures 2(b) (FBM) et 2(e) (CPC-LN), en haut) suggère visuellement l'usage de la gamme d'échelles  $2^2 \leq 2^j \leq 2^7$ . Des simulations numériques indiquent que ce choix réduit la variance d'estimation comme attendu, au prix cependant d'une forte augmentation du biais. L'erreur quadratique moyenne de l'estimation s'en trouve plus grande, justifiant ainsi le choix adopté  $2^3 \leq 2^j \leq 2^7$ , pour laquelle cette dernière est moindre.

### 6.4 Dépendance de la variance d'estimation en fonction des paramètres d'invariance d'échelle

Il a été observé que la variance d'estimation (par coefficient d'ondelette) du paramètre de Hurst pour les mouvements browniens fractionnaires, ne dépendait pas (ou extrêmement faiblement) de ce paramètre  $H$  (cf. [42]). À notre connaissance, cette étude n'a jamais été étendue à  $q \neq 2$  et  $c_p$  pour les processus autosimilaires et n'a jamais été abordée pour les cascades multiplicatives. Nous l'explorons ici numériquement.

Pour ce faire, les écart-types des estimées sont comparées, pour divers jeux de paramètres définissant les processus. Pour faciliter ces comparaisons, les écart-types sont modélisés (arbitrairement) par  $\sigma_{\hat{\theta}} = \mu |\lambda|^\beta$ , où  $\hat{\theta}$  désigne la quantité estimée et  $\lambda$  le paramètre en fonction duquel la dépendance est explorée.

La figure 3 confirme et étend les résultats obtenus dans le cas 1D pour  $q = 2$  : pour les browniens autosimilaires, l'écart-type de l'estimée ondelettes de n'importe quel  $\zeta(q), q \geq 0$  ou  $c_p$  semble ne pas (ou faiblement) dépendre de  $H$ . Pour les estimées par coefficients dominants cependant, la situation est différente, une dépendance claire avec le paramètre  $H$  est mise en évidence.

La figure 4 rend compte de la même étude, sur le CMC-LN, pour les écart-types des estimées de  $c_1$  et  $c_2$ , en fonction des

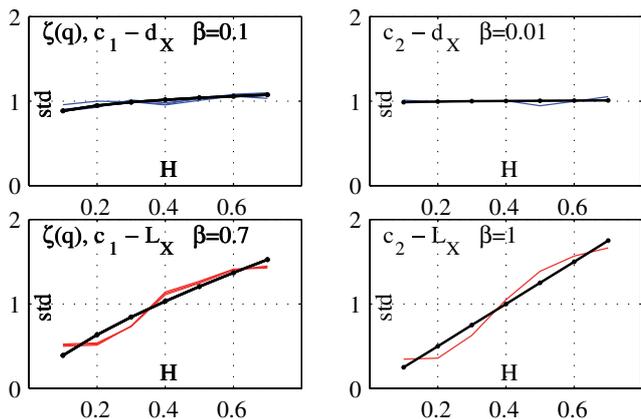


Figure 3. Dépendance de l'écart-type des estimées des paramètres multifractals en fonction du paramètre  $H$ , pour les mouvements browniens fractionnaires. Écart-types des estimées de  $c_1$  (et  $\zeta(q)$ ) (colonne de gauche) et  $c_2$  (colonne de droite), par les coefficients d'ondelettes (1<sup>ère</sup> ligne) et les coefficients dominants (2<sup>ème</sup> ligne), en fonction de  $H$ . Une dépendance claire est mise en évidence pour les coefficients dominants, alors qu'elle est quasi-inexistante pour les coefficients d'ondelettes.



paramètres  $c_1$  et  $c_2$ . La conclusion est essentiellement la même : pour les estimées ondelettes, la dépendance de la variance d'estimation de  $\hat{c}_1$  et  $\hat{c}_2$  avec les valeurs de  $c_1$  et  $c_2$  est faible alors qu'elle est nette pour les estimées par coefficients dominants. D'autres simulations réalisées sur des processus 1D, rapportées dans [36], confirment cette différence nette de comportement entre les estimateurs par coefficients d'ondelettes et par coefficients dominants.

Cette différence – les variances des estimées reposant sur les coefficients d'ondelettes dépendent peu ou pas de la valeur des quantités estimées tandis que celles des estimées obtenues des coefficients dominants en dépendent de façon marquée – constitue un résultat original et important, qui n'avait jamais, à notre connaissance, été rapporté auparavant. En première lecture, ce fait est en défaveur des coefficients dominants : cette dépendance complique la construction d'intervalles de confiance pour les estimées. Cette difficulté doit cependant être relativisée en regard du résultat obtenu précédemment (cf. paragraphe 6.2) : la variance est au plus comparable à et souvent bien moindre que celle obtenue par les coefficients d'ondelettes. Cette dépendance justifie également l'usage de technique de *bootstrap* non paramétrique pour la construction d'intervalles de confiance en analyse multifractale pratique (cf. [17,36]).

### 6.5 Illustration

Nous illustrons le formalisme multifractal par coefficients dominants sur une image, d'une scène réelle, de taille (1 024 × 768), prise par nos soins avec un appareil photo numé-

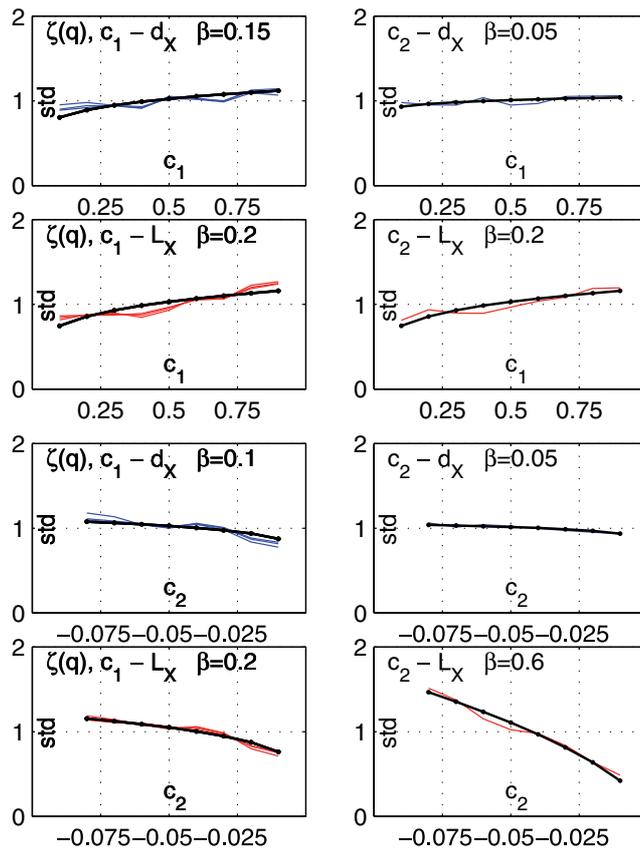


Figure 4. Dépendance de l'écart-type des estimées des paramètres multifractals en fonction des valeurs de ces mêmes paramètres, pour les cascades multiplicatives. Écart-types des estimées de  $c_1$  (et  $\zeta(q)$ ) (colonne de gauche) et  $c_2$  (colonne de droite), par les coefficients d'ondelettes (1<sup>ère</sup> et 3<sup>ème</sup> lignes) et les coefficients dominants (2<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> lignes), en fonction de  $c_1$  (1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> lignes) et  $c_2$  (3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> lignes). Une dépendance claire est mise en évidence pour les coefficients dominants, alors qu'elle est nettement moins marquée pour les coefficients d'ondelettes.

Tableau 1. Log-Cumulants d'une image réelle. Estimées des log cumulants de l'image de la figure 1.

	$\hat{c}_1$	$\hat{c}_2$	$\hat{c}_3$
estimate	0.519	-0.032	0.015

rique standard (cf. Fig. 1). Il s'agit de fougères naturelles, en référence à la feuille de fougère synthétique, souvent utilisée comme paradigme de construction fractale. L'analyse multifractale est conduite sur la pseudo-intégrée fractionnairement avec  $\gamma = 0.5 > -h_{min} = 0.4$ . Les fonctions de structure, correspondant au formalisme multifractal par coefficients dominants (Ondelette: Daubechies avec  $N_\psi = 3$ ) sont représentées sur la seconde ligne et montrent de parfaits comportements en lois de puissance. Les exposants de lois d'échelle et le spectre de Legendre (estimés par régression linéaire dans la gamme

Tableau 2. Performances d'estimations comparées. Biais, écart-types et erreurs quadratiques moyennes des estimées d'attributs multifractals, (par régressions linéaires, dans la gamme  $j = 3 - 7$ ) par coefficients d'ondelettes  $d_X$  et coefficients dominants  $L_X$ .

FBM		$d_X$			$L_X$		
$\Theta$		biais	std	mse	biais	std	mse
$\zeta(-2)$	-1.400	-2.112	2.310	3.129	0.028	0.021	0.035
$\zeta(-1)$	-0.700	-0.191	0.512	0.546	0.013	0.011	0.016
$\zeta(1)$	0.700	-0.002	0.010	0.010	-0.010	0.011	0.015
$\zeta(2)$	1.400	-0.004	0.020	0.021	-0.019	0.024	0.031
$c_1$	0.700	-0.003	0.012	0.012	-0.011	0.011	0.016
$c_2$	0.000	0.001	0.029	0.029	0.002	0.003	0.003
$c_3$	0.000	0.004	0.148	0.148	-0.000	0.001	0.001
CASC LN		$d_X$			$L_X$		
$\Theta$		biais	std	mse	biais	std	mse
$\zeta(-2)$	-1.075	-2.092	2.335	3.135	0.037	0.028	0.047
$\zeta(-1)$	-0.525	-0.183	0.547	0.577	0.019	0.014	0.023
$\zeta(1)$	0.500	-0.019	0.013	0.023	-0.020	0.016	0.026
$\zeta(2)$	0.975	-0.037	0.030	0.047	-0.043	0.035	0.056
$c_1$	0.513	-0.021	0.014	0.025	-0.019	0.014	0.024
$c_2$	-0.025	0.005	0.031	0.032	0.001	0.006	0.006
$c_3$	0.000	0.002	0.152	0.152	0.001	0.004	0.004
CASC LP		$d_X$			$L_X$		
$\Theta$		biais	std	mse	biais	std	mse
$\zeta(-2)$	-1.256	-1.859	2.507	3.121	0.029	0.064	0.070
$\zeta(-1)$	-0.580	-0.138	0.546	0.563	0.010	0.025	0.027
$\zeta(1)$	0.500	-0.016	0.017	0.023	-0.007	0.021	0.022
$\zeta(2)$	0.933	-0.031	0.036	0.047	-0.013	0.045	0.046
$c_1$	0.538	-0.019	0.018	0.027	-0.008	0.022	0.023
$c_2$	-0.080	0.007	0.032	0.033	0.003	0.015	0.015
$c_3$	0.014	-0.009	0.152	0.152	-0.003	0.013	0.013

$2^3 \leq 2^j \leq 2^6$ ) sont représentés sur la troisième ligne. Les cumulants estimés sont reportés dans le tableau 1.

## 7. Conclusion et discussion

Les résultats rapportés ici fournissent de claires indications en faveur de l'usage des coefficients dominants pour l'analyse multifractale. La procédure 2D proposée constitue une solution générale, simple, pratique (faible coût de calcul et implantation simple) et effective. Elle s'étend, de plus, directement aux dimensions supérieures, sans difficulté supplémentaire ni théorique, ni pratique. Les résultats obtenus pour l'analyse des images synthétiques mono- et multifractals sont très encourageants. Ils nous permettent d'envisager, d'une part, l'application

de cette procédure d'estimation à des images réelles, d'autre part, l'incorporation de techniques statistiques de type *bootstrap*, pour obtenir à partir d'une seule image, non seulement les estimations des paramètres multifractals eux-mêmes, mais aussi des intervalles de confiance, et des tests statistiques, permettant la distinction entre différents modèles mono- et/ou multifractals (cf. [36]).

L'analyse multifractale constitue une caractérisation conceptuellement compliquée d'une image : elle relie, *via* un formalisme multifractal, les propriétés d'invariance d'échelle observées sur les moments empiriques de (quantités multirésolution calculées sur) l'image, y compris pour des ordres négatifs, aux fluctuations de régularité, c'est-à-dire aux rugosités des textures, de l'image. Cette mise en relation est compliquée théoriquement par le fait que l'image est presque naturellement une mesure. Ce cadre théorique n'exclut cependant pas une utilisation pratique simple et pertinente : un ensemble d'attributs multifractals, les  $c_p$  pour  $p = 1, 2, 3$ , les  $\zeta(q)$ ,  $D(q)$  et  $h(q)$  pour

quelques valeurs de  $q$  positives et négatives, peut être systématiquement estimé sur une image, puis impliqué dans des tâches usuelles de traitement d'images, comme la classification automatique par exemple. Cette démarche est déjà adoptée en vision assistée par ordinateur (voir [15] par exemple).

## Références

- [1] A. ARNEODO, N. DECOSTER and S. G. ROUX, «A waveletbased method for multifractal image analysis. I. Methodology and test applications on isotropic and anisotropic random rough surfaces.» *European Physical Journal B*, vol. 15, no. 3, pp. 567-600, 2000.
- [2] A. ARNEODO, N. DECOSTER, P. KESTENER and S. ROUX, *Advances in Imaging and Electron Physics*, ser. Advances in Imaging and Electron Physics, P.W. Hawkes, Eds. Academic Press, 2003, vol. 126, ch. A wavelet-based method for multifractal image analysis : from theoretical concepts to experimental applications, pp. 1-98.
- [3] P. ABRY, P. FLANDRIN, M. TAQQU and D. VEITCH, «Wavelets for the analysis, estimation and synthesis of scaling data.» in *Self-similar Network Trac and Performance Evaluation*. New York : Wiley, 2000.
- [4] S. JAFFARD, «Wavelet techniques in multifractal analysis.» in *Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoît Mandelbrot*, M. Lapidus et M. van Frankenhuijsen Eds., *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 72(2). AMS, 2004, pp. 91-152.
- [5] V. SHARI-SALAMANTIAN, B. PESQUET-POPESCU, J. SIMONI-LAFONTAINE and J. P. RIGAUT, «A robust index for spatial heterogeneity in breast cancer.» *Journal of Microscopy*, vol. 216, no. 2, pp. 110-122, 2004.
- [6] C. L. BENHAMOU, S. POUPON, E. LESPESSAILLES, S. LOISEAU, R. JENNANE, V. SIROUX, W. J. OHLEY and L. POTHUAUD, «Fractal analysis of radiographic trabecular bone texture and bone mineral density : two complementary parameters related to osteoporotic fractures.» *J. Bone Miner. Res.*, vol. 16, no. 4, pp. 697-704, 2001.
- [7] D. SCHERTZER, S. LOVEJOY, F. SCHMITT, Y. GHIGISINSKAYA and D. MARSAN, «Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency.» *Fractals*, vol. 5, no. 3, pp. 427-471, 1997.
- [8] S. G. ROUX, A. ARNEODO and N. DECOSTER, «A waveletbased method for multifractal image analysis. III. Applications to high-resolution satellite images of cloud structure.» *European Physical Journal B*, vol. 15, no. 4, pp. 765-786, 2000.
- [9] R. JENNANE, W. J. OHLEY, S. MAJUMDAR and G. LEMINEUR, «Fractal analysis of bone x-ray computed microscopy projections.» *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 20, no. 5, pp. 443-449, 2001.
- [10] S. LOWEN and M. TEICH, *Fractal-Based Point Processes*. Hoboken, NJ : Wiley, 2005.
- [11] J.-L. STARCK, F. MURTAGH and A. BIJAOU, *Image Processing and Data Analysis : The Multiscale Approach*. Cambridge : Cambridge University Press, 1998.
- [12] N. DECOSTER, S. G. ROUX and A. ARNEODO, «A waveletbased method for multifractal image analysis. II. Applications to synthetic multifractal rough surfaces.» *European Physical Journal B*, vol. 15, no. 4, pp. 739-764, 2000.
- [13] L. PONSON, D. BONAMY, H. AURADOU, G. MOURROT, S. MOREL, E. BOUCHAUD, C. GUILLOT and J. HULIN, «Anisotropic self-ane properties of experimental fracture surface.» *International Journal of Fracture*, vol. 140, no. 1-4, pp. 27-36, 2006.
- [14] S. PELEG, J. NAOR, R. HARTLEY and D. AVNIR, «Multiple resolution texture analysis and classification.» *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 6, no. 4, pp. 518-523, 1984.
- [15] Y. XU, J. HUI and C. FERMÜLLER, «A projective invariant for texture.» in *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, New York, 2006, pp. 1932-1939.
- [16] S. JAFFARD, B. LASHERMES and P. ABRY, «Wavelet leaders in multifractal analysis.» in *Wavelet Analysis and Applications*, T. Qian, M.I. Vai, X. Yuesheng, Eds. Basel, Switzerland : Birkh auser Verlag, 2006, pp. 219-264.
- [17] H. WENDT, P. ABRY and S. JAFFARD, «Bootstrap for empirical multifractal analysis.» *IEEE Signal Processing Mag.*, vol. 24, no. 4, pp. 38-48, 2007.
- [18] S. JAFFARD, *Lois d'échelle, fractales et ondelettes*, vol. 2, Éditeurs : P. Abry, P. Goncalvès, J. Lévy Vehel. Lavoisier, 2002, ch. Méthodes d'ondelettes pour l'analyse multifractale de fonctions.
- [19] R. RIEDI, *Lois d'échelle, fractales et ondelettes*, vol. 2, Éditeurs : P. Abry, P. Goncalvès, J. Lévy Vehel. Lavoisier, 2002, ch. Lois d'échelles multifractales : fondements et approche par ondelettes.
- [20] R. H. RIEDI, *Theory and applications of long range dependence*. Birkh auser, 2003, ch. Multifractal Processes, pp. 625-717.
- [21] B. MANDELBROT, «Intermittent turbulence in selfsimilar cascades ; divergence of high moments and dimension of the carrier.» *J. Fluid Mech.*, vol. 62, pp. 331-358, 1974.
- [22] J. KAHANE and J. PEYRIÈRE, «Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot.» *Adv. in Math.*, vol. 22, 1976.
- [23] S. MALLAT, *A Wavelet Tour of Signal Processing*. San Diego, CA : Academic Press, 1998.
- [24] J.-P. ANTOINE, R. MURENZI, P. VANDERGHEYNST and S. T. ALI, *Two-Dimensional Wavelets and their Relatives*. Cambridge : Cambridge University Press, 2004.
- [25] P. ABRY, R. BARANIUK, P. FLANDRIN, R. RIEDI and D. VEITCH, «Multiscale nature of network trac.» *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 19, no. 3, pp. 28-46, 2002.
- [26] E. BACRY, J. MUZY and A. ARNEODO, «Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis : Exact results.» *J. Stat. Phys.*, vol. 70, no. 3-4, pp. 635-674, 1993.
- [27] G. SAMORODNITSKY and M. TAQQU, *Stable non-Gaussian random processes*. New York : Chapman and Hall, 1994.
- [28] J. BARRAL and B. MANDELBROT, «Multiplicative products of cylindrical pulses.» *Probab. Theory Relat. Fields*, vol. 124, pp. 409-430, 2002.
- [29] C. TRICOT and J. L. VEHEL, *Lois d'échelle, fractales et ondelettes*, vol. 2, Éditeurs : P. Abry, P. Goncalvès, J. Lévy Vehel. Lavoisier, 2002, ch. Analyse fractale et multifractale en traitement des signaux.
- [30] S. JAFFARD, P. ABRY, S. ROUX, B. VEDEL and H. WENDT, *Proceedings of the ISFMA summer school on wavelets and their applications*. Zuhai, China, 2007, ch. The contribution of wavelets in multifractal analysis.
- [31] P. ABRY, S. JAFFARD, S. G. ROUX, B. VEDEL and H. WENDT, «The contribution of wavelets in multifractal analysis.» vol. submitted, 2008.
- [32] S. JAFFARD, H. WENDT, B. VEDEL, S. ROUX, P. ABRY., «Wavelet analysis of multifractal measures.» vol. preprint, 2008.
- [33] U. FRISCH, *Turbulence. The legacy of A. Kolmogorov*. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1995.
- [34] B. CASTAING, Y. GAGNE and M. MARCHAND, «Logsimilarity for turbulent ows.» *Physica D*, vol. 68, n°. 3-4, pp. 387-400, 1993.
- [35] J. DELOUR, J. MUZY and A. ARNEODO, «Intermittency of 1d velocity spatial proles in turbulence : A magnitude cumulant analysis.» *The Euro. Phys. Jour. B*, vol. 23, no. 2, pp. 243-248, 2001.
- [36] H. WENDT, *Wavelet leaders and Bootstrap : A contribution to empirical multifractal analysis*. PhD Thesis, 2008.
- [37] M. STEIN, «Fast and exact simulation of fractional brownian surfaces.» *J. Comput. Graph. Statist.*, vol. 11, no. 3, pp. 587-599, 2002.
- [38] G. CHAN and A. WOOD, «An algorithm for simulating stationary gaussian random elds.» *Applied Statistics*, vol. 46, pp. 171-181, 1997.
- [39] P. FLANDRIN, «Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion.» *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. IT-38, n°. 2, pp. 910-917, 1992.

- [40] P. ABRY and P. FLANDRIN, «On the initialization of the discrete wavelet transform,» *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 1, no. 2, pp. 32-34, 1994.
- [41] D. VEITCH, P. ABRY and M. S. TAQQU, «On the automatic selection of the onset of scaling,» *Fractals*, vol. 4, no. 11, pp. 377-390, 2003.

Herwig **Wendt**

Herwig Wendt est né à Steyr (Autriche) en 1979. Il a reçu son diplôme de master en électrotechnique et télécommunications de l'Université technique de Vienne, Autriche, en 2005, et sa thèse de doctorat en traitement du signal – physique de l'Université de Lyon, École Normale Supérieure de Lyon, en 2008. Depuis 2008, il est Post Doc en mathématiques appliquées à l'Université Purdue, Lafayette, Indiana.

Ses intérêts de recherche incluent les phénomènes d'invariance d'échelle, les processus ponctuels, l'analyse en ondelettes, l'analyse multirésolution, les valeurs extrêmes, le bootstrap et les problèmes inverses.

Patrice **Abry**

Patrice Abry est né à Bourg-en-Bresse, (France) en 1966. Il a obtenu l'agrégation de Sciences Physiques, en 1989 à l'École Normale Supérieure de Cachan et un doctorat en Physique et Traitement du Signal de l'Université Claude-Bernard Lyon I, en 1994. Il a été recruté au CNRS en octobre 1995 où il est directeur de recherches depuis octobre 2005. Il a reçu le prix AFCET-MESR-CNRS pour la meilleure thèse en Traitement du Signal des années 93-94. Il est auteur du livre «Ondelettes et Turbulences – Multirésolution, algorithmes de décompositions, invariance d'échelle et signaux de pression», 1997, Diderot, Paris, France et co-directeur de publication de l'ouvrage collectif «Lois d'échelle, Fractales et Ondelettes», Hermès, Paris, France, 2002. Ses travaux de recherches portent sur l'étude des phénomènes d'invariance d'échelle (processus autosimilaires, stables, analyse multifractale, cascades multiplicatives). Il s'est notamment intéressé à l'étude de la turbulence hydrodynamique et à la modélisation statistique du trafic Internet et à la détection d'anomalies.

- [42] D. VEITCH and P. ABRY, «A statistical test for the time constancy of scaling exponents,» *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol. 10, no. 49, pp. 2325-2334, October 2001.

Stéphane G. **Roux**

Stéphane G. Roux est né en France à Millau en 1967. Après des études de Mathématiques à Montpellier il soutient une thèse en Physique à l'Université d'Aix-Marseille en 1996. Actuellement maître de conférence à l'École Normale Supérieure, il travaille sur le traitement statistique des signaux non stationnaires ou à invariance d'échelle.

Stéphane **Jaffard**

Stéphane Jaffard est né à Boulogne-Billancourt (France) en 1962. Il est ancien élève de l'école Polytechnique, et, en 1989, il y a soutenu une thèse portant sur les décompositions en ondelettes (sous la direction d'Yves Meyer). Depuis 1995, il est professeur à l'Université Paris 12. Il a été membre de l'IUF (Institut Universitaire de France) entre 2000 et 2006. Il est coauteur (avec Yves Meyer et Robert Ryan) du livre «Wavelets: Tools for Science and Technology» (SIAM, 2001) et est membre des comités éditoriaux de: *Journal of Fourier Analysis and its Applications*, *Constructive Approximation* et *Applied and Computational Harmonic Analysis*. Ses sujets d'intérêt portent sur l'analyse multifractale, les décompositions en ondelettes, les champs aléatoires, et les séries de Fourier. Depuis Juin 2007, il est président de la SMF (Société Mathématique de France).

Béatrice **Vedel**

Béatrice Vedel est née à Compiègne (France) en 1978. Elle a obtenu son DEA en 2001 et son doctorat de Mathématiques en 2004 à l'Université de Picardie Jules Verne. Entre la date de soumission et de publication de cet article, elle est devenue maître de conférence à l'Université de Bretagne Sud (Vannes). Auparavant, elle était Postdoc à l'École Normale Supérieure de Lyon. Domaines d'intérêt: Analyse harmonique et ondelettes, analyse multifractale, processus stochastiques, problèmes d'inversion sismique.

