

# Estimation des défauts d'alignement d'un instrument multipupille par Diversité de Phase temps-réel

Cophasing a phased-array telescope by real-time

Phase Diversity method

Isabelle Mocœur<sup>1,2</sup>, Laurent Mugnier<sup>1</sup>, Frédéric Cassaing<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales, 29, Avenue de la Division Leclerc – BP 72, 92322 Châtillon cedex, France

<sup>2</sup>Centre National d'Études Spatiales, 18 avenue Edouard Belin, 31401 Toulouse Cedex 4, France  
Isabelle.Mocœur@onera.fr, Laurent.Mugnier@onera.fr, Frederic.Cassaing@onera.fr

Manuscrit reçu le 16 avril 2008

Résumé et mots clés

Le cophasage d'un instrument multipupille nécessite la mesure des aberrations spécifiques que sont les pistons et basculements différentiels entre les sous-pupilles. La Diversité de Phase est une méthode qui s'avère être bien adaptée pour estimer de telles aberrations, notamment sur objet étendu ; toutefois, les algorithmes associés requièrent des temps de calcul importants et sont incompatibles avec les besoins temps-réel d'un système fonctionnant en boucle fermée. Dans cet article, nous démontrons qu'un estimateur analytique peut être obtenu dans l'hypothèse des faibles phases aberrantes grâce à une approximation judicieuse qui rend le critère à minimiser quadratique. Nous validons ensuite cet estimateur par simulation et comparons ses performances à celles obtenues avec un algorithme itératif conventionnel. Les résultats obtenus démontrent qu'il est tout à fait possible de fermer une boucle de cophasage à faible flux et par la même occasion de restaurer l'objet observé dans un but d'imagerie.

Interférométrie, Problèmes inverses, Fonction de transfert optique, Diversité de Phase, Analyse de front d'onde.

Abstract and key words

Optical interferometry allows to reach the resolution of a large instrument by coupling several subapertures of lower diameter. However, this method requires a very accurate control of the optical path, especially the differential aberrations between the apertures (so-called "cophasing" operation). In this context, focal-plane sensing, based on aberration retrieval from focal-plane intensity measurements, appears to be an advantageous solution with a very simple opto-mechanical setup.

When the aperture function is known, differential aberrations can be determined with a single focal image of an unresolved source using a non centro-symmetric pupil. However, in a general case (extended object or any aperture configuration), the sole focal-plane image is not sufficient to retrieve piston and tip/tilt without ambiguity. The Phase Diversity method introduced in optic by Gonsalves [Gonsalves (1982)] is then usually applied, using at least a second image differing by a known phase, conventionally a small defocus. This method is now routinely used for the calibration of monolithic instruments. However, the corresponding algorithms are iterative and consequently time-consuming. The objective of this paper is to present a new algorithm which is analytic and consequently well-suited for real-time cophasing on extended object. To do that, we first begin to explain the principle of Phase Diversity. During these last

20 years, different methods have been developed to retrieve both the aberrations  $\hat{a}$  and the observed object  $\hat{o}$  [Mugnier *et al.* (2006)]. The conventional processing is based on the joint *a posteriori* estimation of  $(\hat{a}; \hat{o})$  that are most compatible with the measurements by using statistical information on the data [Blanc (2002)]. The corresponding criterion Eq. (8) and Eq. (10) is conveniently minimized by an iterative conjugated gradient method ; but although this classical iterative estimator is optimal in term of performance, it is time consuming since it requires at least ten iterations to converge, each iteration representing  $2N_d$  FFT to compute (where  $N_d$  is the number of images acquired by diversity).

In order to have an analytic Phase Diversity algorithm, we express the classical criterion under the small phase assumption. Then :

- we approximate the denominator of Eq. (11) at  $a = 0$  ;
- we linearize the expression of its numerator, obtaining an affine expression according to the aberrations.

The new expression of the criterion Eq. (13) is then quadratic and the derivation of its gradient with respect to the aberrations lead to a unique solution as shown Eq. (15).

The resulting algorithm is much faster than the iterative, requiring only  $N_d$  FFT. In order to study its properties, various simulations are made. It appears that our new algorithm can estimate piston aberrations  $\leq |\pi/2|$  rad RMS with an error of  $\lambda/60$  (figure [3]). Furthermore, it can be used to restore the observed object as well for a signal-to-noise ratio  $> 10$  (figure [6]). In conclusion, our results demonstrate that the analytic algorithm is appropriate for the cophasing of phased array telescopes in closed-loop.

Interferometry, Inverse problems, Optical transfer functions, Phase Diversity, Wave-front sensing.



# 1. Introduction

Le développement des futures missions pour l'astronomie ou l'observation de la Terre nécessite des résolutions spatiales importantes, ce qui implique le développement de télescopes de plus en plus grands. Malheureusement, la fabrication et le lancement dans l'espace de miroirs de diamètre croissant se heurte rapidement à de nombreuses limitations, aussi bien technologiques (encombrement, masse) que financières. Dès lors, pour répondre aux problèmes posés par la construction ou l'emploi de miroirs monoblocs géants et pour gagner définitivement en résolution, l'imagerie multipupille (ou synthèse d'ouverture optique) apparaît comme une solution séduisante. Etant donné que le champ des applications possibles est extrêmement vaste, cette méthode se révèle aujourd'hui comme étant incontournable dans le domaine de la haute résolution angulaire.

Cependant, la principale difficulté posée par la synthèse d'ouverture réside dans le cophasage, c.-à.-d. la mesure puis la correction à une fraction de longueur d'onde des aberrations spécifiques que sont les pistons et les basculements différentiels de l'instrument synthétisé. Ces aberrations sont illustrées figure [1] dans le cas d'un instrument à trois sous-pupilles : un piston équivaut à une marche (donc à une phase constante) entre les pupilles tandis qu'un basculement correspond à l'inclinaison de l'une d'entre elles par rapport à la direction de visée (donc à un plan de phase).

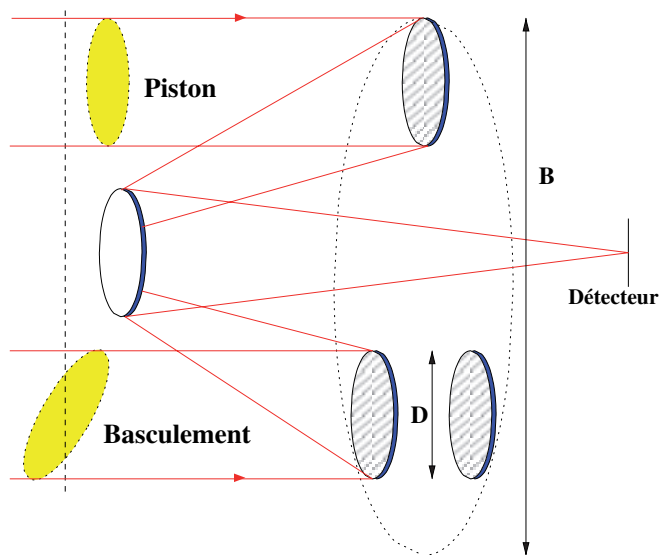


Figure 1. Instrument à trois sous-pupilles et ses aberrations différentielles.

Si l'objet est résolu, la seule donnée de l'image focale est insuffisante pour retrouver sans ambiguïté les pistons et basculements différentiels. Pour résoudre ce problème, l'une des rares solutions est la Diversité de Phase introduite en optique par Gonsalves [Gonsalves (1982)], qui propose d'utiliser au moins une deuxième image différent de la première par une variation

de phase parfaitement connue. Dès lors, les images supplémentaires permettent de coder l'information de phase de manière différente et par conséquent de lever les indéterminations existantes. Le plus souvent, la perturbation choisie est une défocalisation globale, car c'est *de facto* le mode le plus simple à mettre en œuvre.

Dans ce contexte, la Diversité de Phase permet non seulement de mesurer toutes les aberrations d'intérêt, mais aussi de les prendre en compte pour faire de la restauration d'objet *a posteriori*. Elle permet également de recombinaison l'intégralité des sous-pupilles en une seule trame, et ce avec un design optomécanique simple. De plus, cette méthode est sensible à toutes les aberrations jusqu'au plan focal. Par conséquent, la Diversité de Phase est envisagée pour nombre de futurs grands projets terrestres ou spatiaux. Parmi ceux-ci, citons DARWIN, un interféromètre spatial dédié à la recherche de planètes extra-solaires [Fridlund (2004), Mocœur *et al.* (2006)], ou les ELT, télescopes géants segmentés d'un diamètre de 30 à 60 mètres [Gilmozzi & Spyromilio (2007)]. L'observation de la Terre depuis une orbite géostationnaire est également une application envisagée [Mugnier *et al.* (2004), Mugnier *et al.* (2005)].

Toutefois, les méthodes d'estimation associées présentent l'inconvénient d'être itératives et donc potentiellement coûteuses en temps de calcul. Par conséquent, elles ne permettent pas actuellement de répondre pleinement aux besoins temps-réel d'un système embarqué. Nous nous proposons dans cet article de développer un estimateur analytique qui soit compatible avec les exigences d'un système de cophasage temps-réel. Tout d'abord, nous rappelons en section 2 les relations fondamentales de l'imagerie puis détaillons le principe de la Diversité de Phase. Nous présentons ensuite en section 3 un nouveau critère d'estimation qui est quadratique, permettant ainsi l'expression des aberrations de manière simple. Enfin, la section 4 est consacrée à la caractérisation par simulation de ce nouvel estimateur et à la comparaison de ses performances avec celles obtenues par un estimateur itératif conventionnel.

## 2. La diversité de phase

### 2.1. Formation des images

Considérons un instrument dont la configuration pupillaire (agencement des pupilles), affectée d'une phase aberrante  $\phi_a$ , est composée de  $N_T$  sous-pupilles circulaires. Notons  $\mathbf{p}$  la transmission complexe de la pupille et  $\mathbf{p}_n$  celle associée à la  $n^{\text{ième}}$  sous-pupille placée en un et présentant une phase  $\phi_{an}$ . Nous avons alors :

$$\mathbf{p} = \sum_{n=1}^{N_T} \mathbf{p}_n \star \delta_{\mathbf{u}_n} \quad (1)$$

où  $\star$  représente l'opération de convolution. Par simplicité, nous supposons que les sous-pupilles sont circulaires de rayon  $R_n$

identique et unitaire. Afin d'exprimer la phase incidente de façon simple, nous la décomposons dans une base orthonormée de modes  $\mathbf{Z}_k$  qui est intrinsèquement liée à la forme des sous-pupilles. En se plaçant dans la base des polynômes de Zernike [Noll (1976)], particulièrement bien adaptée pour la description des modes dans le cadre de sous-pupilles circulaires, la transmission complexe s'écrit :

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \sum_{n=1}^{N_T} \Pi(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n) \exp \left[ j \sum_{k=1}^{k_{\max}} a_{kn} \mathbf{Z}_k(\mathbf{u} - \mathbf{u}_n) \right] \quad (2)$$

où  $j^2 = -1$  et où  $a_{kn}$  représente l'amplitude RMS de l'aberration d'ordre  $k$  associée au mode  $\mathbf{Z}_k$  sur la sous-pupille  $n$ . Comme nous nous intéressons seulement aux aberrations de pistons ( $k = 1$ ) et basculements ( $k = 2, 3$ ), nous considérerons par la suite que  $k_{\max} = 3$  et noterons  $\mathbf{a}$  le vecteur des aberrations que l'on souhaite retrouver, de taille  $k_{\max} N_T \times 1$  :

$$\mathbf{a} = \{a_{kn}\}_{\substack{k \in \{1, 2, 3\} \\ n \in \{1, \dots, N_T\}}} \quad (3)$$

En notant TF l'opération Transformée de Fourier, la réponse impulsionnelle  $\mathbf{h}$  de l'instrument est :

$$\mathbf{h} = |\text{TF}^{-1}(\mathbf{p})|^2 \quad (4)$$

Nous noterons  $\tilde{\mathbf{h}}$  la TF de  $\mathbf{h}$ , et nous l'approximerons par une transformée de Fourier rapide ;  $\tilde{\mathbf{h}}$  sera communément appelée Fonction de Transfert Optique (FTO).

Au plan focal, l'image  $\mathbf{i}$  observée est modélisée par la convolution discrète et bruitée de  $\mathbf{h}$  avec l'objet observé  $\mathbf{o}$ , ces deux quantités étant considérées comme discrétisées :

$$\mathbf{i}(\mathbf{o}, \mathbf{a}) = \mathbf{h}(\mathbf{a}) \star \mathbf{o} + \mathbf{b} \quad (5)$$

où  $\mathbf{b}$  est un bruit blanc que nous supposons par la suite Gaussien stationnaire. Dans cet article, nous considérons pour la Diversité de Phase deux images  $\mathbf{i}_1$  et  $\mathbf{i}_2$ , la première étant acquise au plan focal, la deuxième dans un plan défocalisé d'une quantité  $\phi_d$ . Les réponses impulsionnelles sont alors liées par :

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{a}) \text{ et } \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{a} + \phi_d) \quad (6)$$

### 2.2. Inversion du problème

L'estimation des aberrations a ainsi que de l'objet  $\mathbf{o}$  est généralement basée sur une approche de type moindre-carrés, qui revient à minimiser le critère suivant :

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{o}) = \frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{i}_1 - \mathbf{h}_1(\mathbf{a}) \star \mathbf{o}\|^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{i}_2 - \mathbf{h}_2(\mathbf{a}) \star \mathbf{o}\|^2 \quad (7)$$

où  $\sigma$  représente la variance de bruit, que nous supposons identique pour les deux images  $\mathbf{i}_1$  et  $\mathbf{i}_2$ . En pratique cependant, l'utilisation de cet estimateur conduit le plus souvent à une amplifi-

cation du bruit et ne permet pas d'obtenir une estimation correcte de l'objet et de la phase. Par conséquent, il est nécessaire de régulariser ce problème en introduisant des *a priori* sur les inconnues. Au cours de ces vingt dernières années, différentes méthodes d'estimation ont été développées [Mugnier *et al.* (2006)]; parmi ces méthodes, la recherche du Maximum A Posteriori Joint (MAPJ) consiste à choisir l'objet  $\mathbf{o}$  et les aberrations  $\mathbf{a}$  qui maximisent la densité de probabilité jointe des données (donc des images  $\mathbf{i}_1$  et  $\mathbf{i}_2$ ), de l'objet et de la phase. Dans le cas d'un bruit blanc Gaussien et pour une régularisation quadratique de la scène observée par Densité Spectrale de Puissance (DSP), le critère d'estimation correspondant s'exprime dans le domaine de Fourier discret comme [Blanc (2002)]:

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{o}) = N_{\text{pix}} \ln \sigma^2 + \sum_{\nu=1}^{N_f} \sum_{d=1}^2 \frac{1}{2\sigma^2} \left| \tilde{i}_d(\nu) - \tilde{h}_d(\mathbf{a}, \nu) \tilde{o}(\nu) \right|^2 + \sum_{\nu=1}^{N_f} \frac{|\tilde{o}(\nu) - \tilde{o}_m(\nu)|^2}{2S_o(\nu)} + \mathbf{R}(\mathbf{a}) \quad (8)$$

$N_{\text{pix}}$  étant le nombre de pixels dans l'image,  $N_f$  les fréquences sur lesquelles est défini le critère (sachant qu'ici  $N_f = N_{\text{pix}}$ ) et  $\mathbf{R}(\mathbf{a})$  le terme de régularisation sur la phase;  $\mathbf{o}_m$  représente l'objet moyen et  $S_o$  la DSP associée à l'objet observé.

Le critère  $\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{o})$  doit bien entendu être minimisé vis-à-vis de l'objet  $\mathbf{o}$  et des aberrations  $\mathbf{a}$ . Or, il est possible d'exprimer la solution en  $\tilde{\mathbf{o}}$  à phase aberrante fixée sous la forme d'un filtre de Wiener multitrame en annulant la dérivée partielle du critère par rapport à  $\mathbf{o}$ :

$$\tilde{\mathbf{o}}(\mathbf{a}, \nu) = \frac{\tilde{i}_1(\nu) \tilde{h}_1^*(\mathbf{a}, \nu) + \tilde{i}_2(\nu) \tilde{h}_2^*(\mathbf{a}, \nu) + \frac{\sigma^2 \tilde{o}_m(\nu)}{S_o(\nu)}}{|\tilde{h}_1(\mathbf{a}, \nu)|^2 + |\tilde{h}_2(\mathbf{a}, \nu)|^2 + \frac{\sigma^2}{S_o(\nu)}} \quad (9)$$

l'exposant \* désigne ici le complexe conjugué. En réinjectant l'estimée  $\tilde{\mathbf{o}}(\mathbf{a})$  dans l'expression de  $\mathcal{L}$  Eq. (8), nous obtenons un nouveau critère  $\mathcal{L}_1$  qui ne dépend plus explicitement que de la phase:

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{a}) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu=1}^{N_f} \frac{|\tilde{i}_2(\nu) \tilde{h}_1(\mathbf{a}, \nu) - \tilde{i}_1(\nu) \tilde{h}_2(\mathbf{a}, \nu)|^2}{|\tilde{h}_1(\mathbf{a}, \nu)|^2 + |\tilde{h}_2(\mathbf{a}, \nu)|^2 + \frac{\sigma^2}{S_o(\nu)}} + \mathbf{R}(\mathbf{a}) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu=1}^{N_f} \frac{\frac{\sigma^2}{S_o(\nu)} \left[ |\tilde{h}_1(\mathbf{a}, \nu) \tilde{o}_m(\nu) - \tilde{i}_1(\nu)|^2 + |\tilde{h}_2(\mathbf{a}, \nu) \tilde{o}_m(\nu) - \tilde{i}_2(\nu)|^2 \right]}{|\tilde{h}_1(\mathbf{a}, \nu)|^2 + |\tilde{h}_2(\mathbf{a}, \nu)|^2 + \frac{\sigma^2}{S_o(\nu)}} + \text{Cste} \quad (10)$$

Bien que  $\mathcal{L}_1$  soit de type myope donc *a priori* susceptible de présenter des minima locaux, des travaux récents ont montré qu'il avait de bonnes propriétés statistiques. En effet, en réinterprétant ce critère comme étant à minimum de contraste, Idier *et al.* [Idier *et al.* (2005)] ont démontré que  $\mathcal{L}_1$  converge vers la valeur vraie lorsque le nombre de données augmente.

Étant donné que la reconstruction est effectuée pour  $k_{\text{max}} = 3$  polynômes de Zernike, l'espace des inconnues  $\mathbf{a}$  est limité. Il

n'est donc pas nécessaire d'introduire de contraintes supplémentaires sur la phase; par conséquent, nous posons  $\mathbf{R}(\mathbf{a}) = 0$ . De plus, il a été constaté [Blanc (2002)] que les hyperparamètres optimaux vis-à-vis des aberrations, c.-à.-d. ceux qui donnent une estimée de la phase la plus proche de la phase vraie, ne sont pas en adéquation avec ceux liés à l'objet et qu'il est nécessaire de sous-régulariser ce dernier pour estimer au mieux les aberrations à fort flux. Idier *et al.* [Idier *et al.* (2005)] ont par la suite démontré théoriquement que l'estimateur sous-régularisé en objet était consistant pour l'estimation de la phase. Dès lors, nous utilisons l'expression analytique de  $\tilde{\mathbf{o}}(\mathbf{a})$  définie Eq. (9) à régularisation quasi-nulle, donc pour un objet moyen  $\tilde{\mathbf{o}}_m = 0$  et pour un rapport  $\sigma^2/S_o(\nu)$  proche de zéro. En pratique, ce rapport ne sera pas exactement égal à zéro mais sera fixé à une constante, typiquement  $\varepsilon = 10^{-6}$  afin que l'expression de l'objet  $\tilde{\mathbf{o}}(\mathbf{a})$  ne diverge pas à haute fréquence. Nous obtenons ainsi, pour le critère  $\mathcal{L}_1(\mathbf{a})$ :

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{a}) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu=1}^{N_f} \frac{|\tilde{i}_2(\nu) \tilde{h}_1(\mathbf{a}, \nu) - \tilde{i}_1(\nu) \tilde{h}_2(\mathbf{a}, \nu)|^2}{|\tilde{h}_1(\mathbf{a}, \nu)|^2 + |\tilde{h}_2(\mathbf{a}, \nu)|^2 + \varepsilon} + \text{Cste} \quad (11)$$

$\mathcal{L}_1$  est généralement minimisé itérativement, par exemple par une méthode de type gradient conjugué. Par conséquent, les coûts de calcul sont importants: si  $N_d$  est le nombre d'images acquises par diversité (ici,  $N_d = 2$ ),  $2N_d$  transformées de Fourier sont au minimum effectuées par itération, sachant qu'une dizaine d'itérations sont nécessaires en pratique.

## 3. L'estimateur analytique

### 3.1 Expression du critère pour une faible phase incidente

Afin d'obtenir un algorithme de type Diversité de Phase qui soit compatible avec les exigences d'un système de cophasage temps-réel, nous nous plaçons dans l'hypothèse des faibles phases aberrantes, qui a déjà été utilisée avec succès pour le développement d'un algorithme analytique de cophasage sur point source en plan focal [Baron *et al.* (2008)]. Dans le cadre de cette hypothèse, il devient possible d'exprimer plus simplement le critère  $\mathcal{L}_1(\mathbf{a})$ :

- en approximant le dénominateur de l'Eq. (11) par sa valeur à phase aberrante nulle. Ce dernier peut alors être vu comme un terme de pondération;

- en linéarisant dans chaque plan l'expression de la fonction de transfert  $\tilde{h}_d(\mathbf{a}, \nu)$  et en l'exprimant de manière affine en fonction des aberrations:

$$\tilde{h}_d(\mathbf{a}, \nu) = \alpha_d(\nu) \mathbf{a} + \beta_d(\nu) \quad (12)$$

sachant que le produit  $\alpha_d(\nu) \mathbf{a}$  est ici un produit scalaire.  $\alpha_d$  est donc une matrice de taille  $N_f \times k_{\max} N_T$ ;  $\tilde{\mathbf{h}}_d$ ,  $\tilde{\mathbf{i}}_d$  et  $\beta_d$  sont quant à eux des vecteurs colonne de longueur  $N_f$ .

Au vu des deux simplifications évoquées ci-dessus, nous obtenons une nouvelle expression du critère qui est quadratique en  $\mathbf{a}$ :

$$\mathcal{L}_{\Pi}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu=1}^{N_f} \left| \mathbf{A}(\nu)\mathbf{a} - \mathbf{B}(\nu) \right|^2 + \text{Cste} \quad (13)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\nu) &= \frac{\tilde{i}_2(\nu)\alpha_1(\nu) - \tilde{i}_1(\nu)\alpha_2(\nu)}{\sqrt{|\tilde{h}_1(0,\nu)|^2 + |\tilde{h}_2(0,\nu)|^2} + \epsilon} \\ \mathbf{B}(\nu) &= \frac{-\tilde{i}_2(\nu)\beta_1(\nu) + \tilde{i}_1(\nu)\beta_2(\nu)}{\sqrt{|\tilde{h}_1(0,\nu)|^2 + |\tilde{h}_2(0,\nu)|^2} + \epsilon} \end{aligned} \quad (14)$$

$\mathbf{A}(\nu)$  est un vecteur ligne de longueur  $k_{\max} N_T$  défini pour chaque fréquence  $\nu$ . L'ensemble de ces vecteurs, concaténés dans la matrice  $\mathbf{A}$  de taille  $N_f \times k_{\max} N_T$ , représente la partie du critère dépendant explicitement des aberrations recherchées.  $\mathbf{B}(\nu)$  est un scalaire et  $\mathbf{B}$  un vecteur colonne de longueur  $N_f$  représentant l'expression du critère à phase incidente nulle. Comme le terme  $\mathcal{L}_{\Pi}(\mathbf{a}) = \|\mathbf{A}\mathbf{a} - \mathbf{B}\|^2 / (2\sigma^2)$  est quadratique (donc convexe), il ne présente pas de minima locaux et la solution en  $\mathbf{a}$  est unique.

### 3.2 Estimation des aberrations

En utilisant l'expression analytique de l'objet et en linéarisant la fonction de transfert dans chaque plan de diversité, nous avons pu nous ramener à un critère qui est quadratique en  $\mathbf{a}$ . L'annulation du gradient de ce critère nous permet alors de retrouver directement les aberrations recherchées sans avoir à recourir à un algorithme de minimisation :

$$\hat{\mathbf{a}} = \left[ \Re(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) \right]^\dagger \left[ \Re(\mathbf{A}^H \mathbf{B}) \right] \quad (15)$$

où  $\Re$  désigne l'opérateur partie réelle,  $^H$  l'opérateur hermitien et  $^\dagger$  l'inverse généralisé d'une matrice. Avec ce nouvel estimateur analytique, le coût de calcul est bien moins important que dans le cas itératif. En effet, il se résume seulement au temps nécessaire pour calculer les transformées de Fourier des  $N_d = 2$  images de diversité. De fait, l'inversion de la matrice  $\Re(\mathbf{A}^H \mathbf{A})$  n'est pas dimensionnante puisque carrée de taille  $k_{\max} N_T \times k_{\max} N_T$ , soit  $k_{\max} N_T = 9$  pour un instrument à 3 sous-pupilles.

Regardons maintenant de plus près l'inversion de la matrice  $\mathbf{T} = \Re(\mathbf{A}^H \mathbf{A})$ . Étant donné que cette matrice se révèle être une matrice réelle, hermitienne semi-définie positive, c.-à.-d.

pour laquelle l'ensemble des valeurs singulières  $\{\xi_i\}_{i=1, \dots, k_{\max} N_T} \in \mathbb{R}^+$ , alors elle peut être décomposée en valeurs propres et vecteurs propres :

$$\mathbf{T} = \mathbf{U} \mathbf{X} \mathbf{U}^t \quad (16)$$

$\mathbf{X}$ , qui est diagonale, contient les valeurs propres;  $\mathbf{U}$  est la matrice des modes propres de  $\mathbf{T} \mathbf{T}^t$ , sachant que par définition un *mode* est une combinaison de pistons et basculements locaux appliqués sur les sous-pupilles. Toutefois, le mode piston global, qui correspond à une phase constante sur l'ensemble des sous-pupilles, ne modifie en aucune manière les images et n'a pas de sens physique. Il est donc inutile de le rechercher. Comme  $\mathbf{X}$  est diagonale, son inverse est égale à la matrice  $\mathbf{X}^\dagger$  de valeurs propres  $X_{ii}^\dagger = 1/\xi_i$ . Afin de filtrer le mode piston global, nous imposons la valeur  $1/\xi_i$  correspondante à zéro.

### 3.3 Restauration de l'objet

Nous avons démontré qu'il était possible d'estimer de manière simple et rapide les faibles phases incidentes. Cependant, c'est l'objet qui s'avère être la grandeur d'intérêt lorsque la diversité de phase est utilisée pour faire du traitement d'image *a posteriori*. Nous avons souligné à la sous-section 2.2 que dans le cas où l'on recherche en priorité la phase aberrante, il n'était pas nécessaire d'introduire d'*a priori* sur les données. Cependant, si la reconstruction de la scène observée est souhaitée, l'absence de régularisation nuit fortement à la qualité de la restauration objet. Dès lors, pour la DSP de l'objet, nous choisissons le modèle paramétrique suivant [Conan *et al.* (1998), Blanc (2002)] à trois paramètres :

$$S_o(\nu) = \frac{\kappa}{\left(\frac{\nu}{\nu_o}\right)^\mu + 1} \quad (17)$$

où  $\kappa$  est une constante,  $\nu_o$  l'inverse d'une longueur caractéristique de l'objet et où  $\mu$  caractérise la régularité de ce dernier. Une fois que la faible phase incidente a été déterminée selon la méthode explicitée en sous-section 3.2, les hyperparamètres liés à l'objet peuvent être ajustés au mieux par maximum de vraisemblance [Blanc *et al.* (2003), Gratadour *et al.* (2006)]. L'estimation de  $\hat{\mathbf{o}}$  est alors effectuée en injectant le vecteur  $\hat{\mathbf{a}}$  dans l'Eq. (9), non plus pour  $\sigma^2/S_o(\nu) = \epsilon$ , mais en utilisant les valeurs ajustées des hyperparamètres  $(\sigma, \kappa, \nu_o, \mu)$ . Nous obtenons alors la solution unique  $\hat{\mathbf{o}}$  en une itération.

## 4. Validation par simulation

### 4.1 Configuration expérimentale

L'ensemble des simulations présentées dans cette section sont effectuées avec deux plans de diversité, l'un étant le plan focal

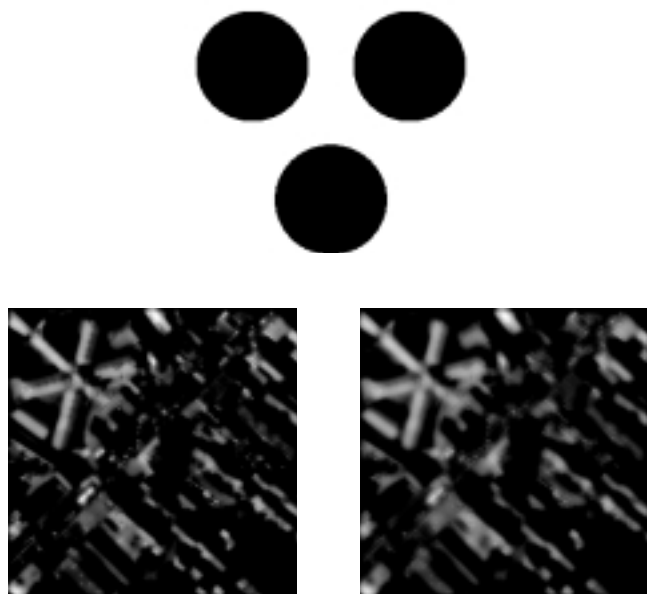


Figure 2. Configuration à trois sous-pupilles (haut) et image focale (en bas à gauche) puis extra-focale (en bas à droite) correspondantes obtenues à phase incidente nulle.

et l'autre étant défocalisé de 1 radian RMS. Sauf mention contraire, la configuration pupillaire est composée de trois sous-pupilles identiques disposées au sommet d'un triangle équilatéral comme illustré en haut de la figure [2]. L'objet utilisé est représentatif d'une scène terrestre urbaine; les images, de taille  $256 \times 256$  pixels (voir figure [2] bas), sont échantillonnées à Shannon et comportent du bruit de photons ainsi que l'équivalent d'un bruit de lecture d'écart-type  $\sigma_b = 10$  électrons par pixel.

Par la suite, nous définirons le Rapport Signal-à-Bruit (RSB) comme étant le rapport par pixel de la valeur moyenne du nombre de photons  $N_{bph}$  sur l'écart-type du bruit :

$$RSB = \frac{N_{bph} / N_{pix}}{\sqrt{\frac{N_{bph}}{N_{pix}} + \sigma_b^2}} \quad (18)$$

#### 4.2 Estimation de la phase incidente

Afin d'analyser les performances de l'estimateur analytique et de les comparer à celles obtenues avec l'algorithme itératif, deux types de tests sont réalisés :

- un test de linéarité, où une rampe de piston comprise entre  $\pm 2\pi$  et présentant 51 valeurs est appliquée sur une seule sous-pupille. Les images sont acquises à fort flux avec un nombre moyen de  $N_{bph} = 5 \cdot 10^8$  photo-électrons par image (soit pour un RSB de 87), chaque valeur de la rampe présentant dix points de mesure ;
- des tests de répétabilité, où la précision des algorithmes est évaluée sur des séries de mesures indépendantes. Ces diffé-

rentes séries, qui comprennent toutes cinquante mesures, sont générées avec des flux différents allant de  $3 \cdot 10^6$  à  $3 \cdot 10^{10}$  photo-électrons ( $phe^-$ ) par image ( $4 \leq RSB \leq 676$ ).

Pour déterminer la dynamique de notre estimateur, nous effectuons le test de linéarité décrit ci-dessus. Les graphes figure [3], qui illustrent les aberrations de piston estimées sur la sous-pupille mobile en fonction de la rampe introduite (en haut) ainsi que le biais correspondant (en bas), montrent que la reconstruction réalisée par l'algorithme analytique est excellente entre  $[-\pi/2; \pi/2]$ , avec une précision en-deçà du seuil de  $\lambda/60$  [Harvey & Ftaclas (1990)] et un biais quasi-nul à l'origine. De plus, la rampe est reconstruite entre  $\pm 1$  radian avec une pente de valeur 1 quel que soit l'algorithme considéré. Comme attendu, nous voyons que le biais augmente rapidement au-delà de 1 rad du fait de l'approximation faible phase. Nous pouvons également constater que l'estimateur itératif se replie en  $\pm\pi$  : étant donné que notre modèle d'imagerie est chromatique, l'information de phase ne peut être contenue que dans un domaine défini à  $[2\pi]$  près. (Notons que pour s'affranchir de ce phénomène, il est possible d'envisager une approche polychromatique

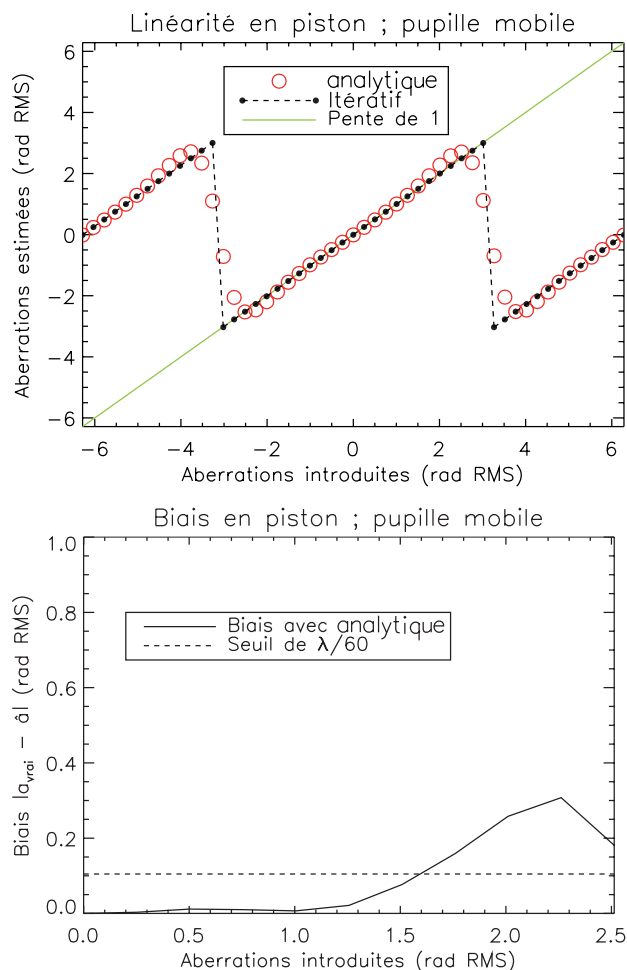


Figure 3. Linéarité en piston (en haut) et biais associé (en bas) obtenus en réponse à une rampe de piston de grande dynamique appliquée sur une sous-pupille.

[Seldin *et al.* (2006)] ou de privilégier un algorithme de déroulage de la phase [Ghiglia & Pritt (1998)]. Ces repliements sont également visibles avec l'algorithme analytique mais, du fait de la dynamique réduite de l'estimateur, apparaissent dès que la phase incidente atteint 2,5 radians.

Pour le test de répétabilité, nous reproduisons dans un premier temps le point de fonctionnement d'un système idéal en boucle fermée, c.-à.-d. à aberration incidente nulle. Le graphe de la figure [4] représente l'erreur totale obtenue en piston et calculée sur l'ensemble des sous-pupilles. Étant donné que le biais peut être considéré comme nul à l'origine quelque soit le flux, l'erreur des estimées (en cercles pour l'estimateur analytique, en points pour l'algorithme itératif) présente exactement le même comportement que l'écart-type; elle suit comme attendu une même loi en  $1/\sqrt{N_{\text{bph}}}$  en régime de bruit de photons, lorsque le flux est supérieur à  $10^7 \text{ phe}^-$  (soit pour un RSB  $> 10$ ). Pour des flux moins importants, l'allure générale de l'écart-type (et celle de l'erreur) n'est plus commune: si, pour l'algorithme itératif, l'écart sur les estimations suit une loi en  $1/N_{\text{bph}}$ , celui associé à l'estimateur analytique atteint au contraire une valeur de saturation égale à  $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad RMS}$ . En effet, l'algorithme analytique ne peut retrouver la phase aberrante si le RSB est trop faible; dans ce cas, les estimées sont toutes distribuées autour de zéro.

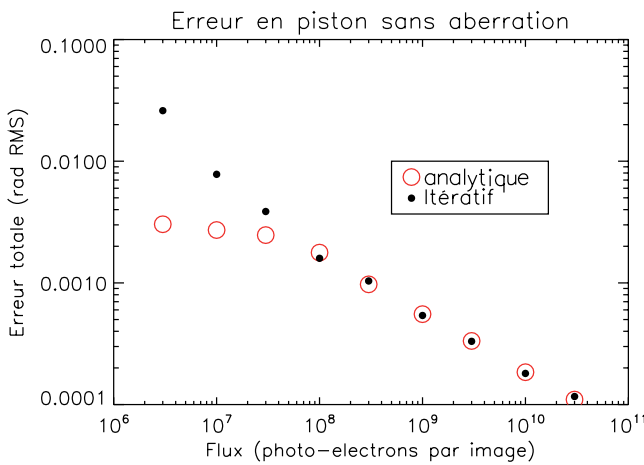


Figure 4. Erreur totale estimée en piston sur l'ensemble des sous-pupilles à phase incidente nulle.

Tableau 1. Jeu aléatoire d'aberrations introduit sur la configuration pupillaire de référence (exprimées en rad RMS).

	piston	basculement en x	basculement en y
pupille 1	-0,084	-0,017	0,019
pupille 2	0,161	-0,018	0,065
pupille 3	-0,055	0,019	0,092

Après avoir étudié les performances de l'algorithme analytique dans les conditions de fonctionnement nominales, nous appliquons sur l'ensemble des sous-pupilles un jeu aléatoire de faibles aberrations listées tableau [1].

Les graphes figure [5] présentent l'écart-type (en haut) ainsi que l'erreur totale (en bas) obtenus pour les deux estimateurs. Tout d'abord, nous constatons que la valeur prise par les écart-types est légèrement supérieure au cas idéal à phase incidente nulle. La différence la plus notable apparaît cependant au niveau de l'erreur: au contraire de l'algorithme itératif dont l'erreur décroît en fonction du flux, celle associée à l'estimateur analytique atteint un seuil de  $2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ . Cette observation n'est pas surprenante en soi, puisque l'approximation affine de la FTO n'est valable que pour une phase incidente proche de zéro. Le plateau observé est ainsi dû à la limite mathématique inhérente à notre développement analytique. L'estimation des aberrations est cependant effectuée en régime de bruit de photons avec une excellente précision, puisque l'erreur se trouve toujours en dessous de la valeur  $3 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ , soit  $\lambda/200$  (qui correspond à 10 % de l'amplitude absolue totale introduite en piston).

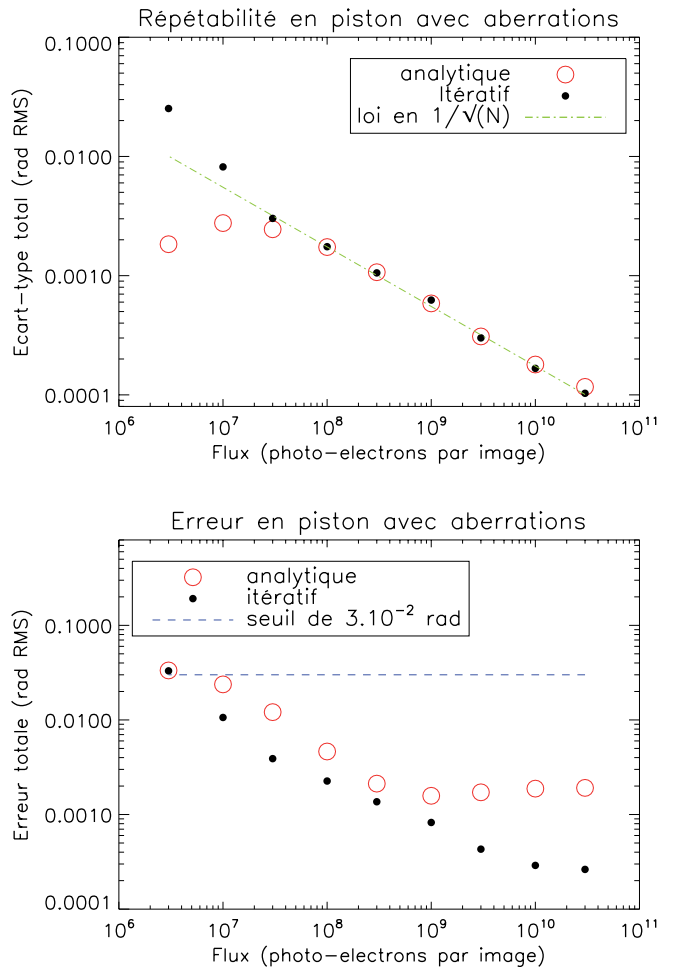


Figure 5. Écart-type (en haut) et erreur totale (en bas) estimés en piston sur l'ensemble des sous-pupilles en présence d'un jeu aléatoire d'aberrations.

### 4.2.1 Restauration de l'objet

Afin d'évaluer la validité de notre estimateur analytique pour la restauration d'objet, nous nous plaçons dans des conditions réalistes en appliquant sur l'ensemble des sous-pupilles notre jeu de faibles aberrations listé tableau [1]. Nous effectuons alors un test de répétabilité pour des séries d'une cinquantaine d'images et pour quatre flux variant de  $10^6 \text{ phe}^-$  (RSB = 1) à  $10^9 \text{ phe}^-$  (RSB = 123). La figure [6] compare, sur une zone de  $81 \times 81$  pixels, l'objet vrai (en haut) à l'objet moyen  $\hat{o}$  estimé pour quatre valeurs de flux différentes (en bas); les images focales et extra-focales aberrées obtenues à fort flux sont également représentées (au milieu). En régime de bruit de photons, nous pouvons remarquer que l'objet moyen est de meilleure qualité que l'objet estimé  $\hat{o}$ . Ce dernier est alors très proche de l'objet vrai, avec une erreur de reconstruction de 1 % pour  $10^9 \text{ phe}^-$  et seulement de 4 % pour  $10^8 \text{ phe}^-$ . L'objet reconstruit est même de meilleure qualité que l'objet vrai filtré par le système à trois sous-pupilles à aberrations nulles (voir figure [2] bas). Lorsque le flux diminue, l'erreur d'estimation augmente, comme attendu. La restauration de l'objet reste tout de même de

bonne qualité pour  $N_{\text{bph}} = 10^7 \text{ phe}^-$ , comme nous pouvons le constater sur la figure. Si nous réduisons le flux jusqu'à ce que le RSB soit très faible (à  $10^6 \text{ phe}^-$ ), les images deviennent totalement dominées par le bruit; par conséquent, la restauration devrait être impossible. Or, bien que l'objet reconstruit soit «très mou» avec une erreur de 78 %, nous pouvons distinguer les composantes basses fréquences de l'objet.

## 5. Conclusion et perspectives

La problématique du cophasage, qui consiste à mesurer et contrôler à une fraction de longueur d'onde les défauts d'alignement entre les sous-pupilles (à savoir les pistons et basculements) d'un instrument multitélescope, est une opération délicate. Dans ce contexte, la Diversité de Phase est une solution

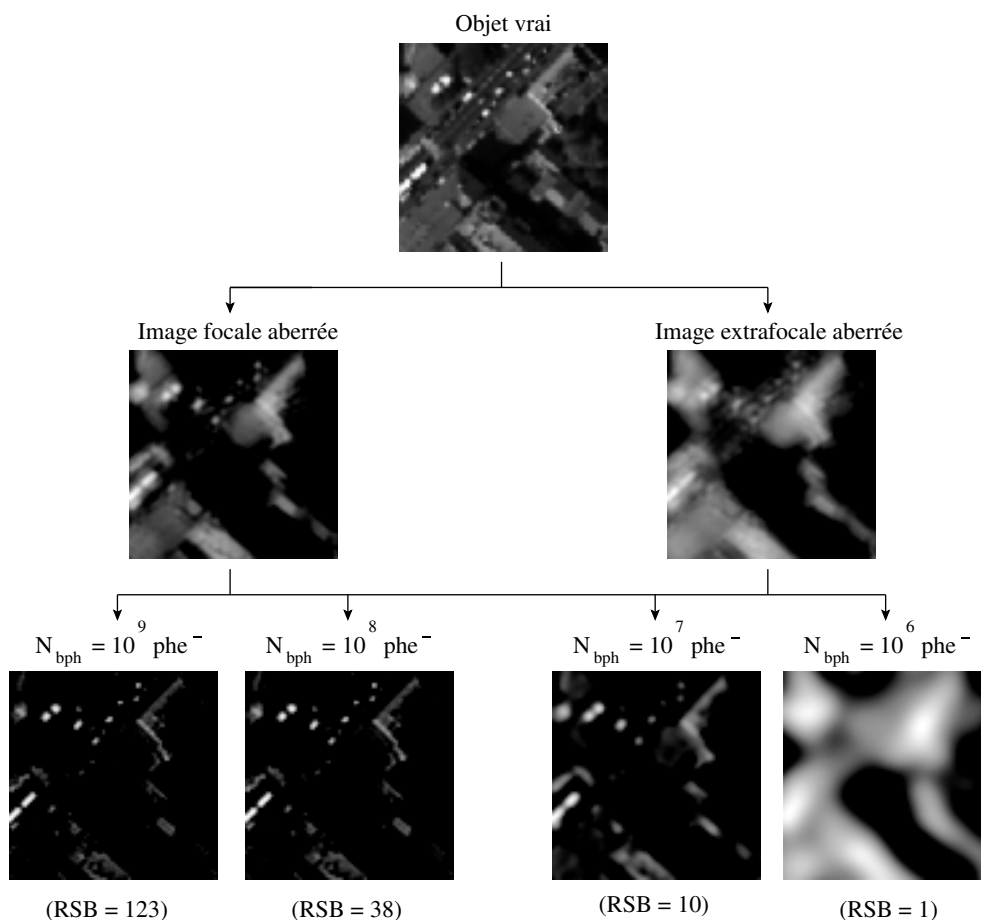


Figure 6. Objet moyen estimé en fonction du flux en présence d'un jeu aléatoire d'aberrations: médaillon de l'objet vrai sur  $81 \times 81$  pixels (en haut), images focales/extra-focales bruitées correspondantes obtenues à fort flux (ligne du milieu) et objet moyen estimé (en bas).



séduisante. Cependant, les algorithmes classiques associés à cette méthode sont itératifs et demandent un coût de calcul important.

Dès lors, nous avons développé un estimateur analytique, donc potentiellement temps-réel, de type Diversité de Phase valable dans l'hypothèse des faibles aberrations. Sous cette hypothèse, nous avons pu approximer le critère à minimiser comme étant quadratique et ainsi obtenir une estimée simple des aberrations. Les simulations effectuées ont montré que ce nouvel algorithme pouvait estimer des aberrations de piston inférieures à  $\pi/2$  rad RMS avec une précision de  $\lambda/60$ , et qu'il permettait de restaurer l'objet observé pour un RSB  $> 10$ . Dès lors, dans le cas d'un système réel, il peut être intéressant de coupler les méthodes itératives et analytiques, en estimant dans un premier temps les fortes aberrations à l'aide de l'algorithme itératif puis en maintenant cette position grâce à l'estimateur analytique utilisé en boucle fermée.

Par la suite, après avoir caractérisé notre estimateur en fonction de paramètres clefs comme le type de scène observée ou le nombre de pupilles utilisées, nous pourrions le valider expérimentalement.

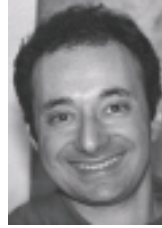
## Références

- [Baron *et al.* (2008)] F. BARON, I. MOCŒUR, F. CASSAING, et L. MUGNIER, «Unambiguous phase retrieval as a cophasing sensor for phased array telescopes.» *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 20 # 5, p. 1000-1015, 2008.
- [Blanc *et al.* (2003)] A. BLANC, L. M. MUGNIER, et J. IDIER, «Marginal estimation of aberrations and image Restoration by use of phase diversity.» *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 20 # 6, p. 1035-1045, 2003.
- [Blanc (2002)] A. BLANC, *Identification de réponse impulsionnelle et restauration d'images : apports de la diversité de phase*. Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, 2002.
- [Conan *et al.* (1998)] J. M. CONAN, L. M. MUGNIER, T. FUSCO, V. MICHAU, et G. ROUSSET, «Myopic Deconvolution of Adaptive Optics Images by use of Object and Point Spread Function Power Spectra.» *Appl. Opt.* Vol. 37 # 21, p. 4614-4622, 1998.
- [Fridlund (2004)] C. V. M. FRIDLUND, «The Darwin mission.» *Adv. in Sp. R.*, Vol. 34, p. 613-617.
- [Ghiglia et Pritt (1998)] D. C. GHIGLIA, et M. D. PRITT, 1998. *Two-Dimensional Phase Unwrapping: Theory, Algorithms, and Software*. Wiley-Interscience, 2004.
- [Gilmozzi et Spyromilio (2007)] R. GILMOZZI, et J. SPYROMILIO, «The European Extremely Large Telescope (E-ELT).» *ESO Messenger*, Vol. 127, p. 11-19, 2007.
- [Gonsalves (1982)] R. A. GONSALVES, «Phase retrieval and diversity in adaptive optics.» *Opt. Eng.* Vol. 21 # 5, p. 829-832, 1982.
- [Gratadour *et al.* (2006)] D. GRATADOUR, D. ROUAN, L. M. MUGNIER, T. FUSCO, Y. CLENET, E. GENDRON, et F. LACOMBE, «Near-IR AO dissection of the core of NGC 1068 with NaCo.» *Astron. Astrophys.* Vol. 446 # 3, p. 813-825, 2006.
- [Harvey et Ftaclas (1990)] J. E. HARVEY, et C. FTACLAS, «Fundamental limitations on off-axis performance of phased telescope arrays.» *Advanced technology optical telescopes IV*, (L. D. BARR, ed.), *SPIE proceedings series*, vol. 1236, p. 390-405, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng, 1990.
- [Idier *et al.* (2005)] J. IDIER, L. MUGNIER, et A. BLANC, 2005. «Statistical behavior of joint least square estimation in the phase diversity context.» *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 14 #12, p. 2107-2116.
- [Mocœur *et al.* (2006)] I. MOCŒUR, F. CASSAING, F. BARON, S. HOFER, et H. THIELE, «DARWIN fringe sensor: experimental results on the BRISE bench.» *Advances in Stellar Interferometry* (J. D. MONNIER, M. SCHOLLER, et W.C. DANCHI, eds.), *SPIE proceedings series*, vol. 6268, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng, 2006.
- [Mugnier *et al.* (2006)] L. M. MUGNIER, A. BLANC, et J. IDIER, «Phase Diversity: a Technique for Wave-Front Sensing and for Diffraction-Limited Imaging.» *Advances in Imaging and Electron Physics*, (P. HAWKES, ed.), vol. 141, chapitre 1, p. 1-76, Elsevier, 2006.
- [Mugnier *et al.* (2005)] L. MUGNIER, F. CASSAING, G. ROUSSET, F. BARON, V. MICHAU, I. MOCŒUR, B. SORRENTE, et M.-T. VELLUET, «Continuous High-Resolution Earth Observation with Multiple Aperture Optical Telescopes.» *Proceedings of the OPTRO 2005 International Symposium*, Assoc. Aéro. et Astro. de France, 2005.
- [Mugnier *et al.* (2004)] L. MUGNIER, F. CASSAING, B. SORRENTE, F. BARON, M.-T. VELLUET, V. MICHAU, et G. ROUSSET, «Multiple-Aperture Optical Telescopes: some key issues for Earth observation from a GEO orbit.» *5th International Conference On Space Optics*, Vol. SP-554, p. 181-187, CNES/ESA, 2004.
- [Noll (1976)] R. J. NOLL, «Zernike polynomials and atmospheric turbulence.» *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 66 #3, p. 207-211, 1976.
- [Seldin *et al.*, (2006)] J. H. SELDIN, R. G. PAXMAN, V. G. ZARIFIS, L. BENSON, et R. E. STONE, «Closed-loop wavefront sensing for a sparse-aperture multitelescope array using broadband phase diversity.» *Imaging Technology and Telescopes* (J. W. BILBRO, J. B. BRECKINRIDGE, R. A. CARRERAS, S. R. CZYZAK, M. J. ECKART, R. D. FIETE, et P. S. IDELL, eds.), *SPIE proceedings series*, vol. 4091, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng, 2000.



Isabelle **Mocoœur**

Isabelle Mocoœur received the Ph.D. degree in Astronomy and Instrumentation from the University of Paris-Sud, Orsay, France, in 2008. Her main subjects of interest are optical interferometry, real-time wave front sensing and cophasing.



Laurent **Mugnier**

Laurent Mugnier graduated from Ecole Polytechnique, France, in 1988. He received his PhD in 1992 from Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications (ENST), France, for his work on the digital reconstruction of incoherent-light holograms. In 1994 he joined ONERA, where he is currently senior research scientist in the field of inverse problems and high resolution optical imaging.

His current research interests include image reconstruction and wave front-sensing, in particular for adaptive-optics corrected imaging through turbulence, for retinal imaging, for Earth observation and for optical interferometry in astronomy. His publications include five contributions to reference books and 30 papers in peer-reviewed international journals.



Frédéric **Cassaing**

Dr F. Cassaing works for 20 years in multiple-aperture optics. His main activities are the design and the cophasing of coherent arrays, including theoretical analysis, laboratory and in-situ experiments. Main results are the cophasing of I2T telescopes in 1994 (first time in Europe), nanometric phase tracking for the Persee nulling experiment, the concept for the VLT/PRIMA/FSU fringe sensor and focal-plane wave front sensing from unresolved or resolved sources.

